AS
222
R63
SER. 6
v. 13
1931
PER

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXVIII

1931 (IX)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1931 (IX)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 gennaio 1931 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di stelle di Eros.* Nota [1] del Socio G. ARMELLINI e di GABRIELLA ARMELLINI CONTI.

1. Come è noto, alla fine del gennaio 1931, il pianetino Eros passerà alla distanza di ventisei milioni di chilometri dalla Terra e cioè in condizioni assai favorevoli per determinare la sua parallasse, donde poi è possibile risalire alla parallasse del Sole la cui esatta conoscenza ha importanza fondamentale in tutta l'astronomia.

Appariva quindi evidente l'opportunità di utilizzare il fenomeno in vantaggio della scienza, come già fu fatto nel 1901, ed in proposito il Congresso Astronomico di Leida (1928), a cui intervenimmo personalmente, fece vive premure per una collaborazione internazionale delle Specole.

In particolare, fu stabilito che questa collaborazione si sarebbe iniziata con la determinazione – da farsi al meridiano – delle posizioni di alcune stelle, presso le quali sarebbe passato il pianetino e che sono state indicate in una lista preparata dal prof. Kopff [2]. E quindi, dopo accordi preliminari con altri astronomi italiani, il R. Osservatorio del Campidoglio ebbe l'incarico di esaminare una trentina di tali stelle e subito ci ponemmo all'opera.

2. Lo strumento meridiano di Ertel, di cui ci siamo serviti, è quello stesso che fu adoperato da Respighi, Di Legge e Giacomelli per l'esecuzione del grande catalogo di 4012 stelle dell'Osservatorio del Campidoglio. L'obbiettivo ha un'apertura di quattro pollici ed una lunghezza fuocale di m. 1.322

(1) Presentata nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) Cfr. KOPFF, *Verzeichnis von Anhaltsternen für die Eros Opposition*, in «Astr. Nachr.», nn. 5375 e 5403 Bd. 224 e 225.

ed il micrometro oculare è munito di diciassette fili orari, di un filo mobile di ascensione e di due fili di declinazione, uno fisso e l'altro mobile: la divisione della vite di ascensione è di $0^s,0667$ e quella della vite di declinazione $0'',8251$, i quali valori furono recentemente da noi controllati.

Lo strumento ha due cerchi di declinazione, muniti ognuno di quattro microscopi micrometrici, che permettono di valutare il decimo di secondo di arco, ed è corredato da un cronografo Mioni unito ad un pendolo Riefler a tempo siderale.

Per quanto riguarda la montatura, il meridiano di Ertel poggia su due solidissimi pilastri di marmo fondati sopra le mura della Torre Orientale del Palazzo Capitolino, mura che raggiungono alla base uno spessore di oltre quattro metri. La stanza in cui è contenuto - una bella sala di forma ellittica, fatta appositamente costruire da Pio IX su progetto dell'architetto Virginio Vespignani - ha cinque grandi finestre, oltre alla necessaria apertura meridiana, e può quindi essere completamente aereata per evitare le piccole irregolarità della « rifrazione di camera ».

Dobbiamo inoltre aggiungere che la visibilità stellare si mostra assai soddisfacente, giacchè l'Osservatorio del Campidoglio ha a mezzogiorno – dove appunto si fanno le osservazioni meridiane - la Zona Archeologica, quasi buia durante la notte, ed è difeso dai bagliori della parte centrale della città dal monumento a Vittorio Emanuele II. E infatti, nonostante le modeste dimensioni dell'Ertel, potemmo osservare distintamente stelle di grandezza 8,6, pure essendo il campo strumentale illuminato con luce rossa. Come è evidente, tenendo il campo oscuro ed illuminando soltanto i fili micrometrici si sarebbe giunti anche più in là; ma quest'ultimo metodo non fu mai adoperato, perchè meno perfetto.

3. Le osservazioni si iniziarono la sera del giorno 8 marzo 1929 e continuarono fino al 6 maggio dello stesso anno; vennero quindi riprese il 13 marzo 1930 e continuate fino al 28 aprile.

In totale furono compiute quaranta serate di osservazione, di cui ventotto nel 1929 e dodici nel 1930. E precisamente, nel 1929, sono dovute alla dott.ssa Gabriella Armellini Conti ventidue serate di osservazione e sei al prof. Giuseppe Armellini; nel 1930, invece, dieci serate sono dovute alla dott.ssa Armellini Conti e due al prof. G. Armellini. In ogni osservazione si eseguivano tre puntate con la vite di declinazione e si prendevano i passaggi a dieci fili orari; inoltre ogni sera, insieme con le stelle di Eros e con le fondamentali, si osservava una stella circumpolare per la determinazione dell'azimut strumentale.

I calcoli per le riduzioni dal luogo apparente al luogo medio furono interamente eseguiti dalla dott.ssa G. Conti, che si è servita del metodo di Bessel e del sistema del « Berliner Jahrbuch » (Auwers e Peters), tradizionale all'Osservatorio del Campidoglio. Le rifrazioni differenziali sono state calcolate con le tabelle della « Connaissance des Temps » del 1930, che sembrano

bene adatte per il clima di Roma come emerge da recenti ricerche del prof. G. Armellini [1].

4. Premesse queste spiegazioni, riportiamo nella seguente tabella i risultati delle misure meridiane. E precisamente la prima colonna indica la stella osservata secondo il numero che essa occupa nel catalogo del Kopff; la seconda colonna dà l'anno il mese ed il giorno dell'osservazione; la terza il nome dell'osservatore (C = Gabriella Conti; A = Giuseppe Armellini); la quarta la posizione strumentale Est o West; la quinta e la sesta dànno l'ascensione retta α e la declinazione δ trovata, ridotta sempre al 1930 col metodo di Bessel. Per comodità tipografica in queste ultime colonne abbiamo riportato soltanto i secondi di tempo e di arco, omettendo le ore, i gradi, i minuti, ecc.

Tabella I.

Stella	Data	Osservatore	Posizione	α	δ	Stella	Data	Osservatore	Posizione	α	δ
626	929-III-10	C	E	$41^s,82$	$2'',8$	639	929-III-8	A	E	$35^s,64$	$48'',9$
	15	A	W	41 ,91	0 ,6		9	C	W	35 ,81	49 ,2
	930-IV-26	C	W	41 ,82	—						
642	929-III-16	A	E	40 ,59	24 ,9	650	929-IV-7	C	E	16 ,34	57 ,2
	18	A	W	40 ,71	22 ,4		19	C	W	16 ,22	56 ,9
	31	C	E	—	22 ,9		930-IV-2	C	W	16 ,31	56 ,1
	930-IV-1	C	E	40 ,50	23 ,7		9	C	E	16 ,35	58 ,8
658	929-III-20	C	E	15 ,56	16 ,5	661	929-III-19	C	E	34 ,50	22 ,1
	23	C	W	15 ,42	14 ,5		21	C	W	34 ,46	20 ,9
	929-IV-25	C	W	15 ,49	14 ,4						
662	929-III-10	C	E	54 ,84	57 ,6	664	929-III-13	A	W	11 ,52	6 ,2
	12	C	W	54 ,81	58 ,2		22	C	E	11 ,34	4 ,6
							930-III-13	A	E	—	3 ,1
							21	A	W	11 ,45	5 ,6
678	929-III-8	A	E	18 ,61	31 ,4	683	929-IV-8	C	W	40 ,08	17 ,7
	9	C	W	18 ,65	34 ,2		9	C	E	39 ,86	17 ,1
	930-IV-1	C	E	18 ,61	30 ,4		930-IV-8	C	W	39 ,91	18 ,5
	12	C	W	18 ,57	30 ,6		10	C	E	40 ,09	17 ,7
686	929-IV-12	C	E	—	21 ,9	694	929-III-15	A	W	21 ,59	18 ,0
	17	C	E	23 ,26	21 ,8		16	A	E	21 ,47	18 ,6
	19	C	W	23 ,24	22 ,1						
	930-IV-9	C	E	23 ,25	20 ,0						
	26	C	W	23 ,21	21 ,4						

(1) Cfr. G. Armellini, *Saggio sopra la rifrazione astronomica di Roma*, in « Rend. R. Accademia dei Lincei », 1909, sem. I, fasc. 1.

Segue: TABELLA I.

Stella	Data	Osservatore	Posizione	α	δ	Stella	Data	Osservatore	Posizione	α	δ
703	929-III-10	C	E	28^s,17	39″,0	704	929-III-20	C	E	39^s,55	44″,5
	12	C	W	28 ,38	42 ,1		930-IV-28	C	W	39 ,28	45 ,0
707	929-III-22	C	E	47 ,86	6 ,9	708	929-III-23	C	W	54 ,30	36 ,7
	930-III-21	A	W	48 ,01	7 ,1		29	C	E	54 ,25	38 ,0
							930-III-31	C	E	—	35 ,7
712	929-IV-7	C	W	22 ,50	4 ,7	719	929-IV-30	C	W	50 ,25	41 ,8
	24	C	E	22 ,32	5 ,5		930-IV-23	C	E	50 ,45	41 ,0
725	929-IV-18	C	W	27 ,52	54 ,9	730	929-IV-19	C	W	33 ,90	—
	929-V-6	C	E	27 ,40	59 ,3		939-V-5	C	W	33 ,88	47 ,3
							930-IV-10	C	E	—	46 ,6
							12	C	W	34 ,06	47 ,7
731	929-III-8	A	E	—	19 ,2	755	929-IV-8	C	W	19 ,22	1 ,7
	9	C	W	40 ,46	17 ,0		17	C	E	19 ,17	4 ,4
	929-IV-9	C	E	40 ,30	17 ,2						
766	929-III-10	C	E	13 ,41	33 ,2	776	929-III-22	C	E	—	42 ,4
	13	A	W	13 ,46	37 ,4		930-IV-9	C	E	3 ,73	44 ,8
							26	C	W	3 ,65	40 ,8
781	929-IV-24	C	E	25 ,75	5 ,6	783	929-III-29	C	E	30 ,39	13 ,3
	25	C	W	25 ,83	4 ,8		929-IV-29	C	W	30 ,29	12 ,2
	930-IV-1	C	E	25 ,83	2 ,1						
	28	C	W	25 ,87	2 ,3						
786	929-III-20	C	E	37 ,60	23 ,4	793	929-III-15	A	W	2 ,26	39 ,5
	21	C	W	37 ,58	23 ,6		16	A	E	—	39 ,0
800	929-III-18	A	W	—	20 ,1	812	929-III-14	A	W	60 ,20	5 ,0
	19	C	E	31 ,81	25 ,3		929-IV-9	C	E	60 ,03	1 ,9
	930-III-31	C	E	31 ,90	22 ,8						
	930-IV-2	C	W	31 ,60	20 ,0						
814	929-III-9	C	W	—	37 ,3						
	929-IV-8	C	W	5 ,48	37 ,1						
	929-IV-17	C	E	5 ,36	34 ,9						
	930-IV-10	C	E	5 ,54	40 ,6						

5. Trascurando i moti propri, non ancora ben conosciuti, ed eseguendo le medie otteniamo allora, per il 1930,0, le posizioni indicate dalla tabella II.

Tabella II.

Stella	$\alpha_{1930,0}$	$\delta_{1930,0}$	Stella	$\alpha_{1930,0}$	$\delta_{1930,0}$
626	$10^h\ 15^m\ 41^s,85$	$-8°59'\ 1'',7$	712	$10^h\ 27^m\ 22^s,41$	$5°42'\ 5'',1$
639	17 35 ,72	−5 3 49 ,0	719	27 50 ,35	11 31 41 ,4
642	17 40 ,60	−8 21 23 ,5	725	28 27 ,46	9 46 57 ,1
650	19 16 ,30	−6 23 57 ,2	730	28 33 ,95	13 16 47 ,2
658	20 15 ,49	−1 55 15 ,1	731	28 40 ,38	5 0 17 ,8
661	20 34 ,48	−4 34 21 ,5	755	30 19 ,20	2 59 3 ,0
662	20 54 ,83	−7 13 57 ,9	766	31 13 ,43	8 25 35 ,3
664	21 11 ,44	−0 26 4 ,9	776	32 3 ,69	5 27 42 ,7
678	23 18 ,61	0 12 31 ,6	781	32 25 ,82	7 24 3 ,7
683	23 39 ,98	1 52 17 ,7	783	32 30 ,34	9 58 12 ,9
686	24 23 ,24	−2 21 21 ,4	786	32 37 ,59	15 9 23 ,5
694	25 21 ,53	3 0 18 ,3	793	33 2 ,26	14 24 39 ,3
703	26 28 ,28	−1 50 40 ,6	800	33 31 ,77	9 44 22 ,0
704	26 39 ,42	3 54 44 ,7	812	35 0 ,12	14 23 3 ,5
707	26 47 ,93	7 25 7 ,0	814	35 5 ,46	13 7 37 ,5
708	26 54 ,27	2 30 36 ,8			

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione unica – Funzionali.* Nota di B. Finzi, presentata[1] dal Corrisp. U. Cisotti.

In questa Nota continuo ed estendo l'argomento svolto in una Nota precedente[2]. A questa mi riferisco, continuandone la numerazione dei paragrafi e delle formule.

In forma riassuntiva tratterò dell'operazione di derivazione unica e del calcolo differenziale assoluto unico di sistemi multipli funzioni di altri sistemi. Servendomi poi del calcolo funzionale, estenderò le considerazioni svolte in questa Nota e nella precedente ai sistemi multipli formati da insiemi numerabili di elementi.

8. *Derivata unica.* – La definizione di derivata isotropa di un sistema funzione di un altro esige che l'incremento $\underset{2r}{\varepsilon}$ dato alla variabile indipendente $\underset{2r}{\mathbf{X}}$ sia eguale a $\underset{2r}{\varepsilon}\delta$, con che $\underset{2r}{\varepsilon}$ è invertibile, nel prodotto d'ordine r, con *qualsiasi* funzione $\underset{h}{\mathbf{Y}} = \underset{h}{f}(\underset{2r}{\mathbf{X}})$ per *qualsiasi* valore della variabile indipendente. Supponiamo ora che, senza essere in generale $\underset{2r}{\varepsilon} = \underset{2r}{\varepsilon}\delta$, $\underset{2r}{\varepsilon}$ sia commutabile nel prodotto d'ordine r con $\mathbf{Y}$, sia per $\mathbf{X} = \mathbf{C}$, sia per $\mathbf{X} = \mathbf{C} + \varepsilon$. Poichè in tal caso la (11) e la (11′) coincidono, il sistema da esse definito potrà dirsi *derivata unica* di $\mathbf{Y}$ rispetto ad $\mathbf{X}$, valutata per $\mathbf{X} = \mathbf{C}$. Consideriamo allora un campo di variabilità a cui appartenga $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X} + \varepsilon$, e tale che, per ogni $\mathbf{X}$ di esso, $\mathbf{Y}$ sia commutabile con ε nel prodotto d'ordine r. Potremo in tale campo parlare di una funzione $\underset{h}{\mathbf{Y}'}(\underset{2r}{\mathbf{X}})$ derivata unica di $\underset{h}{\mathbf{Y}}$ rispetto ad $\underset{2r}{\mathbf{X}}$[3].

Si noti che la definizione di derivata isotropa è una particolare definizione di derivata unica. Però, mentre la definizione di derivata isotropa è

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) *Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione isotropa*, questi «Rendiconti», vol. XII, p. 631.

(3) Ad esempio, scelto un sistema ε tale che $\varepsilon_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_r} = 0$ se almeno per un s $i_s \neq j_s$, la funzione

$$\mathbf{Y} = \sum a_i \mathbf{X}^i$$

è commutabile con ε se $X_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_r} = 0$ se, almeno per un s, $i_s \neq j_s$. Potremo dunque in questo caso parlare della funzione derivata di $\mathbf{Y}$ rispetto ad $\mathbf{X}$.

applicabile ad una funzione qualsiasi, la definizione di derivata unica, per un assegnato $\underset{2r}{\varepsilon}$, è applicabile soltanto alla classe delle funzioni commutabili con ε nel prodotto d'ordine r.

Si dimostra facilmente che valgono per la derivata unica (salvo condizioni limitatrici su l'ordine dei sistemi) le stesse regole di derivazione stabilite per la derivata isotropa (n. 4); e quindi, *qualunque* sia ε, la derivata unica di una funzione definita dalla (10) è *ancora* definita dalla (15).

9. *Differenziale unico.* – A meno di infinitesimi di ordine superiore a ε, l'incremento che subisce $\underset{h}{\mathbf{Y}} = \underset{h}{f}(\underset{2r}{\mathbf{X}})$ per un incremento ε di $\mathbf{X}$, sarà il differenziale di $\mathbf{Y}$, così definito:

$$(26) \qquad \underset{2r}{d\mathbf{X}} = \underset{2r}{\varepsilon} \quad , \qquad (27) \quad \underset{h}{d\mathbf{Y}} = \underset{h}{\mathbf{Y}'} \cdot_{r} \underset{2r}{d\mathbf{X}} .$$

10. *Funzioni di più variabili.* – Sia $\underset{h}{\mathbf{Y}}$ funzione di ν variabili $\underset{2r}{\mathbf{X}_1}, \cdots, \underset{2r}{\mathbf{X}_\nu}$. Potremo introdurre la funzione derivata parziale unica di $\mathbf{Y}$ rispetto ad $\mathbf{X}_i$, considerando $\mathbf{Y}$ funzione soltanto di $\mathbf{X}_i$, e valutando la derivata unica di $\mathbf{Y}$. Perchè ciò sia possibile è necessario che, comunque $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_\nu$ varino nel loro campo di variabilità, l'incremento infinitesimo ε_i dato a $\mathbf{X}_i$ sia invertibile con $\mathbf{Y}$ nel prodotto d'ordine r. Noi supporremo inoltre che tutti gli infinitesimi ε_i siano invertibili fra loro nel prodotto d'ordine r [1]. In queste ipotesi, considerando le derivate uniche successive di una funzione di più variabili indipendenti, può dimostrarsi l'invertibilità dell'ordine di derivazione. In quanto al differenziale totale, esso verrà così espresso:

$$(28) \qquad \underset{h}{d\mathbf{Y}} = \sum_{1}^{\nu}{}_{i} \underset{h}{\mathbf{Y}'_i} \cdot_{r} \underset{2r}{d\mathbf{X}_i} .$$

11. *Calcolo differenziale assoluto unico.* – Consideriamo la metrica (21) di n. 7, e passiamo dalle variabili y_i alle x_i, considerando, come è proprio della derivata unica, $y_i = y_i(x_1, \cdots, x_\nu)$ funzioni commutabili con dx_i nel prodotto d'ordine r, e questi commutabili fra loro. La (21) si scriverà allora così:

$$(29) \qquad ds^2 = \sum_{1}^{\nu} a_{hk} \cdot_{r} dx_h \cdot_{r} dx_k .$$

(1) Ad esempio, se

$$\mathbf{Y} = \sum_{i_1 \cdots i_\nu} a_{i_1 \cdots i_\nu} \underset{1}{\mathbf{X}}^{i_1} \cdot_{r} \cdots \underset{\nu}{\mathbf{X}}^{i_\nu}$$

e le variabili ubbidiscono alle condizioni della nota di n. 8, ν sistemi ε ivi caratterizzati, soddisfano alle condizioni ora imposte.

Limitiamoci a considerare le trasformazioni di variabili così definite:

$$(30) \qquad y_i = \sum_{i_1 \dots i_\nu} a_{i i_1 \dots i_\nu} x_1^{i_1} \underset{r}{\cdot} \cdots x_\nu^{i_\nu},$$

essendo $x_1, \cdots, x_\nu$ invertibili fra loro nel prodotto d'ordine r. Per queste funzioni

$$(31) \qquad a_{hk} = a_{kh}$$

e a_{hk} è una funzione del tipo (30).

Prescindiamo ora dalla particolare espressione di a_{hk}, e supponiamo $a_{hk} = a_{kh}$ funzioni del tipo (30), commutabili con dx_j, e questi commutabili fra loro. La (29) caratterizzerà una generica metrica. In essa il differenziale totale unico di una funzione $\underset{h}{\mathbf{Y}}(x_j)$ ha carattere invariantivo rispetto ai cambiamenti di variabili del tipo (30) che lasciano inalterata la (29). I differenziali unici delle variabili hanno carattere controvariante, mentre le derivate parziali della funzione rispetto alle variabili hanno carattere covariante. Operando per il differenziale secondo di $\mathbf{Y}$ come si è operato per il primo, si constata il carattere covariante doppio di

$$(32) \qquad \mathbf{Y}_{jil} = \mathbf{Y}''_{jl} - \sum_1^\nu \mathbf{Y}'_i \underset{r}{\cdot} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}$$

che si dirà derivata covariante del tensore rappresentato covariantemente da $\mathbf{Y}'_j$. Nella (32) compaiono i simboli di Cristoffel di 2 specie generalizzati, costruiti mediante i sistemi a_{hk} e le loro derivate così come gli ordinari simboli di Christoffel sono costruiti mediante i coefficienti della metrica, purchè, si intende, si sostituiscano alle ordinarie operazioni e derivazioni sopra scalari le operazioni e le derivazioni uniche sui sistemi. In modo analogo si definirà la derivata covariante (o controvariante) di un tensore qualunque, i cui elementi sono sistemi h–pli. Nella metrica (29) potrà, in generale, estendersi il calcolo differenziale assoluto ai tensori i cui elementi sono sistemi h–pli, purchè si sostituiscano ai numeri caratterizzanti la metrica nel calcolo differenziale assoluto ordinario, sistemi di ordine $2r$, alle operazioni su i numeri, operazioni su i sistemi, e in particolare: al prodotto fra numeri, il prodotto d'ordine r fra sistemi, alla derivata ordinaria, la derivata unica [1].

(1) Si noti la differenza fra il calcolo differenziale unico, che ha tale carattere nella metrica (29), rispetto alle trasformazioni del tipo (30) dei sistemi variabili x, e il calcolo differenziale assoluto isotropo, che ha tale carattere nella metrica (23), rispetto alle trasformazioni degli scalari x che caratterizzano la variazione di x nella derivaziane isotropa.

12. *Integrale.* - Facilmente si definisce (a meno di un sistema costante $\underset{h}{\mathbf{C}}$) l'integrale indefinito di una funzione $\underset{h}{f}(\underset{2r}{\mathbf{X}})$ come una funzione $\underset{h}{\varphi}$ che ha per derivata $\underset{h}{f}$.

Per definire l'integrale isotropo definito, si consideri $\underset{2r}{\mathbf{X}} = \underset{2r}{\Xi} + x\underset{2r}{\delta}$, (18): se x varia nell'intervallo a, b, si divida tale intervallo in parti; se f è un valore assunto dalla funzione nell'intervallo di misura Δx, diremo integrale definito di $\underset{h}{f}$ nell'intervallo a, b, il $\lim_{\Delta x \to 0} \sum \underset{h}{f} \Delta x$. Con ovvio significato dei simboli sarà:

$$(33) \qquad \int_a^b \underset{h}{f}\, dx = \underset{h}{\varphi}(\underset{2r}{\Xi} + b\underset{2r}{\delta}) - \underset{h}{\varphi}(\underset{2r}{\Xi} + a\underset{2r}{\delta}).$$

In modo analogo si può definire l'integrale unico definito, e stabilire per esso una relazione analoga alla (33).

13. *Sistemi numerabili.* - Consideriamo un sistema $\underset{h}{\mathbf{X}}$, i cui elementi possono porsi in corrispondenza con le disposizioni con ripetizione $i_1, \cdots, i_h$, allorchè ogni indice i può assumere valori interi fra 0 e ∞. Gli elementi $X_{i_1}, \cdots, X_{i_1 \ldots i_h}$ possono interpretarsi come coefficienti di una h-pla serie di funzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \cdots$ caratterizzante in un dato intervallo (ad es. 0, 1) per $t_1, \cdots, t_h$ (salvo condizioni qualitative per le funzioni φ) una funzione $X(t_1, \cdots, t_h)$; così che, una volta assegnate le funzioni φ, il sistema $\underset{h}{\mathbf{X}}$ individua ed è individuato dalla funzione $X(t_1, \cdots, t_h)$.

La nozione di eguaglianza e le operazioni di somma, differenza, prodotto per un numero relative ad $\mathbf{X}$ per n finito si estendono immediatamente ai sistemi $\mathbf{X}$ per n infinito. Per estendere l'operazione prodotto, si considerino due sistemi $\underset{h}{\mathbf{X}}$ e $\underset{k}{\mathbf{Y}}$, rappresentati da due funzioni $X(t_1, \cdots, t_h)$, $Y(t_1, \cdots, t_k)$. La funzione

$$Z(t_1, \cdots, t_{h-r}\, \tau_{r+1}, \cdots, \tau_k) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 X(t_1, \cdots, t_{h-r}, l_1, \cdots, l_r)\, Y(l_1, \cdots, l_r\, \tau_{r+1}, \cdots, \tau_k)\, dl_1, \cdots, dl_r$$

rappresenta il sistema $\underset{h+k-2r}{\mathbf{Z}} = \underset{h}{\mathbf{X}} \cdot \underset{r}{} \underset{k}{\mathbf{Y}}$ [1]. Si intuisce ora come possa estendersi l'operazione potenza e l'operazione quoziente, e come si definisca l'unità per i sistemi d'ordine pari.

(1) Per $h = k = 2$, $r = 1$ si ha la composizione di seconda specie di VOLTERRA (*Fonctions de lignes*, Paris, 1913, p. 179). Sempre in queste ipotesi, ma nel campo complesso, cfr. L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, « Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. III, 1930.

Definita l'operazione prodotto e potenza, potremo, come a n. 2, definire una funzione $\underset{h}{\mathbf{Y}} = \underset{h}{\mathbf{Y}}\,(\underset{2r}{\mathbf{X}})$, caratterizzandola mediante la funzione $Y(t_1, \cdots, t_h)$, espressa dalla seguente serie di funzionali:

$$Y(t_1, \cdots, t_h) = \sum_{0}^{\infty}{}_i \int_0^1 \cdots \int_0^1 a_i(t_1, \cdots, t_{h_i - r_i} l_1, \cdots l_{r_i})$$

$$X^{(i)}(l_1, \cdots, l_{r_i}\, t_{h_i - r_i + 1}, \cdots, t_h)\, dl_1, \cdots, dl_{r_i} \qquad (h_i = h + 2r_i - 2r).$$

Questa definisce effettivamente $\underset{h}{\mathbf{Y}} = \underset{h}{\mathbf{Y}}\,(\underset{2r}{\mathbf{X}})$ allorchè il secondo membro è convergente. Manifestamente $\mathbf{Y}$ ora definito è caratterizzato da un funzionale di $X(\rho_1, \cdots, \rho_{2r})$ dipendente dai parametri $t_1, \cdots, t_h$ [1].

Su i sistemi ora definiti si opera facilmente la derivazione isotropa ed unica e si estende il calcolo differenziale sia isotropo che unico, semplicemente sostituendo alle operazioni su i sistemi le corrispondenti operazioni funzionali [2].

(1) Nel campo complesso, per $h_i = 0$, $r_i = 0$, $r = 1$, $h = 2$, cfr. L. Fantappiè, *Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti*, questi «Rendiconti», vol. VIII, 1928, p. 645 e vol. IX, 1929, p. 197.

(2) L'argomento ora accennato (così come un più ampio sviluppo delle considerazioni svolte ai numeri precedenti) forma oggetto di una Memoria in corso di stampa presso il R. Istituto Lombardo.

Matematica. — *Sull'integrale olomorfo e nullo per* $x = 0$ *dell'equazione* $x\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Nota di G. Lampariello, presentata [1] dal Corrisp. U. Amaldi.

1. L'equazione differenziale

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

con $f(x, y)$ funzione analitica delle due variabili x, y, olomorfa e nulla nel punto $x = 0, y = 0$, è stata oggetto di classiche ricerche da parte di Briot, Bouquet, Poincaré, Picard, Bendixson, ecc., aventi lo scopo di stabilire le circostanze nelle quali si può affermare l'esistenza di integrali $y(x)$ olomorfi nell'intorno del punto $x = 0$ o tendenti a zero per $x \to 0$.

Se si sviluppa la $f(x, y)$ in serie di potenze di x ed y

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \cdots,$$

è noto (Briot e Bouquet) che, se il numero β non è intero positivo, esiste un solo integrale olomorfo $y(x)$ della (1), nullo nel punto $x = 0$ [2].

Gli autori citati si limitano ad affermare che lo sviluppo in serie di potenze dell'integrale

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

converge per $|x|$ sufficientemente piccolo, ma non assegnano un minimo campo attorno al punto $x = 0$, in cui certamente si può affermare l'esistenza dell'integrale.

Non si è perciò in grado di decidere la convergenza della serie (2) in un punto $x_0 \neq 0$, se non si hanno elementi sufficienti per poterla stabilire direttamente in base alla legge di costruzione dei coefficienti $c_1, c_2, c_3, \cdots$

Alla questione di studiare la convergenza della serie (2) sono stato condotto dalla ricerca dell'integrale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-1/2} y^{3/2}, \tag{3}$$

che soddisfa alle condizioni terminali $y(0) = 1, y(+\infty) = 0$ [3].

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) Cfr. E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 26 e seg., 2ª ediz., Paris, Gauthier-Villars; E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 525. 4ª ediz., Paris, Gauthier-Villars.

(3) E. Fermi. *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*, «Rendiconti Lincei», vol. VI, p. 605, 1927.

In questo lavoro, determino un minimo campo attorno al punto $x = 0$, in cui l'integrale olomorfo $y(x)$ dell'equazione (1) può essere calcolato col metodo delle integrazioni successive di Picard.

Si ottiene così un teorema del tutto analogo a quello classico relativo all'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

con $f(x, y)$ analitica, olomorfa nell'intorno dei valori iniziali x_0, y_0.

2. Supporremo che x ed y siano variabili reali ed $f(x, y)$ funzione reale delle variabili x, y.

La (1) si può scrivere

$$x\frac{dy}{dx} + \lambda y = x\varphi(x) + y\psi(x, y), \tag{1'}$$

dove supporremo λ (reale) positivo.

La funzione $\psi(x, y)$ è nulla nel punto $x = 0, y = 0$, perchè è ivi tale la derivata parziale rispetto ad y, $y\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi(x, y)$, del secondo membro della (1').

Esistono sempre due numeri positivi a e b, tali che i massimi moduli M ed H, rispettivamente di $\psi(x, y)$ e $\frac{\partial[y\psi(x, y)]}{\partial y}$ per $0 \leq x \leq a$, $|y| \leq b$, siano entrambi minori di $\lambda + 1$; sia K il massimo modulo di $\varphi(x)$ in $(0, a)$.

3. Ciò posto, vale il seguente

Teorema. *Esiste ed è unico l'integrale olomorfo $y(x)$ dell'equazione (1') che si annulla per $x = 0$, almeno nell'intervallo $(0, \delta)$, essendo δ il minore dei due numeri*

$$a, \frac{b}{K}(\lambda + 1 - M).$$

Dalla (1'), moltiplicando ambo i membri per $x^{\lambda-1}$, si ha

$$\frac{d}{dx}(x^\lambda y) = x^\lambda \varphi(x) + x^{\lambda-1} y\psi(x, y). \tag{4}$$

Applichiamo ora il procedimento delle integrazioni successive, ponendo dapprima al posto di y, nel secondo membro della (3), $y \equiv 0$.

Si ottiene la successione di funzioni

$$y_1, y_2, y_3, \cdots \tag{5}$$

definite da

$$(6)\qquad \begin{cases} x^{\lambda} y_1 = \int_0^x x^{\lambda} \varphi(x)\, dx \\ x^{\lambda} y_2 = x^{\lambda} y_1 + \int_0^x x^{\lambda-1} y_1 \psi(x, y_1)\, dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{\lambda} y_{n+1} = x^{\lambda} y_1 + \int_0^x x^{\lambda-1} y_n \psi(x, y_n)\, dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dimostriamo che le funzioni (5) sono sviluppabili in serie di potenze di x e nulle nel punto $x = 0$.

Ciò è evidente per la funzione y_1, poichè, se $\varphi(x) = \sum_0^{\infty n} a_n x^n$, la funzione integrale della prima delle (6) ammette lo sviluppo

$$\int_0^x x^{\lambda} \varphi(x)\, dx = \sum_0^{\infty n} \frac{a_n}{\lambda + n + 1} x^{\lambda+n+1},$$

e quindi

$$(7)\qquad y_1(x) = \sum_0^{\infty n} \frac{a_n}{\lambda + n + 1} x^{n+1} = x \sum_0^{\infty n} \frac{a_n}{\lambda + n + 1} x^n .$$

Ammettiamo ora che y_n sia olomorfa e nulla nel punto $x = 0$ e dimostriamo che è tale anche y_{n+1}.

Infatti, nei riguardi di y_{n+1}, si è condotti ad esaminare l'integrale

$$\int_0^x x^{\lambda-1} y_n \psi(x, y_n)\, dx,$$

che è del tipo $\int_0^x x^{\lambda} \varphi_n(x)\, dx$, avendo posto

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x} y_n \psi(x, y_n) .$$

Osserviamo che l'intervallo di convergenza dello sviluppo tayloriano di ciascuna funzione (5) è eguale a quello della corrispondente funzione $\varphi_n(x)$ o della $\varphi(x)$.

Bisogna ora accertarsi che i valori delle funzioni (5), nell'intervallo $(0, \delta)$ non superino in valore assoluto il numero b.

A tale scopo osserviamo che

$$x^\lambda |y_1| \leq \int_0^x x^\lambda |\varphi(x)|\, dx \leq K \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

da cui

$$|y_1| \leq \frac{Kx}{\lambda+1}.$$

Dalla seconda delle (6) si trae

$$x^\lambda |y_2| \leq x^\lambda |y_1| + \int_0^x x^{\lambda-1} |y_1|\, |\psi(x, y_2)|\, dx \leq \frac{Kx^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{MK\, x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2},$$

da cui

$$|y_2| \leq \frac{K}{\lambda+1}\left(1 + \frac{M}{\lambda+1}\right)x.$$

In generale,

$$(8) \qquad |y_{n+1}| \leq \frac{K}{\lambda+1}\left[1 + \frac{M}{\lambda+1} + \frac{M^2}{(\lambda+1)^2} + \cdots + \frac{M^n}{(\lambda+1)^n}\right]x.$$

Poichè è $M < \lambda + 1$, la serie $\sum_0^\infty{}_n \frac{M^n}{(\lambda+1)^n}$ è convergente ed ha per somma $\frac{\lambda+1}{\lambda+1-M}$, sicchè

$$|y_{n+1}| < \frac{Kx}{\lambda+1-M},$$

da cui, per ogni n,

$$|y_{n+1}| < b, \text{ se } 0 \leq x \leq \delta.$$

Dimostriamo ora che la serie

$$(9) \qquad y_1 + \sum_1^\infty{}_n (y_{n+1} - y_n)$$

converge uniformemente in $(0, \delta)$.

Si ha

$$(10) \qquad x^\lambda |y_2 - y_1| \leq \int_0^x x^{\lambda-1} |y_1|\, |\psi(x, y_1)|\, dx \leq \frac{MK\, x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2}$$

e quindi

$$|y_2 - y_1| \leq \frac{MK\,x}{(\lambda+1)^2},$$

$$x^\lambda |y_3 - y_2| \leq \int_0^x x^{\lambda-1} |y_2\psi(x,y_2) - y_1\psi(x,y_1)|\,dx \leq$$

$$\leq H\int_0^x x^{\lambda-1}|y_2 - y_1|\,dx \leq H\,\frac{MK}{(\lambda+1)^2}\,\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

da cui

$$|y_3 - y_2| \leq MK\,\frac{H}{(\lambda+1)^3}\,x.$$

In generale, si ha

$$|y_{n+1} - y_n| \leq MK\,\frac{H^{n-1}}{(\lambda+1)^{n+1}}\,x.$$

Essendo $H < \lambda + 1$, la serie $\sum_1^\infty{}^n \frac{H^{n-1}}{(\lambda+1)^{n+1}}$ è convergente e quindi la serie (9) converge uniformemente nell'intervallo $(0, \delta)$.

Applicando la derivazione per serie alla serie (9) si verifica facilmente che la somma $y(x)$ della serie (9) soddisfa all'equazione differenziale.

In base al carattere olomorfo dei singoli termini della (9) consegue che la $y(x)$ è altresì olomorfa ed è nulla nel punto $x = 0$.

4. Si può fare, nel caso della (1'), la stessa osservazione che il Lindelöf ha fatta relativamente al caso regolare di cui si è parlato al n. 1.

Può talvolta convenire di maggiorare l'integrale che compare nella (10), anzichè col massimo modulo M di $\psi(x,y)$, col massimo modulo di $\psi(x,y_1)$ in $(0,a)$, che indicheremo con M_1.

Poichè

$$|y_{n+1}| \leq |y_1 + |y_2 - y_1| + \cdots + |y_{n+1} - y_n|,$$

si ha

$$|y_{n+1}| \leq \frac{Kx}{\lambda+1} + \frac{M_1 Kx}{(\lambda+1)^2} + \frac{H\cdot M_1 Kx}{(\lambda+1)^3} + \cdots +$$

$$+ \frac{H^{n-1}\cdot M_1 Kx}{(\lambda+1)^{n+1}} < \frac{K}{\lambda+1}\left\{1 + \frac{M_1}{\lambda+1}\sum_0^\infty{}^n \frac{H^2}{(\lambda+1)^2}\right\}x$$

ovvero

$$|y_{n+1}| < \frac{K}{\lambda+1}\left(1 + \frac{M_1}{\lambda+1-H}\right)x.$$

Può darsi che la condizione $\frac{K}{\lambda+1}\left(1+\frac{M_1}{\lambda+1-H}\right)x \leq b$ dia un intervallo più ampio di $(0, \delta)$.

Confrontando i numeri $\frac{b}{K}(\lambda+1-M)$, $\frac{b}{K}\frac{(\lambda+1)(\lambda+1-H)}{\lambda+1-H+M_1}$, si vede che il primo è minore del secondo se è $M_1 > H$.

5. *Osservazione.* I ragionamenti precedenti valgono anche se si considera l'intervallo $(-a, a)$ in luogo dell'intervallo $(0, a)$, ma soltanto se λ è reale positivo. Se λ è negativo si è costretti a considerare la questione nel campo complesso.

Lo studio dell'equazione (1) nel campo complesso potrà essere oggetto di un altro lavoro.

Tornando al caso di λ negativo, osserviamo che si ha a che fare con funzioni reali se ci si limita a considerare l'intervallo $(0, a)$. È allora interessante osservare che pur potendo non esistere gli integrali $\int_0^x x^\lambda \varphi_n(x)\,dx$, pure le funzioni (5) non perdono il carattere olomorfo nell'intorno del punto $x = 0$.

Facciamo vedere la cosa per l'integrale $\int_0^x x^\lambda \varphi(x)\,dx$.

Posto $\lambda = -\mu$, $\mu > 0$ e supposto $\varphi(0) \neq 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} x^\mu \int_0^x \frac{\varphi(x)}{x^\mu}\,dx = 0.$$

Ciò è evidente se $0 < \mu < 1$, perchè in tal caso la funzione $\frac{\varphi(x)}{x^\mu}$ è integrabile in $(0, x)$. Se è $\mu > 1$, applichiamo il teorema di L'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} x^\mu \int_0^x \frac{\varphi(x)}{x^\mu}\,dx = -\frac{1}{\mu}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\varphi(x)}{x^\mu}}{x^{-\mu-1}} = -\frac{1}{\mu}\lim_{x\to 0} x\varphi(x) = 0.$$

La funzione y_1 ammette, anche nel caso in cui l'integrale $\int_0^x x^\lambda \varphi(x)\,dx$ non esiste finito, lo sviluppo in serie (7), sotto la condizione essenziale che λ non sia intero negativo (o che β non sia intero positivo).

Si ritrova quindi, attraverso il procedimento delle integrazioni successive, il teorema di Briot e Bouquet del n. 1.

Matematica. — *Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

4. Indico in questa Nota [2] come si possa estendere alle forme differenziali quadratiche *assolutamente specializzate* q volte ($1 \leq q \leq n-1$) il calcolo assoluto costruito dal Ricci per il caso irriducibile $q = 0$. *Non intenderó escluso questo caso* dalle presenti considerazioni.

Sia dunque la forma (1), $a_{rs}\,du^r\,du^s$ $(p, \ldots, s, t, v = 1, 2, \cdots, n)$ assolutamente specializzata q volte, $0 \leq q \leq n-1$: onde esisteranno q sistemi indipendenti $\underset{a}{\omega^r}$ $(a, b, c = 1, 2, \cdots, q)$ di soluzioni delle (2), $a_{rs}\,\omega^r = 0$, soddisfacenti alle (5), $\left(\underset{a}{\omega^r}\frac{\partial}{\partial u^r}\underset{b}{\omega^s} - \underset{b}{\omega^r}\frac{\partial}{\partial u^r}\underset{a}{\omega^s}\right) a_{st} = 0$, e $(15)_b$, $\underset{a}{A_{rs}} = \begin{bmatrix} r\,s \\ t \end{bmatrix}\underset{a}{\omega^t} = 0$.

Ci varremo per semplicità della considerazione dell'R_N ambiente: sia (12), $P = P(u^1, u^2, \cdots, u^n)$, una rappresentazione parametrica in R_N di una V_{n-q} di R_N che ammetta l'espressione (1) pel ds^2, cosicchè sussisteranno le (13), $a_{rs} = \frac{\partial P}{\partial u^r} \times \frac{\partial P}{\partial u^s}, \begin{bmatrix} r\,s \\ t \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^r \partial u^s} \times \frac{\partial P}{\partial u^t}$; (14), $\underset{a}{\omega^r}\frac{\partial P}{\partial u^r} = 0$; (16), $\left(\underset{a}{\omega^r}\frac{\partial}{\partial u^r}\underset{b}{\omega^s} - \underset{b}{\omega^r}\frac{\partial}{\partial u^r}\underset{a}{\omega^s}\right)\frac{\partial P}{\partial u^s} = 0$.

Se ξ è un vettore della V_{n-q}, le quantità $\xi_r = \xi \times \frac{\partial P}{\partial u^r}$ potranno assumersi a sue *componenti covarianti* nel sistema u^r. Dalle (14) segue

$$\underset{a}{\omega^r}\,\xi_r = 0. \tag{17}$$

Viceversa, soltanto se valgono le (17) un sistema covariante ξ_r sarà formato dalle componenti covarianti di un vettore di V_{n-q}.

Siano ora appunto le ξ_r, legate dalle (17), componenti covarianti di di un assegnato vettore ξ di V_{n-q}. Le equazioni nelle ξ^r

$$\xi^r\,a_{rs} = \xi_s \tag{18}$$

(1) Nella seduta del 21 dicembre 1930.

(2) Proseguendo la ricerca iniziata nella Nota: *Sulle forme differenziali quadratiche specializzate*, già pubblicata in questi «Rendiconti», pp. 541-547. Per semplicità usiamo le stesse notazioni, e proseguiamo anche nella numerazione dei paragrafi e delle formole.

formano, per le (3), (17), un sistema sempre compatibile, e quindi determinano, se $q = 0$, un sistema di soluzioni, se $q > 0$, una classe infinita di soluzioni ξ^r: tali che se ξ^{*r} è una qualunque di esse, la più generale è

$$\xi^r = \xi^{*r} + b^a \omega^{\lambda}_a , \tag{19}$$

le b^a essendo coefficienti arbitrari. Viceversa, date *ad arbitrio* le ξ^r, mediante le (18) risultano determinate le corrispondenti ξ_r, certo soddisfacenti alle (17), e quindi un vettore ξ, di cui le ξ_r sono componenti covarianti, e di cui le ξ^r si diranno *componenti controvarianti*. Per le (18), condizione perchè due sistemi ξ^r, η^r siano componenti controvarianti di uno stesso vettore è che sia

$$(\eta^r - \xi^r)\, a_{rs} = 0 . \tag{20}$$

In particolare le ω^r, soluzioni delle (2), sono *componenti controvarianti del vettore nullo* di V_{n-q}. Per una trasformazione $u'^r = u'^r(u'^1, u'^2, \cdots, u'^n)$ delle coordinate curvilinee, posto $\theta'^r_s = \dfrac{\partial u'^r}{\partial u^s}$, si ha $\xi'_r = \theta'^s_r \xi_s$, ma detti ξ'^r, ξ^r due corrispondenti sistemi di componenti controvarianti, si ha in generale soltanto $(\xi'^r - \theta'^r_s \xi^s)\, a'_{rt} = 0$. Però queste esprimono, per le (20), che le ξ'^r, $\theta'^r_s \xi^s$ sono, nel sistema u', componenti controvarianti dello stesso vettore ξ, cioè che, fra i sistemi di componenti controvarianti di ξ nel sistema coordinato u', esistono anche le $\theta'^r_s \xi^s$; *è in questo senso* che parliamo di componenti *controvarianti*.

I differenziali du^r delle coordinate u^r in generale definiscono, anche nelle attuali ipotesi, un vettore infinitesimale, dP, del quale sono componenti controvarianti: ma se $q > 0$, diversi sistemi du^r, $\delta^* u^r$ di differenziali, sotto la condizione $(\delta^* u^r - du^r)\, a_{rs} = 0$, corrispondono allo stesso vettore infinitesimo di V_{n-q}; ed esistono dei sistemi di differenziali, quelli soddisfacenti alle condizioni $a_{rs}\, du^r = 0$, cioè proporzionali a un sistema ω^r di soluzioni delle (2), che definiscono un *vettore nullo*, cosicchè il corrispondente punto $u^r + du^r$ coincide col punto u^r. Se $a_{rs}\, du^r \neq 0$ le du^r determinano una direzione della V_{n-q} uscente dal punto considerato: se $a_{rs}\, du^r = 0$ esse non determinano una effettiva direzione della V_{n-q}, ma darebbero luogo a una *direzione singolare* dell'E_n rappresentativo: diremo allora che esse determinano una *pseudodirezione* di V_{n-q}.

Uno scalare $f(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ sarà da considerare un *campo scalare* (*univoco*) di V_{n-q} allora e solo che ha lo stesso valore per tutti i sistemi di valori delle u^r che corrispondono allo stesso punto geometrico della V_{n-q}: la condizione per questo è manifestamente che sia $\dfrac{\partial f}{\partial u^r}\, \omega^r_a = 0$, il che sostanzialmente esprime che grad f è un vettore di V_{n-q}; o ancora, *che df risulti nullo, se calcolato in una pseudodirezione di* V_{n-q}. (Cfr. n. 7).

5. Per ricavare, date le componenti ξ_r di un vettore non nullo di V_{n-q}, un corrispondente sistema di componenti ξ^r, si può anche seguire quest'altra via: osserviamo anzitutto che le equazioni nelle a^{rs}

$$a^{rs}\, a_{rp}\, a_{st} = a_{pt} \tag{21}$$

formano un sistema *sempre compatibile*. Nel caso irriducibile $q = 0$, le soluzioni (uniche) a^{rs} delle (21) sono gli *elementi reciproci delle* a_{rs} in $|a_{rs}|$; per $q > 0$ esistono infiniti sistemi di soluzioni delle (23), se a^{*rs} è uno di essi, il più generale è

$$a^{rs} = a^{*rs} + h^{ra}\, \underset{a}{\omega^s} + h^{sa}\, \underset{a}{\omega^r}\,, \tag{22}$$

le h^{ra} essendo coefficienti arbitrari. Le a^{rs} si potranno riguardare in ogni caso come *componenti controvarianti* del tensore fondamentale.

Se in particolare supponiamo che siano nulle tutte le a_{rs} per le quali uno almeno dei due indici r, s assume uno dei valori $\mu + 1, \mu + 2, \cdots, n$, e che le $a_{\varrho\sigma}$ $(\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, \mu)$ formino un minore $|a_{\varrho\sigma}| \neq 0$, uno dei sistemi di valori delle a^{rs} si ottiene ponendo $a^{\varrho\sigma}$ eguale all'elemento reciproco di $a_{\varrho\sigma}$ in $|a_{\varrho\sigma}|$ $(\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, \mu)$ e le altre a^{rs} (r od s eguale a uno dei numeri $\mu + 1, \cdots, n$) tutte eguali a zero.

Si potranno costruire anche *componenti miste* del tensore fondamentale, caratterizzate dal soddisfare al sistema

$$a^r_s\, a_{rt} = a_{st}\,. \tag{23}$$

Nel caso irriducibile si ha anche, come è ben noto,

$$a^r_s = a^{rt}\, a_{st}\,, \tag{24}$$

mentre nel caso generale $(q > 0)$ si potrà soltanto dire che le (24) dànno (tenute presenti le (22)) una classe di valori delle a^r_s, ma *non la più generale*. Di qui si vede in particolare che un sistema di valori delle a^r_s, (nel caso irriducibile, $q = 0$, l'unico), è dato in ogni caso dai *simboli di Kronecker* δ^r_s $(= 1$ se $r = s$; 0 se $r \neq s)$. Si noti che se $q > 0$, tale sistema di valori *non è compreso* nella formula (24). Ciò premesso: le

$$\xi^r = a^{rs}\, \xi_s \tag{25}$$

sono componenti controvarianti del vettore ξ che ha per componenti covarianti le ξ_s, e anzi, *se* ξ *non è nullo*, al variare delle a^{rs} entro la totalità delle componenti controvarianti (22) del tensore fondamentale le ξ^r date dalle (25) descrivono *la totalità* delle componenti controvarianti (19) di ξ. Così pure, dato un sistema ξ^r di tali componenti, le quantità $a^t_r\, \xi^r$ forme-

ranno un nuovo sistema (in generale *diverso* da quello primitivo ξ^s) di componenti controvarianti: mentre si avrà, manifestamente, sempre

$$a_s^r \, \xi_r = \xi_s \,. \tag{26}$$

L'analogia col caso classico $q = 0$ è così, nei limiti del possibile, pienamente raggiunta *pei vettori*. Notiamo ancora che, se le ξ^r sono componenti controvarianti di ξ si ha $\xi = \xi^r \frac{\partial P}{\partial u^r}$; viceversa, se ξ è, comunque, decomposto in vettori paralleli ai vettori $\frac{\partial P}{\partial u^r}$ – il che potrà farsi in un unico modo nel caso $q = 0$ e allora soltanto – i coefficienti ξ^r in questa decomposizione sono componenti controvarianti del vettore supposto.

Il *modulo* di un vettore di componenti ξ_r, ξ^s è, come nel caso $q = 0$,

$$\operatorname{mod} \xi = \sqrt{a_{rs} \, \xi^r \, \xi^s} = \sqrt{a^{rs} \, \xi_r \, \xi_s} = \sqrt{\xi_r \, \xi^r} \,, \tag{27}$$

e il *prodotto scalare* di due vettori ξ, η è

$$\xi \times \eta = a_{rs} \, \xi^r \, \eta^s = a^{rs} \, \xi_r \, \eta_s = \xi_r \, \eta^r = \xi^r \, \eta_r \,. \tag{28}$$

6. Il passaggio dai *vettori* ai *tensori* qualunque è agevole. Se intendiamo [1] che « *tensore di* V_{n-q} », di ordine $k + 1$ qualunque, sia ogni *operatore lineare fra k–ple ordinate di vettori di* V_{n-q} *e vettori di* V_{n-q}, troviamo subito che un sistema covariante o misto ad indici $rs \cdots$ è tensore di V_{n-q} se, detto r uno qualunque dei suoi indici di covarianza, e indicato genericamente il sistema con $H_{\cdots r \cdots}^{\cdots s_h}$, si ha

$$H_{\cdots r \cdots}^{\cdots s_h} \underset{a}{\omega^r} \, a_{s_1 t_1} \, a_{s_2 t_2} \cdots a_{s_h t_h} = 0 \,. \qquad (t_1, t_2, \cdots, t_h = 1, 2, \cdots, n) \tag{29}$$

Se queste sono soddisfatte si potrà, sia con una o più moltiplicazioni interne per a^{rs}, sia risolvendo sistemi dei tipi (17), (21), innalzare, tutti o in parte, gli indici di *covarianza* trasformandoli in indici di *controvarianza*: questa parola dovendo però intendersi nel senso poco sopra precisato a proposito dei vettori. Per tensori d'ordine $\geqq 2$ la moltiplicazione interna per uno o più fattori a^{rs} non dà però *tutte* le possibili componenti controvarianti o miste corrispondenti agli innalzamenti d'indici che così si conseguono; come già si è osservato a proposito di a_s^r.

Del resto tutte le operazioni dell'ordinaria *algebra tensoriale* e le proprietà relative si estendono anche al caso attuale, limitatamente a quelli che abbiamo chiamato « tensori di V_{n-q} »: su ciò non occorrerà fermarci.

(1) Cfr. Burgatti, Boggio, Burali-Forti: « Geometria Differenziale », Zanichelli, 1930, p. 150.

7. Veniamo ora ad estendere l'*analisi tensoriale*. Per questo definiamo anzitutto per la forma (1) i simboli di Christoffel di 2ª specie $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$, come soluzioni del sistema, certo compatibile per le $(15)_b$,

$$\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\} a_{tv} = \left[\begin{matrix} r\,s \\ v \end{matrix} \right]. \tag{30}$$

Nel caso irriducibile $q = 0$ e allora soltanto tali simboli sono *univocamente* determinati dalle (30), e si ha anche

$$\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} r\,s \\ v \end{matrix} \right] a^{tv}, \tag{31}$$

come è ben noto. Nel caso generale si potrà soltanto dire che le (31) definiscono, per ogni sistema di valori delle a^{tv}, un sistema di valori dei simboli $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$; questo non sarà però, al variare delle a^{tv}, il *più generale* sistema di valori per questi simboli, che si potrà invece esprimere, se $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}^*$ è una loro particolare determinazione, con la formula

$$\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}^* + h^a_{rs} \underset{a}{\omega^t}, \tag{32}$$

il sistema h^a_{rs} essendo simmetrico rispetto ad r, s e del resto arbitrario.

Sia ξ un qualunque vettore di V_{n-q}, ξ_r siano le sue componenti covarianti nel sistema coordinato u^r, e ξ^r sia un qualunque sistema di sue componenti controvarianti. Poniamo, $\left\{ \begin{matrix} s\,t \\ r \end{matrix} \right\}$ essendo una qualunque determinazione e dei simboli di Christoffel di 2ª specie,

$$\bar{d}\xi_r = d\xi_r - \left\{ \begin{matrix} r\,t \\ s \end{matrix} \right\} \xi_s\, du^t. \tag{33}$$

Cioè, valendo anche nel caso attuale la formula $da_{rs} = \left(\left[\begin{matrix} r\,t \\ s \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} s\,t \\ r \end{matrix} \right] \right) du^t$,

$$\bar{d}\xi_r = a_{rp} \left(d\xi^p + \left\{ \begin{matrix} s\,t \\ p \end{matrix} \right\} \xi^s\, du^t \right) = a_{rp}\, \bar{d}\xi^p, \quad \text{ove} \tag{34}$$

$$\bar{d}\xi^p = d\xi^p + \left\{ \begin{matrix} s\,t \\ p \end{matrix} \right\} \xi^s\, du^t. \tag{35}$$

Non presenta difficoltà il dimostrare che le $\bar{d}\xi_r$, quando s'intendano date le du^t, sono le componenti covarianti, nel sistema u^r, di un vettore di V_{n-q}: onde segue anche, per le (34), che le $\bar{d}\xi^p$ formano un sistema di componenti controvarianti dello stesso vettore. Ad es. introducendo la con-

siderazione dell'ambiente euclideo R_N, si possono ottenere assai agevolmente le (33) e (35), quali espressioni delle componenti covarianti e controvarianti del vettore $\bar{d}\xi$, *componente tangenziale alla* V_{n-q} *del differenziale* $d\xi$ *calcolato in* R_N. Le quantità $\bar{d}\xi^r$ definite dalle (35), se anche si suppone che in esse le ξ^r descrivano tutte le possibili componenti controvarianti di ξ, e le $\left\{ \begin{matrix} s\ t \\ p \end{matrix} \right\}$, tutte le possibili determinazioni dei simboli di Christoffel di 2ª specie, *non descrivono in generale tutte le possibili componenti controvarianti di* $\bar{d}\xi$: ma ciò non porta alcun inconveniente. Diremo $\bar{d}\xi$ *differenziale assoluto*, o *cogrediente*, di ξ in V_n, secondo l'elemento lineare du^r. È da notarsi però che senza una opportuna (e del resto naturale) restrizione circa il campo vettoriale ξ, $\bar{d}\xi$ non risulta indipendente dalla particolare determinazione delle du^r, componenti controvarianti dell'elemento dP di V_{n-q}. La restrizione che porremo è questa: che ξ sia un campo *univoco* di vettori di V_{n-q}, ossia che la funzione vettoriale $\xi(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ acquisti *lo stesso valore* per tutti i sistemi di valori delle $u^1, u^2, \cdots, u^n$ che corrispondono allo stesso punto geometrico di V_{n-q}. Ciò equivale a supporre che il differenziale ordinario $d\xi$, calcolato in R_N, *risulti nullo se calcolato in una pseudodirezione*, cioè, $\frac{\partial \xi}{\partial u^r}\omega^r = 0$, ω^r essendo un qualunque sistema di soluzioni delle (2). Sotto questa condizione anche $\bar{d}\xi$ risulterà nullo in ogni pseudodirezione, e quindi, calcolato secondo un elemento lineare dP, avrà un valore indipendente dalla scelta delle componenti du^r di questo.

Se $\xi(s)$ è un vettore non nullo funzione (univoca) del punto variabile su di una linea γ di V_{n-q}, l'annullarsi di $\bar{d}\xi$ o delle componenti $\bar{d}\xi_r$ lungo γ è condizione necessaria e sufficiente perchè ξ vari lungo γ *per equipollenza di Levi-Civita* relativa a V_{n-q}: l'annullarsi delle $\bar{d}\xi^r$ è (se $q > 0$) condizione *sempre sufficiente*, ma *non necessaria*.

8. È ovvio il passaggio dal *differenziale assoluto* alla *derivata covariante* di un vettore: tensore del 2° ordine $\nabla\xi$ definito dalla relazione

$$(36) \qquad \bar{d}\xi = \nabla_r \xi \cdot du^r \qquad \text{cioè} \qquad \bar{d}\xi_s = \nabla_r \xi_s \cdot du^r, \; \bar{d}\xi^s = \nabla_r \xi^s \cdot du^r .$$

Allora e allora soltanto che $\xi(u^r)$ è un campo *univoco* di vettori di V_{n-q} il sistema $\nabla_r \xi_s$ è un effettivo tensore di V_{n-q}; infatti essendo certamente $\nabla_r \xi_s \cdot \underset{a}{\omega^s} = 0$, condizione perchè $\nabla_r \xi_s$ sia un tensore di V_{n-q} è che si abbia

$$(37) \qquad \nabla_r \xi_s \cdot \underset{a}{\omega^r} = \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial u^r} - \frac{\partial \xi_r}{\partial u^s} \right) \underset{a}{\omega^r} = 0 ;$$

ora questa condizione esprime che $\bar{d}\xi$ calcolato nelle pseudodirezioni $\underset{a}{\omega^r}$ (e quindi anche in qualunque altra pseudodirezione) è nullo.

9. Stabilite pei *vettori* le nozioni di differenziale assoluto e di derivata covariante, non presenta difficoltà estenderle a *tensori* qualunque di V_{n-q}. Le stesse definizioni che si dànno pel caso $q = 0$ (del calcolo di Ricci) conservano il loro significato, e si mantengono anche inalterate tutte le ben note proprietà formali di quelle operazioni. Va soltanto tenuto presente che la derivata covariante di un tensore di V_{n-q} è un nuovo tensore di V_{n-q} soltanto se il tensore primitivo è funzione *univoca* del punto variabile su V_{n-q}: e che per l'annullarsi di un tensore è soltanto condizione sufficiente, non necessaria, l'annullarsi di un dato sistema di sue componenti con almeno un indice di controvarianza.

La commutazione dei differenziali secondi assoluti dà luogo, come nel caso $q = 0$, al presentarsi del tensore di curvatura $R^{\cdots v}_{rst}$: si ha ad es.

$$(38) \qquad (\bar{d}_1 \bar{d}_2 - \bar{d}_2 \bar{d}_1)\, \xi^v = R^{\cdots v}_{rst}\, d_1 u^r\, d_2 u^s\, \xi^t, \qquad \text{con}$$

$$(39) \qquad R^{\cdots v}_{rst} : \frac{\partial}{\partial u^s} \left\{ \begin{matrix} t\,r \\ v \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^r} \left\{ \begin{matrix} t\,s \\ v \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} t\,r \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p\,s \\ v \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} t\,s \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p\,r \\ v \end{matrix} \right\}.$$

Si può anche intendere qui che i differenziali assoluti $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ siano calcolati con due diversi sistemi, arbitrariamente presi, di valori delle $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$: ad ogni modo le $R^{\cdots v}_{rst}$ risultano $\binom{1}{3}$-componenti di un ben determinato tensore, e da esse si ricavano subito le componenti totalmente covarianti R_{rstv}, le quali a differenza delle $R^{\cdots v}_{rst}$ sono *completamente determinate* dalla data forma (1).

Concludendo: l'estensione riesce in modo completo, conservando tutte le più notevoli caratteristiche del calcolo di Ricci.

Matematica (Analisi). — *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali.* Nota I di MARIA CIBRARIO, presentata [1] dal Corrisp. G. FUBINI.

Il prof. Picone [2] e il suo allievo prof. Colucci [3] si sono occupati di teoremi di esistenza *in grande* relativi alle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali di primo e secondo ordine. Nella presente Nota e in una successiva ho cercato di portare un piccolo contributo a tale ordine di ricerche e di generalizzare alcuni di tali teoremi.

§ 1. Sia data una equazione differenziale:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

dove $M(x,y)$, $N(x,y)$ sono funzioni finite e continue di x, y in un dominio D semplicemente connesso [4], soddisfano le condizioni di Lipschitz rispetto a x e a y e non si annullano contemporaneamente (la (1) cioè non possiede punti singolari). Scritta la (1) nella forma:

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} = M(x,y) \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = N(x,y),$$

con ripetute applicazioni del teorema di esistenza si segue il cammino di una curva integrale σ, uscente da un punto x_0, y_0 corrispondente al valore $t = 0$ e interno a D sia nel senso delle t crescenti che in quello delle t descrescenti. Dai teoremi del Bendixson [5] segue:

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, « Ann. di Mat. », S. IV, t. VII (1929–1930).

(3) A. COLUCCI, (*A*) *Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti*, « Atti della R. Acc. delle Scienze », Torino 1929 (vol. LXIV), e (*B*) *Trattazione in grande del problema di Cauchy per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine a caratteristiche reali e distinte*, « Math. Ann. », B. 104, H. 1 (1930).

(4) Il contorno di D può anche non essere tutto a distanza finita, purchè D sia semplicemente connesso, escludendo che D sia formato dai punti esterni a una curva chiusa.

(5) BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, « Acta Math. », t. 24 (1901).

T. I. « Se A è un'area finita interna [1] a D, nessuna curva integrale può stare tutta in A ».

Le equazioni parametriche di σ siano:

$$(3) \qquad x = f(t; x_0, y_0) \quad , \quad y = g(t; x_0, y_0),$$

dove f e g sono definite per x_0, y_0 interno a D e per $T_1 < t < T_2$ (dove $T_1 < 0$, $T_2 > 0$; T_1 e T_2 sono funzioni di x_0, y_0 e possono anche valere $-\infty$ e $+\infty$ rispettivamente).

T. II. « Se $M(x, y)$, $N(x, y)$ [2] in tutto D sono funzioni D^1 [3] le $f(t; x_0, y_0)$, $g(t; x_0, y_0)$ hanno derivate parziali prime rispetto a x_0 e a y_0 che sono funzioni continue di t, x_0, y_0, comunque si prenda x_0, y_0 in D e per ogni t per cui sia $T_1 < t < T_2$; f_{x_0} , g_{x_0} e f_{y_0} , g_{y_0} sono integrali del sistema:

$$(4) \quad \frac{dU}{dt} = N_x(x, y)\, U + N_y(x, y)\, V \quad ; \quad \frac{dV}{dt} = M_x(x, y)\, U + M_y(x, y)\, V$$

(dove per x, y si pongano f, g), che per $t = 0$ si riducono a 1 e 0 e a 0 e 1 rispettivamente ». Se $\bar{x}, \bar{y}$ è un punto interno a D è noto [4] che si possono determinare tre numeri reali positivi h, k, t_1 tali che per $|x_0 - \bar{x}| \leq h$, $|y_0 - \bar{y}| \leq k$, $|t| < t_1$ valga il teorema; ripetendo più volte il procedimento si dimostra il teorema per ogni $t\,(T_1 < t < T_2)$ [5].

Le curve integrali della (1) non possono avere in D punti doppi [6]. Sia data in D una curva γ priva di punti doppi: $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ $(u_1 \leq u \leq u_2)$, dove φ e ψ siano funzioni D^1 e φ', ψ' non si annullino contemporaneamente; si dimostra che, se una curva integrale incontra γ senza attraversarla le è tangente. In queste ipotesi:

T. III « Condizione sufficiente perchè γ non sia incontrata in più di un punto dalle curve integrali della (1) è che lungo γ sia:

$$(5) \qquad N[\varphi(u), \psi(u)]\, \psi'(u) - M[\varphi(u), \psi(u)]\, \varphi'(u) \neq 0$$

cioè che γ non sia tangente ad alcuna curva integrale della (1) ». Se esiste una curva integrale β, che incontra γ in due punti A e B, corrispondenti

(1) È escluso che A contenga punti del contorno di D.

(2) Se M ed N sono continue e soddisfano la condizione di Lipschitz si può provare solo che f e g sono funzioni continue di x_0, y_0.

(3) Con funzioni D^n sono indicate le funzioni continue con tutte le loro derivate continue fino a quelle dell'ordine n incluse.

(4) Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, pp. 7–10.

(5) Se in tutto D $N(x, y) \neq 0$, per il T. I basta che $H(x, y) = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ sia funzione finita e continua di x, y e soddisfi la condizione di Lipschitz rispetto a y, e per il T. II che inoltre sia finita e continua $H_y(x, y)$.

(6) Per cui passerebbero due rami della curva, contro il teorema di unicità.

ai valori $u = v_0$ e $u = w_0$, la curva integrale β_1 uscente dal punto di γ $u = (v_0 + w_0)/2 = v_1$ deve uscire dall'area compresa tra β e γ, e, poichè non può incontrare β, incontra γ in un secondo punto $u = w_1$. La curva integrale, uscente dal punto $u = (v_1 + w_1)/2 = v_2$ di γ, incontra γ in un secondo punto $u = w_2$, e così di seguito. Allora considerando le due intersezioni P_i e R_i di ognuna di queste curve integrali con γ, e mettendo nella classe P_i quella delle due intersezioni che corrisponde a un valore più piccolo di u si ottengono due classi contigue di valori del parametro; esiste dunque un valore $u = \bar{u}$, a cui corrisponde un punto L di γ, che divide i punti P_i dai punti R_i. La curva integrale α per L non può attraversare γ, perchè altrimenti α incontrerebbe γ in un secondo punto M, di parametro $u' > \bar{u}$, p. es.; allora tra L ed M vi sarebbero per ipotesi infiniti punti R_i, e le curve integrali uscenti da essi, non potendo attraversare α incontrerebbero γ in punti P_i, compresi tra L ed M, e questo è assurdo (se $u' < \bar{u}$, il ragionamento è analogo). Dunque α e γ risultano tangenti nel punto L contro ipotesi.

T. IV. « Nelle ipotesi dei T. II e III nel dominio C ricoperto dalle caratteristiche per i punti di γ, t e u sono funzioni D^I di x e y. Se $\varphi(u)$ e $\psi(u)$ e M e N in D sono funzioni D^{III} [1], in C l'equazione delle curve integrali della (1) si può scrivere $\Phi(x, y) = u$, dove $\Phi(x, y)$ è funzione D^{III} » [2].

Le equazioni delle caratteristiche per i punti di γ siano:

$$x = f(t, u) \quad , \quad y = g(t, u), \tag{6}$$

dove f, g sono definite nel dominio δ: $u_1 \leq u \leq u_2$, $T_1 < t < T_2$ (T_1 e T_2 sono funzioni di u) e per $t = 0$ si riducono a $\varphi(u)$ e $\psi(u)$; f e g hanno derivate rispetto a t per ipotesi e rispetto a u per il T. II; f_u , g_u sono integrali delle (4) (in cui si pongano f, g invece di x, y) che per $t = 0$ si riducono a $\varphi'(u)$, $\psi'(u)$ [3]. Anche $N(f, g)$, $M(f, g)$ sono integrali delle (4), che per $t = 0$ si riducono a $N(\varphi, \psi)$, $M(\varphi, \psi)$; indicando con $F(u)$ il primo membro della (5) e applicando al sistema (4) un noto teorema [4] si ha:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, u)} = N(f, g)\, g_u - M(f, g)\, f_u = F(u)\, e^{-\int_0^t [N_x(f, g) + M_y(f, g)]\, dt} \neq 0 \tag{7}$$

in tutto δ.

(1) Bastano l'esistenza e la continuità delle N_{xxx} , N_{xxy} , N_{xyy} , M_{xyy} , M_{xxy} , M_{yyy} e che φ, ψ siano funzioni D^{III}.

(2) Se in tutto D $N(x, y) \neq 0$, basta che $\frac{M}{N} = H(x, y)$ abbia derivate seconde continue e che sia finita e continua H_{yyy}.

(3) Poichè $x_0 = \varphi(u)$, $y_0 = \psi(u)$, è $f_u = f_{x_0}\varphi' + f_{y_0}\psi'$; $g_u = g_{x_0}\varphi' + g_{y_0}\psi'$.

(4) Goursat, *Cours d'Analyse*, T. II, p. 479.

Ad ogni coppia t, u di δ corrisponde un punto x, y di C e ad ogni punto x, y di C corrisponde una coppia t, u di δ, perchè la curva integrale α per il punto x, y incontra γ [1] in un punto P, a cui corrisponde un valore u, e preso P come corrispondente a $t = 0$ su α è determinato il valore di t nel punto x, y. Per la (7) dalle (6) si possono ricavare $t = t(x, y)$, $u = u(x, y)$ come funzioni di x, y continue colle derivate prime, definite in C. Per le ipotesi fatte esistono f_u, g_u, f_{tu}, g_{tu}; se M ed N, φ, ψ sono funzioni D^{II} esistono f_{uu}, g_{uu} [2], e le funzioni inverse $t(x, y)$, $u(x, y)$ hanno in C derivate parziali seconde continue. Se φ, ψ; M, N sono funzioni D^{III} calcolate u_x, u_y l'ultima parte del teorema segue da un facile calcolo.

§ 2. Sia data l'equazione:

$$(1) \qquad a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z),$$

dove $a(x, y)$, $b(x, y)$ siano funzioni D^{I} in un dominio D semplicemente connesso, e non si annullino contemporaneamente; $c(x, y, z)$ sia funzione D^{I} definita per x, y in D e per ogni valore di z [1]. Sia un arco di curva γ: $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $(u_1 \leq u \leq u_2)$, posto in D, privo di punti doppi; φ, ψ siano funzioni D^{I} e tali che:

$$(2) \qquad b[\varphi(u), \psi(u)]\varphi'(u) - a[\varphi(u), \psi(u)]\psi'(u) \neq 0.$$

Per il T. III del § 1 γ è incontrata in un punto al più dalle caratteristiche della (1), integrali della:

$$(3) \qquad \frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} = dt.$$

In queste ipotesi « In tutto il dominio C ricoperto dalle caratteristiche per i punti di γ, è definita una ad una sola funzione D^{I} $z = z(x, y)$, che soddisfa la (1) e per $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ si riduce ad una funzione D^{I} data $\chi(u)$ ».

Gli integrali delle (3) che per $t = 0$ si riducono a $\varphi(u)$, $\psi(u)$ siano:

$$(4) \qquad x = f(t, u), \quad y = g(t, u),$$

(1) Perchè C è il dominio ricoperto dalle curve integrali per i punti di γ.

(2) f_u, g_u sono integrali delle (4), il cui secondo membro è in questo caso funzione derivabile di u, per $t = 0$ si riducono a $\varphi'(u)$, $\psi'(u)$, pure funzioni derivabili di u, e quindi (Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, pp. 7–13) hanno derivate parziali rispetto ad u.

(3) Se in tutto D $a(x, y) \neq 0$, basta che $\frac{b}{a} = m$, $-\frac{c}{a} = n$ soddisfino le ipotesi enunciate; anzi basta l'esistenza di m_y, n_y, n_z.

definite nel dominio $\delta u_1 \leq u \leq u_2$, $T_1 < t < T_2$ e funzioni D^I (v. § 1). La (1) diviene in δ:

$$\frac{dz}{dt} = c\,[f(t,u)\,,\, g(t,u)\,,\, z]\,, \tag{5}$$

dove il secondo membro è funzione D^I definita, per ogni valore z e per t, u in δ; esiste una e una sola funzione D^I:

$$z = h(t,u)\,^{(1)}, \tag{6}$$

che soddisfa la (5) e per $t = 0$ si riduce a $\chi(u)$. Ricavando dalle (4), secondo il T. IV del § 1, t e u come funzioni D^I di x, y definite in C, e sostituendo nella (6) si ha

$$z = z(x,y) \tag{6'}$$

come funzione D^I definita in C; la funzione $z(x,y)$, che soddisfa la (1) e per $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ si riduce a $\chi(u)$, è certo unica. Dal ragionamento fatto segue la necessità che γ non sia una caratteristica e non sia incontrata in più di un punto da una caratteristica, perchè su γ si possano dare ad arbitrio i valori di z.

Se esistono in D due archi di curve γ_1 e γ_2 cogli stessi estremi di γ, senza altri punti comuni tra loro o con γ, da parti opposte rispetto a γ, incontrati in non più di un punto dalle caratteristiche della (1), il dominio $\bar{C}$ limitato da γ_1 e γ_2 è compreso in C, perchè la caratteristica per un punto compreso, p. es. tra γ e γ_1, esce da $\bar{C}$, per il T. I del § 1, e, non potendo incontrare γ o γ_1 in due punti, le incontra in un punto ciascuna; la (6') definisce l'integrale in tutto $\bar{C}$.

Nel caso di una equazione lineare anche in z:

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)\,z = m(x,y) \tag{7}$$

posto $\bar{c}(t,u) = c\,[f(t,u)\,,\, g(t,u)]$; $\bar{m}(t,u) = m\,[f(t,u)\,,\, g(t,u)]$, la (6) assume la forma:

$$z = e^{-\int_0^t \bar{c}(\tau,u)\,d\tau}\left[\chi(u) + \int_0^t \bar{m}(\tau,u)\,e^{\int_0^\tau \bar{c}(v,u)\,dv}\,d\tau\right]. \tag{7'}$$

(1) h_t, h_u esistono e sono continue, la prima per ipotesi e la seconda, perchè u compare sia nel valore iniziale $\chi(u)$ funzione derivabile di u, sia nel secondo membro della (5), che pure ha derivata rispetto a u.

Il Picone [1], supposto che in un rettangolo R ($x' \leq x \leq x''$, $y' \leq y \leq y''$) sia $b(x,y) > 0$, $a(x,y) \geq 0$ ($a(x,y) \leq 0$) e che Σ sia una curva di R terminata ai punti x', y'' e x'', y' (x', y' e x'', y'') dimostra che « una soluzione in R della (7) è completamente determinata, quando se ne assegnino i valori su Σ », e questo segue dal teorema precedente: R è coperto dalle caratteristiche per i punti di Σ ed è un dominio del tipo indicato con $\bar{C}$; l'integrazione della (7) in R è fatta dal Colucci [2], le cui formule seguono dalla (7'). Il bel teorema del Picone [3]: « Se in R è $c(x,y) < 0$ [$c(x,y) > 0$], $m(x,y) = 0$, $a(x',y) \geq 0$; $a(x'',y) \leq 0$; $b(x,y') \geq 0$; $b(x,y'') \leq 0$, [$a(x',y) \leq 0$; $a(x'',y) \geq 0$; $b(x,y') \leq 0$, $b(x,y'') \geq 0$], l'unica soluzione limitata in R della (7) è lo zero », si può dimostrare anche col metodo delle caratteristiche. Definite in tutto il piano due funzioni $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, finite e continue, coincidenti in R colle $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, e soddisfacenti la condizione di Lipschitz rispetto a x e a y [4], le caratteristiche della (7) sono le parti contenute in R delle curve integrali delle:

$$\frac{dx}{\alpha(x,y)} = \frac{dy}{\beta(x,y)} = dt .$$

Sia una caratteristica C: $x = x(t)$, $y = y(t)$ per un punto x_0, y_0 di R, in cui sia $z = z_0 \neq 0$; $x(t), y(t)$ sono definite per ogni valore di t e per $t = 0$ si riducono a x_0, y_0. Supposto $c(x,y) < 0$ [5], è $\gamma(t) = -c[x(t), y(t)] > 0$; la semicaratteristica di C, corrispondente a $t > 0$ non può attraversare il contorno di R [6], e per t tendente a $+\infty$, C è tutta contenuta in R; se in R $-c(x,y) > M$ (M reale positivo), lungo C è:

$$z = z_0 e^{\int_0^t \gamma(\tau)\, d\tau} \quad ; \quad e^{\int_0^t \gamma(\tau)\, d\tau} > e^{Mt}$$

e per t tendente a $+\infty$, z non è limitata; dunque $z_0 = 0$.

(1) Loc. cit., p. 176 e sg.; ivi a, b, c, m sono supposte continue, mentre per il metodo precedente occorre l'esistenza delle derivate prime.

(2) Loc. cit., (*A*).

(3) Loc. cit., p. 173, T. XXIV.

(4) Tale condizione sia soddisfatta da $a(x,y)$, $b(x,y)$ (la dimostrazione del Picone richiede solo la continuità di a, b). Si pone, p. es., $\alpha(x',y) = a(x',y')$ per $y < y'$; $\alpha(x',y) = a(x',y'')$ per $y > y''$; $\alpha(x,y) = \alpha(x',y)$ per $x < x'$, e analogamente si definiscono α e β in tutto il piano.

(5) L'altro caso si riduce a questo, cambiando segno a tutta l'equazione.

(6) Se, p. es., C attraversa il lato $x = x'$ di R per $t = t'$, per $t' < t \leq t' + h$ è $x < x'$; per $x < x'$, $\alpha(x,y) = \alpha(x',y)$ e $x - x' = \alpha(x',y)(t - t')$; poichè $\alpha(x',y) \geq 0$, non può essere $x < x'$ per $t > t'$.

Matematica. — *Una generalizzazione del calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata.* Nota di Enea Bortolotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'espressione del lavoro negli spazi generalizzati.* Nota di A. Cabras, presentata dal Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Parallelismo negli spazi funzionali continui.* Nota di F. Conforto, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio.* Nota di Enrico Volterra, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

È ben nota quale stretta analogia passi tra i metodi della teoria dell'elasticità e quelli della teoria del potenziale: così il teorema di reciprocità del Betti è il corrispondente del lemma di Green, le formule del Somigliana sono le corrispondenti del teorema di Green; in alcuni casi particolari [2] si è anche riusciti ad estendere alla risoluzione di problemi elastici il metodo delle immagini del Thomson così largamente impiegato in elettrostatica.

Volendosi proporre lo studio dell'influenza esercitata in un mezzo elastico dall'inclusione di più nuclei rigidi, giova riconoscere anzitutto come tale problema abbia per analogo in elettromagnetismo quello di corpi conduttori immersi in un coibente o nel vuoto, ove il conduttore corrisponde al corpo rigido ed il coibente al corpo elastico. Allora al potenziale costante sulla superficie dei conduttori corrispondono sulle superficie dei corpi rigidi spostamenti *rigidi* e discende, come diretta conseguenza del teorema di reciprocità del Betti, un teorema generale analogo a quello fondamentale di induzione elettrostatica [3].

(1) Nella seduta del 21 dicembre 1930.

(2) Vedi C. Somigliana, *Sul principio delle immagini di Lord Kelwin e le equazioni della elasticità*, « Rend. Acc. Lincei », XI, 1° sem., 1902; « N. Cimento », 1902. Id., *Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni dell'elasticità*, « Rend. Acc. Lincei », 1° sem., 1904; Id, *Sulle discontinuità dei potenziali elastici* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », V, 51, 1916).

(3) Vedi E. Volterra, *Sull'influenza di più nuclei rigidi immersi in un mezzo elastico*, « Rendiconti Acc. Lincei, 1° sem., 1930.

Il problema viene risolto in elettromagnetismo mediante la teoria del Poisson, estesa dal Mossotti per dielettrici la cui ipotesi fondamentale, è che i vari corpi conduttori modifichino il campo, ciascuno indipendentemente dagli altri.

Le formule alle quali si arriva, esprimenti le azioni dei corpi conduttori su punti del coibente o del vuoto sono date sotto forma di integrali estesi allo spazio occupato dai corpi conduttori ed alla superficie che limita tale spazio.

Estendendo tali ipotesi e tale procedimento nel campo dell'elasticità è possibile passare dallo studio dell'influenza di una sola sferetta rigida a quello di infinite sferette distribuite con densità variabile nel mezzo elastico ed arrivare a formule analoghe a quelle del caso corrispondente nel campo elettrico.

Non sarà superfluo avvertire che nella nostra soluzione si suppone che si annullino all'infinito le componenti dello spostamento elementare dovuto alla presenza di una generica sfera. Tale specificazione è però perfettamente giustificabile nel nostro caso, ove si tratta di sferette piccolissime, e si può in conformità assimilare all'infinito il contorno del corpo elastico.

1. – Influenza dell'inclusione di una sfera rigida in un mezzo elastico deformato omogeneamente.

Si abbia in un mezzo elastico isotropo, indefinito, soggetto ad una deformazione omogenea, immersa una sfera rigida al cui contorno aderisca il mezzo elastico che si estende esternamente ad essa fino a distanza infinita.

Voglio studiare come viene modificata la deformazione omogenea del mezzo per la inclusione di tale sfera rigida.

Intanto ciascuna particella elastica del mezzo subirà una rotazione, una traslazione ed una pura deformazione.

La sfera invece subirà anch'essa una rotazione e una traslazione, ma per la sua rigidità sarà esente da deformazione.

Essendo omogenea la preesistente deformazione del mezzo le componenti u, v, w, dello spostamento saranno funzioni lineari delle coordinate (cartesiane) $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$, e si avrà:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ove $\Phi = \frac{1}{2} \sum_1^3 a_{ij} x_i x_j$ essendo costanti le $a_{ij} = a_{ji}$.

Non subendo la sfera per effetto della sua rigidezza nessuna deformazione si originerà nel mezzo una nuova coazione elastica le componenti del cui spostamento $u_1 ; v_1 ; w_1$ sulla superficie della sfera saranno eguali e contrarie a quelle dell'originaria deformazione, cosicche sarà sulla superficie della sfera

$$u_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$w_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Col metodo dell'Almansi [1] possiamo ora passare dai valori conosciuti di $u_1 ; v_1 ; w_1$ sulla superficie della sfera a quelli in un punto, qualsiasi del mezzo.

Poniamo infatti:

$$u_1 = (R^2 - r^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda$$

$$v_1 = (R^2 - r^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu$$

$$w_1 = (R^2 - r^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu .$$

Ove R rappresenti il raggio della sfera, r la distanza del punto generico nel quale si vogliono determinare le u_1 , v_1 , w_1 dal centro della sfera, λ , μ , ν e φ sono funzioni armoniche *a priori* incognite da determinare.

Le tre funzioni armoniche λ , μ e ν dovendo assumere sulla superficie della sfera i valori:

$$u_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad w_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

risultano così espresse nei punti esterni da

$$\lambda = R^3\left(a_{11}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) \quad ; \quad \mu = R^3\left(a_{21}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right);$$

$$\nu = R^3\left(a_{31}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)$$

(1) Vedi E. Almansi, *Sulla deformazione della sfera elastica*, « Accademia Reale delle Scienze di Torino », 1897.

e la φ da:

$$\varphi = -\frac{Km R^3}{2(m-3)r^3}\left[a_{11}\left(\frac{3x^2}{r^2}-1\right)+a_{22}\left(\frac{3y^2}{r^2}-1\right)+a_{33}\left(\frac{3z^2}{r^2}-1\right)+\right.$$
$$\left.+6a_{12}\frac{xy}{r^2}+6a_{13}\frac{xz}{r^2}+6a_{23}\frac{yz}{r^2}\right].$$

Otteniamo così per le tre componenti dello spostamento i valori:

$$(1)\quad \begin{cases} u_1 = R^3\left(a_{11}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+a_{12}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+a_{13}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)- \\ -(R^2-r^2)\dfrac{3Km R^3}{2(m-3)r^4}\left[\left\{a_{11}\left(\dfrac{5x^2}{r^2}-3\right)+a_{22}\left(\dfrac{5y^2}{r^2}-1\right)+a_{33}\left(\dfrac{5z^2}{r^2}-1\right)+\right.\right. \\ \left.\left.+10a_{12}\dfrac{xy}{r^2}+10a_{13}\dfrac{xz}{r^2}+10a_{23}\dfrac{yz}{r^2}\right\}\dfrac{\partial r}{\partial x}-2a_{12}\dfrac{\partial r}{\partial y}-2a_{13}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right] \\ v_1 = R^3\left(a_{21}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+a_{22}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+a_{23}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)- \\ -(R^2-r^2)\dfrac{3Km R^3}{2(m-3)r^4}\left[-2a_{21}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\left\{a_{11}\left(\dfrac{5x^2}{r^2}-1\right)+a_{22}\left(\dfrac{5y^2}{r^2}-3\right)+\right.\right. \\ \left.\left.+a_{33}\left(\dfrac{5z^2}{r^2}-1\right)+10a_{23}\dfrac{yz}{r^2}+10a_{21}\dfrac{yx}{r^2}+10a_{31}\dfrac{zx}{r^2}\right\}\dfrac{\partial r}{\partial y}-2a_{23}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right] \\ w_1 = R^3\left(a_{31}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+a_{32}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+a_{33}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)- \\ -(R^2-r^2)\dfrac{3Km R^3}{2(m-3)r^4}\left[-2a_{31}\dfrac{\partial r}{\partial x}-2a_{32}\dfrac{\partial r}{\partial y}+\left\{a_{11}\left(\dfrac{5x^2}{r^2}-1\right)+\right.\right. \\ \left.\left.+a_{22}\left(\dfrac{5y^2}{r^2}-1\right)+a_{33}\left(\dfrac{5z^2}{r^2}-3\right)+10a_{31}\dfrac{xz}{r^2}+10a_{32}\dfrac{yz}{r^2}+10a_{12}\dfrac{xy}{r^2}\right\}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right]. \end{cases}$$

2. – Caso di più sfere immerse con densità comunque variabile nel mezzo.

Consideriamo nel mezzo elastico un prisma dv, con gli spigoli paralleli agli assi coordinati x, y, z, in cui siano immerse n sferette rigide piccolissime. Supponendo al solito che il prisma pur potendosi trattare come infinitesimo contenga tuttavia un grande numero di sferette di raggio R,

indicheremo col nome di densità ρ nel punto ξ', η', ζ' baricentro del prismetto, la quantità definita dalla

$$\rho = \frac{4/3\,\pi R^3\, n}{dv}.$$

Volendo determinare l'azione esercitata dalle sferette contenute in tale prismetto sul punto generico del mezzo ξ'', η'', ζ'' per effetto della loro rigidezza, sommeremo le varie u_1, v_1, w_1 dateci dalle (1) relative alle n sferette contenute nel prismetto. Alle $r_1, r_2, \cdots, r_n$ esprimenti le varie distanze dei centri di tali sferette dal punto generico potremo sostituire la distanza r del baricentro del prismetto e, data la piccolezza del raggio R della sfera di fronte alla distanza r del punto generico, alla quantità $R^2 - r^2$ la quantità $-r^2$.

Le formule (1) diverranno perciò:

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{3\rho dv}{4\pi}\left(a_{11}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + a_{13}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) + \\ + \dfrac{9\rho K m\, dv}{8\pi(m-3)r^2}\left[\left\{a_{11}\left(\dfrac{5x^2}{r^2}-3\right) + a_{22}\left(\dfrac{5y^2}{r^2}-1\right) + a_{33}\left(\dfrac{5z^2}{r^2}-1\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + 10\,a_{12}\dfrac{xy}{r^2} + 10\,a_{13}\dfrac{xz}{r^2} + 10\,a_{23}\dfrac{yz}{r^2}\right\}\dfrac{\partial r}{\partial x} - 2\,a_{12}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 2\,a_{13}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right] \\ \\ v_1 = \dfrac{3\rho dv}{4\pi}\left(a_{21}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + a_{23}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) + \\ + \dfrac{9\rho K m\, dv}{8\pi(m-3)r^2}\left[-2\,a_{12}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \left\{a_{22}\left(\dfrac{5y^2}{r^2}-3\right) + a_{33}\left(\dfrac{5z^2}{r^2}-1\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + a_{11}\left(\dfrac{5x^2}{r^2}-1\right) + 10\,a_{23}\dfrac{yz}{r^2} + 10\,a_{21}\dfrac{xy}{r^2} + 10\,a_{31}\dfrac{xz}{r^2}\right\}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 2\,a_{23}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right] \\ \\ w_1 = \dfrac{3\rho dv}{4\pi}\left(a_{31}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + a_{32}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + a_{33}\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) + \\ + \dfrac{9\rho K m\, dv}{8\pi(m-3)r^2}\left[-2\,a_{31}\dfrac{\partial r}{\partial x} - 2\,a_{32}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \left\{a_{33}\left(\dfrac{5z^2}{r^2}-3\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + a_{11}\left(\dfrac{5x^2}{r^2}-1\right) + a_{22}\left(\dfrac{5y^2}{r^2}-1\right) + 10\,a_{31}\dfrac{xz}{r^2} + 10\,a_{32}\dfrac{yz}{r^2} + 10\,a_{12}\dfrac{xy}{r^2}\right\}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right] \end{cases}$$

ove per x y e z ed r s'intende rispettivamente

$$x = \xi' - \xi'' \qquad y = \eta' - \eta'' \qquad z = \zeta' - \zeta'' \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Volendo ora studiare il problema della deformazione di un mezzo elastico omogeneamente deformato e soggetto all'azione di sferette rigide distribuite con densità ρ variabile ammetteremo col Poisson, nell'analoga teoria del magnetismo che le azioni mutue delle varie sferette siano trascurabili e terremo conto delle varie sferette sovrapponendone gli spostamenti elastici.

Indicando con V il volume del mezzo elastico in cui si immaginano immerse le sferette rigide con densità $\rho = \rho(x, y, z)$ avremo dalle formule (2)

$$u_1 = \int_v \frac{3\rho\, dv}{4\pi}\left(a_{11}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) +$$

$$+ \int_v \frac{9\rho K m\, dv}{8\pi(m-3)r^2}\left[\left\{a_{11}\left(\frac{5x^2}{r^2}-3\right) + a_{22}\left(\frac{5y^2}{r^2}-1\right)a_{33}\left(\frac{5z^2}{r^2}-1\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 10\,a_{12}\frac{xy}{r^2} + 10\,a_{13}\frac{xz}{r^2} + 10\,a_{23}\frac{yz}{r^2}\right\}\frac{\partial r}{\partial x} - 2\,a_{12}\frac{\partial r}{\partial y} - 2\,a_{13}\frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

e analogamente per $v_1\, w_1$. Integrando per parti si avrà:

$$u_1 = \frac{3}{4\pi}\left\{\iint\frac{\rho}{r}(a_{11}\,dy\,dz + a_{12}\,dx\,dz + a_{13}\,dx\,dy) - \right.$$

$$\left. - \iiint\frac{dx\,dy\,dz}{r}\left(a_{11}\frac{\partial\rho}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial\rho}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{9\,Km}{8\pi(m-3)}\left[\iint\frac{\rho}{r}\left\{\left[a_{11}\left(\frac{5x^2}{r^2}-3\right) + a_{22}\left(\frac{5y^2}{r^2}-1\right)a_{33}\left(\frac{5z^2}{r^2}-1\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 10\,a_{12}\frac{xy}{r^2} + 10\,a_{13}\frac{xz}{r^2} + 10\,a_{23}\frac{yz}{r^2}\right]dy\,dz - 2\,a_{12}\,dx\,dz - 2\,a_{13}\,dx\,dy\right\}\right] -$$

$$- \iiint\frac{dx\,dy\,dz}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho}{r^2}\left\{a_{11}\left(\frac{5x^2}{r^2}-3\right) + a_{22}\left(\frac{5y^2}{r^2}-1\right) + a_{33}\left(\frac{5z^2}{r^2}-1\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 10\,a_{12}\frac{xy}{r^2} + 10\,a_{13}\frac{xz}{r^2} + 10\,a_{23}\frac{yz}{r^2}\right\} - 2\,a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho}{r^2}\right) - 2\,a_{13}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r^2}\right)\right.\right.$$

Ed analogamente per v_1 e w_1.

È dunque possibile scomporre le componenti dello spostamento in due termini, di cui uno va riferito alla superficie che limita lo spazio occupato dalle sferette e l'altro al volume stesso. Il poter studiare la perturbazione prodotta da più nuclei sferici rigidi in un mezzo elastico in equilibrio ha speciale interesse nelle applicazioni, nei problemi che si riferiscono ai mezzi non omogenei usati nelle moderne costruzioni. Lo scopo che mi sono proposto colla presente nota è appunto di esporre brevemente come tale argomento si presti a venir trattato in maniera analoga a quella del Poisson per l'elettromagnetismo.

Meccanica. — *Sopra i sistemi anolonomi a legami dipendenti dal tempo.* Nota di G. Vranceanu, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota, pubblicata pochi anni or sono in questi « Rendiconti » [2], ho fatto vedere come si può arrivare ad una forma, molto espressiva, delle equazioni del moto di un sistema materiale anolonomo a legami indipendenti dal tempo, se si fa uso dalla nozione geometrica di *varietà anolonoma* [3] rappresentativa del sistema materiale anolonomo. Con l'aiuto di queste equazioni del moto, ho messo in rilievo *il principio della direttissima* di Hertz, che dice che le traiettorie spontanee del sistema sono le curve più dirette consentite dai vincoli, queste traiettorie essendo nello stesso tempo *le geodetiche della varietà anolonoma rappresentativa*, e ho esteso [4], anche ai sistemi anolonomi, l'importante teorema di Poincaré relativo alla stabilità trigonometrica dell'equilibrio.

In questa Nota considero il caso generale di un sistema anolonomo a legami dipendenti dal tempo, e faccio vedere come si puo far uso dalla rappresentazione geometrica, per dare anche in questo caso, una forma espressiva alle equazioni del moto del sistema. Come applicazione delle equazioni trovate, faccio vedere in che condizioni un sistema a legami dipendenti dal tempo, ma per cui la forza viva, le equazioni di anolonomia e il potenziale delle forze, non dipendono esplicitamente dal tempo, ammette un integrale generalizzato dell'energia, cosa che, come è ben noto, avviene sempre se il sistema è olonomo. Nel caso di un sistema anolonomo, chiameremo, come è naturale, integrale generalizzato dell'energia quell'integrale primo, se esiste, rappresentato da un polinomio di secondo grado nelle velocità, avente i termini di secondo grado, identici a quelli della forza viva del sistema, con ché questo integrale può differire da quello che si avrebbe se il sistema fosse olonomo, al massimo per una funzione di primo grado nelle velocità.

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo*, serie 6ª, vol. IV, 1926, p. 508.

(3) Vedi la mia Memoria: *Studio geometrico dei sistemi anolonomi*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo VI, 1928-29, pp. 9-43.

(4) Cfr. la mia Nota: *Sur la stabilité trigronometrique de l'équilibre dans la Dynamique*, questi « Rendiconti », serie 6ª, vol. VI, 1927, p. 474.

1. – Supponiamo di avere un sistema materiale anolonomo [1] S_n^m la cui posizione rimane individuata da n parametri $x^1, x^2, \cdots, x^n$, che soddisfano inoltre alle $n - m$ equazioni

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_{h',i}\, dx^i - \varphi_{h'}\, dt = 0 \qquad (h' = m+1, \cdots, n)$$

dove t è il tempo e le φ sono funzioni delle variabili $x^1, x^2, \cdots x^n$ e t.

Indicando con T la forza viva del sistema, la quale, come è ben noto, si deve calcolare come se i parametri $x^1, x^2, \cdots, x^n$ fossero indipendenti, possiamo scrivere

$$(2) \qquad T = T_2 + T_1 + T_0,$$

dove T_2 indica una forma quadratica definita positiva nelle velocità $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ e T_1 una forma lineare

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ij} a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \qquad , \qquad T_1 = \sum_1^n{}_{ij} a_i \dot{x}^i ,$$

i coefficienti a_{ij}, a_i, T_0 essendo, al pari delle φ, funzioni dalle variabili $x^1, x^2, \cdots, x^n, t$.

2. – La forma T_2 essendo definita e positiva, possiamo considerare la varietà riemanniana V_n, avente come metrica

$$(3) \qquad ds^2 = 2T_2\, dt^2 = \sum_1^n{}_{ij} a_{ij}\, dx^i\, dx^j .$$

Si deve solamente osservare che, se i coefficienti a_{ij} di questa metrica, dipendono esplicitamente dal tempo, si definisce in questo modo non una sola V_n, ma una famiglia dipendente dal parametro t. Tenuto conto di ciò, le equazioni di anolonomia (1), possono scriversi, con opportune combinazioni lineari delle equazioni stesse, sotto la forma

$$(1') \qquad \sum_1^n{}_i \lambda_{h'|i}\, dx^i = e_{h'}\, dt \qquad (h' = m+1, \cdots, n)$$

dove le quantità $\lambda_{h'|i}$ sono i momenti di $n - m$ congruenze (h') ortogonali rispetto alla metrica (3) [2]. Quanto alla $e_{h'}$ esse sono le componenti di un

(1) Vedi T. Levi-Civita ed U. Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, p. I, p. 396 (Zanichelli).

(2) Vedi T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, raccolte dal dottore E. Persico (Roma, Stock), cap. X.

vettore secondo le congruenze (h'), che noi chiameremo vettore temporale. Associando alla (1') le m equazioni seguenti:

$$(2') \qquad \sum_{1}^{n}{}_i \lambda_{h'i}\, dx^i = ds_{h'} \qquad (h' = 1, 2, \cdots, m)$$

scelte in modo che le n congruenze $(h) + (h')$ costituiscano un sistema di congruenze ortogonali rispetto alla metrica (3), otteniamo un sistema di n equazioni che si può risolvere rispetto ai differenziali dx^i, sotto la forma

$$(4) \qquad dx^i = e^i\, dt + \sum_{1}^{m}{}_h \lambda_h^i\, ds_h$$

dove le λ_h^i sono i parametri delle congruenze (h) e le e^i sono le componenti controvarianti del vettore temporale $\left(e^i = \sum_{m+1}^{n}{}_{h'} \lambda_{h'}^i e_{h'}\right)$.

È da osservare che le (4) non sono altro che una risoluzione parametrica speciale delle equazioni di anolonomia (1), le ds_h, che sono nello stesso tempo i differenziali degli archi delle congruenze (h), figurando come m parametri arbitrari.

Dalle (4) risulta che gli spostamenti virtuali del sistema S_n^m, cioè i spostamenti per cui dt è uguale a zero, sono tutti e soli i spostamenti della varietà anolonoma V_n^m, che diremo anche varietà anolonoma virtuale associata a S_n^m, avente come congruenze fondamentali le m congruenze (h). Sempre dalle (4), si ottiene dividendo per dt

$$(5) \qquad \frac{dx^i}{dt} = e^i + \sum_{1}^{m}{}_h \lambda_h^i u_h \qquad \left(u_h = \frac{ds_h}{dt}\right),$$

e queste formule esprimono la velocità del sistema, in funzione delle m caratteristiche cinetiche u_h.

3. - È ben noto, come dall'equazione simbolica della Dinamica scritta nelle variabili x^i si ricavano in virtù delle (4), le equazioni di Maggi del sistema S_n^m

$$\sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} - P_i\right)\lambda_h^i = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, m).$$

Se si tiene adesso conto dalle (5) e dalla interpretazione geometrica dei loro coefficienti, si può dare senza difficoltà a queste equazioni la forma seguente

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} = \displaystyle\sum_{1}^{m}{}_{kl} w_{lh}^k u_k u_l + \sum_{1}^{m}{}_k \left(w_{eh}^k + w_{kh}^{a+e} - \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial t}\lambda_h^i\right) u_k + \frac{\partial T_0}{\partial s_h} + P_h \\ \qquad + w_{eh}^{a+e} - \displaystyle\sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial (a_i + e_i)}{\partial t}\lambda_h^i - \frac{1}{2}\frac{\partial e^2}{\partial s_h} \end{cases}$$

dove P_h è la componente della risultante delle forze secondo la congruenza (h), e^2 è il quadrato della lunghezza del vettore temporale e $\frac{\partial}{\partial s_h}$ indica la derivata secondo la congruenza (h). Quanto alle w, esse sono definite nel modo seguente: Dati tre vettori α, β, γ aventi come componenti covarianti e controvarianti rispetto alla metrica (3) $\alpha_i, \alpha^i, \beta_i, \beta^i, \gamma_i, \gamma^i$, si pone

$$w^{\alpha}_{\beta\gamma} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \right) \beta^i \gamma^j .$$

Le equazioni del moto (5), (6) *del sistema* S_n^m *costituiscono un sistema differenziale di primo ordine sotto forma normale nelle n incognite* x^i *e le m incognite* u_h, ed è da osservare che, nella costruzione di queste equazioni entrano gli m vettori unitari tangenti alle linee delle congruenze (h), che sono nello stesso tempo le congruenze fondamentali della varietà anolonoma virtuale V_n^m associata, il vettore temporale, che è sempre esterno a V_n^m, il vettore a definito dalla forma T_1 della forza viva, la T_0 e le componenti delle forze nella V_n^m virtuale. Il vettore a, che entra solamente nella somma $a + e$, si può chiamare, per ragioni evidenti, anche vettore di irreversibilità del sistema.

4. - Supponiamo, per un momento, che il nostro sistema sia olonomo, che cioè non compariscano più le equazioni (1'). In tale caso il vettore temporale è zero, e le equazioni del moto assumono la forma

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \displaystyle\sum_{1}^{n}{}_{\alpha} \lambda^i_{\alpha} u_{\alpha} & \left(u_{\alpha} = \dfrac{ds_{\alpha}}{dt} \right) \\ \dfrac{du_{\alpha}}{dt} = \displaystyle\sum_{1}^{n}{}_{bc} w^{\beta}_{\gamma\alpha} u_{\beta} u_{\gamma} + \sum_{1}^{n}{}_{\beta} \left(w^{\alpha}_{\beta\alpha} - \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{\partial \lambda_{\beta i}}{\partial t} \lambda^i_{\alpha} \right) + \frac{\partial T_0}{\partial s_{\alpha}} + P_{\alpha} - \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{\partial a_i}{\partial t} \lambda^i_{\alpha} \\ \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

Se ulteriormente poi, vogliamo tener conto dalle equazioni di anolonomia (1), che si possono anche scrivere

$$(7') \qquad u_{h'} = e_{h'} \qquad (h' = m + 1, \cdots, n)$$

abbiamo il seguente teorema: *Date le equazioni* (7) *di un sistema olonomo* S_n, *le equazioni del moto del sistema anolonomo* S_n^m, *definito in* S_n *dalle* (7'), *si ottengono dalle prime* $n + m$ *equazioni* (7), *introducendo le* $e_{h'}$ *al posto di* $u_{h'}$, *il che porta a considerare, al posto delle ultime* $n - m$ *equazioni* (7), *le* $n - m$ *equazioni* (7').

5. – Ricordiamo adesso che, se la forza viva (2), del sistema olonomo S_n non dipende esplicitamente dal tempo e le forze derivano da un potenziale $U(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, il sistema S_n ammette l'integrale dell'energia generalizzato

$$(8) \qquad T_2 - T_0 - U = \text{cost.}$$

Se il nostro sistema S_n è sottoposto ulteriormente a delle condizioni (7'), che pure esse non dipendono esplicitamente dal tempo, il sistema anolonomo S_n^m, così ottenuto, non ammetterà più in generale l'integrale (8). Infatti, moltiplicando le equazioni (6) di S_n^m per u_h e sommando, si ottiene facilmente la formula

$$(8') \qquad \frac{d}{dt}(T_2 - T_0 - U) = \sum_{1}^{m}{}_{h,k} w_{eh}^{k} u_h u_k + \sum_{1}^{m}{}_{h} w_{eh}^{a+e} u_h + \frac{d}{ds_e}\left(\frac{1}{2} e^2 - T^0 - U\right)$$

e ne risulta che S_n^m avrà l'integrale (8), solamente nel caso in cui il secondo membro della (8') è identicamente zero, qualunque siano le u, e questo fatto avviene sempre, se il vettore temporale è zero, altrimenti si hanno le condizioni

$$(9) \qquad w_{eh}^{k} + w_{ek}^{h} = 0 \quad , \quad w_{eh}^{a+e} = 0 \quad , \quad \frac{d}{ds_e}\left(\frac{1}{2} e^2 - T_0 - U\right) = 0.$$

L'interpretazione geometrica di queste condizioni è molto semplice. Le prime ci dicono che nella V_n^m associata a S_n^m, la seconda forma di V_n^m nella direzione del vettore temporale è zero, le seconde ci definiscono le proiezioni della curvatura geodetica della congruenza e sopra le congruenze (h) in funzione del vettore di irreversibilità, e l'interpretazione della terza è evidente.

6. – Per dare una interpretazione meccanica di queste condizioni osserviamo che possiamo sempre scegliere le congruenze (h') in modo che il vettore temporale sia sempre diretto secondo la congruenza (n), nel quale caso le equazioni di anolonomia assumono la forma

$$(9') \qquad u_{m+1} = 0, \cdots, u_{n-1} = 0 \quad , \quad u_n - e = 0.$$

Con ciò risulta in primo luogo che il sistema anolonomo S_n^{m+1} $(u_{m+1} = \cdots = u_{n-1} = 0)$ ammette ancora l'integrale (8), e abbiamo il teorema:

Il sistema anolonomo S_n^m ammetterà l'integrale (8) solamente nel caso in cui le traiettorie di S_n^m sono anche traiettorie per S_n^{m+1}, o, ciò che è lo stesso, se la $u_n = e$ è una equazione invariante di S_n^{m+1}.

Se vogliamo che l'integrale (8) sia una equazione invariante di S_n^m almeno per un certo valore della costante dell'energia, la $u_n = e$ deve essere equazione invariante di S_n^{m+1} per quel valore della costante della energia.

Così, se consideriamo un sistema anolonomo S_2^1, definito in un S_2 olonomo e conservativo, da una equazione lineare non omogenea nelle velocità, con coefficienti indipendenti del tempo lo S_2^1 non può ammettere l'integrale delle forze vive di S_2, che se la forza viva, il potenziale, e l'equazione nelle velocità si scrivono

$$(10)\quad T = \frac{1}{2}\left[(\dot{x}^1)^2 + G^2(\dot{x}^2)^2\right] \quad , \quad U = \frac{1}{2G^2} + \psi(x^1) \quad , \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{1}{G^2}$$

dove ψ è una funzione qualunque, e l'integrazione delle equazioni del di S_2^1, che forniscono anche una parte delle soluzioni di S_2, si riduce al sistema

$$(\dot{x}^1)^2 = 2\psi(x^1) + \text{cost.} \quad , \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{1}{G^2}$$

e siccome la prima si integra con una quadratura, l'integrazione si riduce in sostanza ad una equazione del primo ordine.

7. - Passiamo adesso a cercare in che condizioni il sistema S_n^m ammette un integrale dell'energia che differisca dall'integrale (8) al massimo per una forma lineare nelle velocità. Basta scrivere che il secondo membro delle (8') è la derivata rispetto al tempo di una funzione L, lineare nelle velocità, che, in virtù delle equazioni (5), si può scrivere

$$L = \sum_1^m{}_h b_h u_h + \Omega ,$$

e si trovano facilmente le equazioni a cui devono soddisfare i coefficienti di questa forma. Per semplicità noi consideriamo qui solamente il caso particolare importante in cui L è uguale ad una funzione del posto Ω, e cioè il caso in cui l'integrale dell'energia di S_n^m è ancora reversibile nel tempo.

Perchè questo avvenga è necessario in primo luogo che la seconda forma della V_n^m associata, nella direzione del vettore temporale, sia zero. Supposta soddisfatta questa condizione, la funzione Ω deve verificare ulteriormente il sistema a derivate parziali di $m+1$ equazioni del primo ordine

$$(11)\quad \frac{d\Omega}{ds_h} = w_{eh}^{n+e} \quad , \quad \frac{d\Omega}{ds_e} = \frac{d}{ds_e}\left(\frac{1}{2}e^2 - T_0 - U\right) \quad (h = 1, 2, \cdots, m).$$

Se questo sistema è compatibile, indicando con Ω una sua soluzione, l'integrale dell'energia di S_n^m, avrà la forma

$$T_2 - T_0 - U - \Omega = \text{cost}. \tag{12}$$

Se il sistema (11) ha più di una soluzione, diciamo due Ω e Ω_1, è evidente che la differenza $\Omega_1 - \Omega$ sarà un integrale primo di S_n^m, ma tale differenza è nello stesso tempo una soluzione del sistema Pfaff formato dalle equazioni (9'), eccettuata l'ultima, ed è evidente che tutte le soluzioni di questo sistema sono degli integrali primi di S_n^m.

Prima di terminare, osserviamo che si può estendere anche ai sistemi anolonomi a legami dipendenti dal tempo, un teorema di Hadamard, ottenendo così la proposizione: *Le equazioni del moto di un sistema anolonomo non variano, se si aggiunge alla forza viva* (2) *una forma quadratica qualunque nei primi membri delle equazioni di anolonomia* (1). È evidente che se il vettore temporale è diverso da zero, si modifica in generale, in questo modo, non solo la T_2, ma anche la T_1 e T_0 e gioya rilevare che possiamo modificare di questa maniera la forza viva in modo che la lunghezza del vettore temporale, quando non è zero, sia l'unità, fatto che può portare in certi casi a delle semplificazioni.

Astronomia (Astrofisica). — *Il postulato di Ritz–La Rosa e le Cefeidi.* Nota di M. Crenna, presentata dal Corrisp. M. La Rosa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *La misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali.* Nota di G. Occhialini, presentata[1] dal Socio A. Garbasso.

Quando una scintilla verticale viene focheggiata sulla fenditura di uno spettroscopio, si osserva che le righe degli elementi che compongono l'elettrodo non coprono generalmente tutto l'intervallo di scarica.

Questo fatto è stato osservato e studiato per primo dal Lockyer, che notò tra l'altro che una variazione nella percentuale dell'elettrodo si traduce in un'alterazione di lunghezza delle righe. Su questa osservazione egli impiantò il suo metodo di spettroscopia quantitativa, che sembrò dapprima assai promettente, ma che non ebbe seguito ulteriore.

Se si va a ricercare la ragione della mancanza di successo del metodo del Lockyer, si trova che la misura, come egli la eseguiva, non poteva dare risultati coerenti, nè si prestava allo studio di piccole variazioni di percentuale. La scintilla, disposta verticalmente, veniva infatti focheggiata sulla fenditura, pure verticale, di uno spettroscopio, e la lunghezza delle righe veniva misurata con una scala che si trovava al posto del reticolo. Ora, la scintilla non è mai rettilinea ma saltella da un lato all'altro della fenditura, sopratutto nelle parti centrali, nelle quali la stabilità sarebbe invece più necessaria a causa del degradare dell'intensità della riga dall'elettrodo al centro della scintilla. Si capisce così come questa difficoltà, unita alla grossolanità del mezzo di misura, abbia fatto dimenticare il metodo del Lockyer.

Recentemente è stato descritto su questi « Rendiconti »[2] un metodo per misurare con grande precisione la lunghezza della riga in relazione alla percentuale dell'elemento emittente sull'elettrodo.

Questo metodo è visuale e non permette perciò l'osservazione nell'estremo violetto dove l'esame ha un certo interesse, perchè è proprio in questa regione che si trovano le righe dell'elemento quando questo è in percentuale piccolissima sull'elettrodo, ed è solo in questa regione che certi elementi presentano uno spettro, che è quello dovuto all'elemento ionizzato (es. carbonio). Può quindi avere un certo interesse un perfezionamento del metodo che lo renda applicabile al violetto; ed è appunto un tale perfezionamento che in questa Nota si descrive.

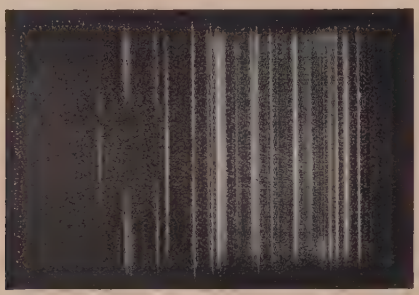
Il dispositivo per la misura consiste in un carrello portante una lente e spostabile lungo una slitta mediante un micrometro. A mezzo di questo carrello, la lente che proietta un'immagine della scintilla disposta orizzon-

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) A. Occhialini, *Effetto della resistenza sullo spettro di una scintilla*, fasc. 2-3, 1929; *La lunghezza delle righe emesse da un elettrodo in funzione della concentrazione*, fasc. 4, 1929.

talmente sopra la fenditura dello spettrografo, può essere spostata orizzontalmente. Al bottone che regola il movimento dello châssis portalastre negli spettografi è sostituita una manopola graduata (una manopola a verniero da radio può servire benissimo) che permette di spostare la lastra di tratti uguali in tempi uguali, nello stesso tempo che, valendosi delle graduazioni del micrometro si sposta l'immagine della scintilla sulla fenditura. La fenditura può essere tenuta assai larga. L'impressione fotografica risulta così dalla successione di una serie di fotografie a posa assai corta che insieme con la larghezza della fenditura compensa la brevità della posa per ogni fotografia e dà, per così dire, un'allungamento generale delle righe dello spettro.

Come si vede nello spettrogramma accluso, lo spostamento è stato eseguito in modo da abbracciare tutto l'intervallo di scarica; la larghezza della



Spettrogramma di una scintilla tra etettrodi di Cadmio.

fenditura e lo spostamento della lastra non hanno influito sulla definizione e sulla continuità delle righe.

La fotografia è riprodotta al naturale; essa è stata eseguita con pose parziali di 4 secondi e consta della successione di circa sessanta fotografie; ma si capisce come il tempo di posa possa variare a seconda dell'intensità delle righe in esame.

Mi sembra che un metodo così semplice possa presentare sopra gli altri qualche vantaggio. Esso si presta assai bene all'osservazione delle variazioni di righe molto corte perchè le dà allungate; non richiede inoltre l'uso di apparecchi costosi come i microfotometri. Volendo, sarebbe possibile di sostituire allo spostamento a mano lo spostamento contemporaneo della lastra e dell'immagine della scintilla eseguito da un motore.

Inoltre le possibilità relative alla fotografia eseguita in questa maniera non si limitano solo alla misura di lunghezze di righe ma possono essere estese all'esplorazione spettroscopica continua e completa di un fenomeno luminoso attraverso tutto l'intervallo in cui questo si produce.

Fisica. — *Ricerche sull'azione del campo magnetico terrestre sopra i corpuscoli della radiazione penetrante.* Nota di B. Rossi, presentata [1] dal Socio A. Garbasso.

1. - La radiazione penetrante ci si rivela mediante un complesso di fenomeni, che traggono la loro causa immediata dalla presenza nell'atmosfera di una radiazione corpuscolare. È l'intensità di questa radiazione corpuscolare quella che viene direttamente misurata dai nostri apparecchi e che si suol perciò chiamare « intensità della radiazione penetrante ».

Le esperienze di Bothe e Kolhörster [2] hanno dimostrato come tali corpuscoli posseggano un potere di penetrazione molto maggiore di quanto prima si ritenesse, ed hanno così avvalorata l'ipotesi che essi non vengano generati nell'atmosfera da una radiazione ultra-γ, ma abbiano origine extraterrena, cioè costituiscano essi stessi la radiazione penetrante primaria.

Recenti esperienze dell'A. [3], pur confermando pienamente i risultati sperimentali di Bothe e Kolhörster, sembrano provare invece che esiste al livello del mare una radiazione ultra-γ di piccolissima intensità, la quale libera nei mezzi materiali corpuscoli dotati di alto potere di penetrazione. Esse però lasciano aperta la questione se tutta la radiazione corpuscolare osservata abbia una simile origine secondaria, o se una porzione notevole di essa non provenga invece dagli spazi siderali, accompagnata da quella radiazione ultra-γ, che genera poi nell'atmosfera nuovi raggi corpuscolari. Questa seconda ipotesi permetterebbe anzi di interpretare più semplicemente i fatti osservati.

Per quanto ne manchi finora la prova sperimentale diretta, la radiazione corpuscolare dell'atmosfera va considerata con ogni probabilità come una radiazione elettronica. Ora il campo magnetico della Terra, mentre può non esercitare un'azione sensibile sugli elettroni, che hanno origine nella atmosfera (dato lo spessore relativamente piccolo di questa), deve invece modificare notevolmente le traiettorie degli elettroni, che vengono dal di fuori e che ne subiscono quindi l'azione lungo un tratto incomparabilmente maggiore.

Se una porzione notevole della radiazione corpuscolare ha origine extraterrena, questa azione del campo magnetico terrestre dovrebbe manifestarsi:

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) *Das Wesen der Höhenstrahlung*, « Z. S. f. Phys. », 56, 751, 1929.

(3) *Ueber den Ursprung der durchdringenden Korpuskularstrahlung der Atmosphäre*, « Naturwiss. », 18, 1096, 1930.

1° con una dipendenza dell'intensità della radiazione penetrante dalla latitudine magnetica del luogo d'osservazione;

2° con una dissimetrica distribuzione dell'intensità rispetto al piano del meridiano magnetico.

La possibilità di una dipendenza dalla latitudine è stata indicata da diversi Autori; la sua esistenza però non ha potuto essere provata in modo chiaro dalle esperienze finora eseguite [1].

Sulla dissimetria rispetto al meridiano ho richiamato l'attenzione in una precedente Nota [2]; alla verifica sperimentale di questo effetto è dedicato il presente lavoro [3].

Tale ricerca presenta su quelle relative all'effetto in latitudine il vantaggio di non implicare il confronto fra misure eseguite in località lontane l'una dall'altra; il che, mentre rende più agevole l'esperienza, elimina le cause d'errore dovute alle diverse condizioni meteorologiche e permette di paragonare fra di loro risultati di osservazioni alternate a brevi intervalli di tempo.

2. - Il problema del moto di un elettrone nel campo magnetico della Terra (assimilato al campo di un dipolo) non ha potuto finora essere risolto in modo completo. Non è quindi neppure possibile prevedere esattamente quale dovrebbe essere sulla superficie della Terra la distribuzione di intensità in funzione della latitudine magnetica e della direzione di provenienza per una radiazione elettronica di data energia avente origine estraterrena e distribuita isotropicamente negli spazi interstellari.

Un calcolo relativamente semplice permette tuttavia di determinare fino a quali valori dell'energia sia da attendersi un'azione sensibile del campo magnetico terrestre e di stabilire, almeno qualitativamente, i caratteri di questa azione. Si trova precisamente (come ho indicato nella Nota citata) [4] che in un punto della Terra di latitudine magnetica λ un elettrone di energia

(1) Cfr. i lavori di Clay, «Kon. Ak. Amsterd. Proc.», 30, 1115, 1927; 31, 1091, 1928, di Corlin, «Archiv f. Math. Astr. o. Fys.», 22, n. 2, 1, 1930, di Millikan e Bowen, «Proc. Nat. Ac.», 16, 421, 1930, di Millikan, «Phys. Rev.», 36, 1595, 1930, e principalmente le misure assai esaurienti di Bothe e Kolhörster nei mari nordici, «Sitzungsber. d. Preuss. Ak. d. Wiss.», 1930, XXVI.

(2) *On the Magnetic Deflection of Cosmic Rays.*, «Phys. Rev.», 36, 606, 1930.

(3) Ricordo a questo proposito che già nel 1926 Myssowski e Tuwim («Z. S. Phys.», 36, 615, 1926) avevano tentato di mettere in evidenza una possibile dipendenza dell'intensità della radiazione penetrante dell'azimut, eseguendo misure con una camera di ionizzazione attorno ad un serbatoio d'acqua. Dal risultato negativo dell'esperienza avevano tratto la conclusione che il campo magnetico terrestre non esercitava un'azione sensibile sulle traiettorie dei raggi penetranti (senza indicare tuttavia in qual modo questa azione avrebbe dovuto manifestarsi, nè per elettroni di quale energia). V'è da notare però che soltanto un effetto molto grossolano avrebbe potuto essere rilevato da tali misure, principalmente pel fatto che (come risulta dalle indicazioni degli stessi Autori) il serbatoio d'acqua costituiva pei raggi penetranti uno schermo assai imperfetto.

(4) «Phys. Rev.», 36, 606, 1930.

V (misurata in Volt) può giungere soltanto da quelle direzioni, il cui angolo ϑ col piano del meridiano magnetico (positivo verso oriente) soddisfa alla condizione:

$$\operatorname{sen}\vartheta > \frac{300\,M}{R^2 V}\cos\lambda - \sqrt{\frac{300\,M}{R^2 V}}\,\frac{2}{\cos\lambda}$$

dove M è il momento magnetico della Terra ($= 8{,}33 \cdot 10^{25}$ gauss. cm.^{3}), R il suo raggio ($= 6{,}38 \cdot 10^8$ cm.). Si ricava da questa relazione che alla latitudine magnetica di Firenze ($\lambda = 44°$) per elettroni di $4 \cdot 10^9$ Volt, tutta la regione ad occidente del meridiano magnetico è « in ombra »; giacchè con $\lambda = 44°$ e $V = 4 \cdot 10^9$ essa dà $\operatorname{sen}\vartheta > 0$.

Elettroni la cui energia, pur superando il valore di $4 \cdot 10^9$ Volt, non se ne discosti come ordine di grandezza, giungeranno anche da occidente del meridiano, ma sensibilmente meno numerosi che da oriente. Il calcolo (come avevamo detto fin da principio) porta quindi a prevedere, nel caso in cui la radiazione corpuscolare sia per la massima parte di origine extraterrena, una dissimetria di intensità rispetto al meridiano magnetico.

3. – L'esperienza destinata a mettere in evidenza questa dissimetria venne eseguita applicando il metodo delle coincidenze fra gli impulsi di due contatori, il quale permette di esplorare regioni angolari esattamente delimitate.

Furono usati per questa ricerca due contatori a tubo di Geiger e Müller della lunghezza di 15 cm. e del diametro di 5 cm. Le coincidenze vennero registrate mediante il dispositivo già precedentemente studiato dall'A.[1] e sommate automaticamente con un contatore di conversazioni telefoniche.

I contatori a tubo vennero collocati orizzontalmente, cogli assi paralleli al piano del meridiano magnetico. La loro posizione rispettiva nelle due fasi dell'esperienza (esplorazione della regione orientale ed esplorazione della regione occidentale) è schematicamente rappresentata in (*a*) e in (*b*) (vedi figura). X X′ indica la traccia del piano meridiano, Y Y′ la traccia di un piano inclinato di 6° sull'orizzonte. Soltanto raggi provenienti dall'angolo diedro delimitato da questi due piani possono attraversare ambedue i contatori C_1 e C_2 e dar luogo così a coincidenze. Se quindi i raggi giungono effettivamente più numerosi da oriente che da occidente, la frequenza delle coincidenze deve essere maggiore nella posizione (*a*) che nella posizione (*b*).

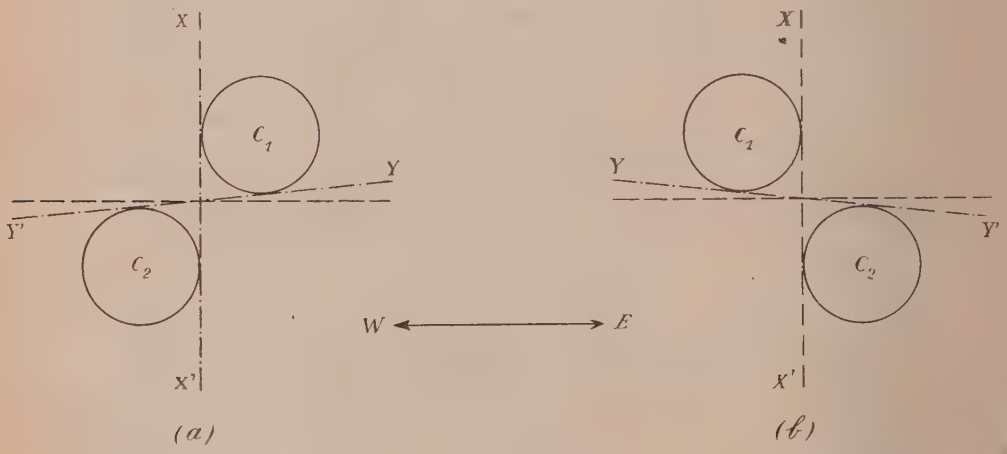
In pratica si passava dall'una all'altra di queste posizioni rotando di 180° l'insieme dei due contatori (rigidamente collegati fra di loro) attorno ad un asse disposto esattamente verticale mediante una livella. Si aveva in tal modo la sicurezza di mantenere inalterata sia la posizione rispettiva dei due contatori, sia l'angolo formato colla verticale dal piano contenente i loro

(1) *Method of registering multiple simultaneous impulses of several Geiger's counters*, « Nature », 125, 636, 1930.

assi. Condizione questa indispensabile perchè l'intensità della radiazione penetrante varia notevolmente (per effetto dell'assorbimento atmosferico) coll'altezza sull'orizzonte ed occorre quindi (volendo ottenere risultati attendibili sulla sua distribuzione azimutale) confrontare direzioni inclinate dello stesso angolo sulla verticale.

Particolare cura dovette essere posta nella scelta del luogo di osservazione, giacchè era evidentemente necessario che tutta la regione di cielo esplorata fosse libera da ostacoli capaci di assorbire sensibilmente i raggi penetranti.

Per gentile concessione del Direttore, prof. G. Abetti, ho potuto eseguire le misure nella cupola centrale del R. Osservatorio Astrofisico di Ar-



cetri, la cui situazione corrisponde perfettamente alle esigenze dell'esperienza, perchè delle alture circostanti nessuna ha sull'orizzonte un'altezza angolare superiore ai 5° (mentre, come si è visto, soltanto raggi inclinati di oltre 6° sull'orizzonte potevano dare coincidenze).

I contatori (racchiusi, insieme col circuito registratore, in una cassetta foderata di zinco per evitare possibili perturbazioni elettriche) vennero collocati sul ballatoio della cupola, in posizione tale che i raggi penetranti, prima di giungere su di essi, dovessero attraversare soltanto la copertura del tetto girevole, più la parete della cassetta; complessivamente 4 cm. di legno e 1,5 mm. di zinco. L'assorbimento prodotto da questo strato rientrava nel limite degli errori sperimentali (1,5 %) ed era d'altronde, per la disposizione degli apparecchi, perfettamente simmetrico rispetto al piano del meridiano magnetico.

4. - Secondo il procedimento indicato nel precedente paragrafo, furono contate le coincidenze orientando i contatori in modo da segnalare ora i

corpuscoli provenienti da oriente, ora quelli provenienti da occidente del meridiano magnetico. Le misure nelle due direzioni venivano opportunamente alternate, per evitare gli errori dovuti alle fluttuazioni di intensità della radiazione penetrante.

I risultati di due serie di esperienze sono riassunti nella seguente Tabella (1):

Serie N.	ORIENTE				OCCIDENTE				$\Delta = n_1 - n_2$	$\varepsilon = \sqrt{N_1 + N_2}$
	t	N_1	ν_1	n_1	t	N_2	ν_2	n_2		
1	10^h	4500	840	3660	10^h	4528	840	3688	− 28	95
2	$17^h\ 54^m$	6764	752	6012	$17^h\ 54^m$	6683	752	5931	+ 81	116
Σ	$27^h\ 54^m$	11264	1592	9672	$27^h\ 54^m$	11211	1592	9619	+ 53	150

t = durata della esperienza; N = numero delle coincidenze osservate; ν = numero delle coincidenze casuali; n = numero delle coincidenze sistematiche; ε = errore statistico.

Sopra un numero complessivo di 19.291 coincidenze sistematiche venne trovata dunque una differenza di 53 coincidenze, con un errore medio di 150; ciò corrisponde ad un effetto relativo del $(0{,}5 \pm 1{,}5)\ \%$.

Ne concludiamo che, entro i limiti di errore della presente esperienza, la radiazione penetrante giunge con eguale intensità sia da oriente che da occidente del meridiano magnetico. Manca quindi la dissimetria prevista dal calcolo per una radiazione corpuscolare di origine estraterrena; o questa dissimetria, se pure esiste, è molto più piccola di quella che sarebbe da attendersi per elettroni di energia vicina ai $4 \cdot 10^9$ Volt.

Poichè, d'altra parte, non sembra ammissibile che l'atmosfera possa diffondere così fortemente i corpuscoli della radiazione penetrante da mascherare del tutto, se notevole, la dissimetria prodotta dal campo magnetico terrestre, siamo condotti a scegliere fra una delle seguenti ipotesi:

o la radiazione corpuscolare osservata viene generata totalmente nella atmosfera, la radiazione penetrante primaria essendo quindi una radiazione ultra-γ pura;

(1) Per eseguire la correzione relativa alle coincidenze casuali, ne venne determinata la frequenza allontanando i contatori in modo da escludere le coincidenze sistematiche. Durante la prima serie di esperienze si avevano in media 1,4 coincidenze casuali per minuto; durante la seconda serie, una regolazione più accurata del circuito registratore permise di ridurre questo numero a 0,7. Poichè la frequenza degli impulsi nei singoli contatori era di 125 per minuto, il potere risolutivo era nel primo caso $2{,}7 \cdot 10^{-3}$ sec., nel secondo caso $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ sec.

o quella porzione della radiazione corpuscolare, che proviene dagli spazi siderali, giunge al limite dell'atmosfera con un'energia molto superiore ai $4 \cdot 10^9$ Volt.

In questo secondo caso però bisogna ammettere che i corpuscoli della radiazione penetrante perdano, nell'attraversare l'atmosfera, assai più che un miliardo di Volt della loro energia (come all'incirca, farebbe prevedere l'estrapolazione delle leggi valide per i raggi β delle sostanze radioattive). Giacchè altrimenti essi giungerebbero *tutti* sulla superficie della Terra con un'energia sufficiente per attraversare parecchi metri di piombo; mentre sappiamo che 10 cm. di piombo ne assorbono già circa il 40 %.

Mi è grato esprimere al prof. Abetti la mia più viva riconoscenza per la gentile ospitalità concessami. Ringrazio anche il sig. Scarpelli per l'aiuto prestatomi durante le osservazioni.

Fisica. — *Sulla costituzione dell'acido nitrico in soluzione acquosa* [1]. Nota di R. Brunetti e Z. Ollano, presentata [2] dal Socio A. Garbasso.

1. – Vari autori si sono occupati in questi ultimi tempi delle variazioni dello spettro Raman delle soluzioni acquose di acido nitrico a diverse concentrazioni [3]. Essi distinguono le radiazioni che l'acido nitrico manifesta per effetto Raman in due classi: quelle dell'ione NO_3' e quelle della molecola HNO_3. L'effetto Raman ha cioè rivelato lo stato di dissociazione della molecola, ma fin qui nulla ha detto circa la struttura della molecola stessa.

Il problema delle associazioni e decomposizioni molecolari in acido nitrico è assai complesso e lo dimostra fra altro l'assorbimento nella regione ultravioletta dell'acido nitrico puro e delle sue soluzioni acquose nei resultati di K. Schaefer e di Halban e Heisenbrand [4]. In soluzioni diluite fino alla concentrazione normale l'acido nitrico presenta una curva d'assorbimento, con massimo a circa 3000 Å, identica a quella dei suoi sali. Nelle soluzioni concentrate al di sopra di 12 Mole per litro e nell'acido puro la banda a 3000 Å non esiste più e la curva d'assorbimento è simile a quella che si ottiene da un etere composto della forma $O_2N \cdot OC_nH_{2n+1}$.

Per $n = 0$ dalla formula precedente si ha $O_2N \cdot OH$. Mentre quindi nelle soluzioni diluite l'acido nitrico è scisso in ioni come un sale, quando

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Cagliari.

(3) Ramakrishna Rao, « Nat. », *124*, p. 762, 1929; « Phys. Ber. », p. 2618, 1930; Kinsey, « Phys. Rev. », *35*, p. 284, 1930; Sterling e Laird, « Phys. Rev. », *36*, p. 148, 1930.

(4) K. Schaefer, « Zeitschr. f. Elektrochemie u. angew. phys. Chemie », *21*, p. 181, 1915; Zeitschr. f. An. Chemie », *97*, p. 285, 1928; Halban e Heisenbrand, « Zeitschrift f. phys. Chemie », *132*, pp. 401, 433, 1928.

è concentrato si suppone che gli spetti la costituzione rappresentata dalla formula $O_2N \cdot OH$. Le curve d'assorbimento nell'ultravioletto dimostrerebbero quindi che esistono almeno due forme di legame fra i gruppi molecolari in cui si può decomporre la molecola dell'acido nitrico, di cui una forse omeopolare propria dell'acido omogeneo e una a carattere polare propria delle soluzioni acquose diluite. Tuttavia poichè le curve d'assorbimento delle soluzioni a diluizione media non possono essere ricostruite facendo uso della curva dell'etere composto e di quella delle soluzioni saline, si ritiene che l'evoluzione dell'assorbimento delle soluzioni al crescere della diluizione non corrisponda allo spostarsi dell'equilibrio fra i due componenti estremi, ma che intervenga a modificare la sua natura anche qualche componente intermedio, circa il quale non si è raggiunto finora un preciso accordo.

Citiamo qui l'opinione di Hantzsch [1] che è fondata oltre che sui resultati d'assorbimento anche sullo studio del comportamento della refrattività molecolare e della conducibilità delle soluzioni di acido nitrico al variare della concentrazione. L'acido nitrico puro sarebbe rappresentabile con l'equilibrio

$$NO(OH)_2(NO_3) \rightleftarrows 2\,O_2N \cdot OH\,.$$

Per aggiunta di acqua si formerebbe idrato dello pseudoacido $O_2N \cdot \cdot OH \cdots H_2O$, e consecutivamente sale di idroxonio $(NO_3)\,(H_3O)$, sale di poliidroxonio $(NO_3)\,(H(H_2O)_n)$ e gli idrati degli ioni di questo sale $(NO_3)\,(H_2O)'_n + (H(H_2O)_n)^{\cdot}$. Nell'ipotesi di Hantzsch quindi nelle soluzioni di acido nitrico a media concentrazione noi dovremo ottenere per effetto Raman radiazioni provenienti:

a) dalle molecole $(O_2N \cdot OH)\,,(NO_3)(H_3O)$,

b) dagli ioni NO'_3 e $(H_3O)^{\cdot}$.

Fra le prime dobbiamo forse attenderci le radiazioni dei gruppi NO_2 e NO'_3 non liberi. Le soluzioni a bassa concentrazione invece dovrebbero dare solo quelle degli ioni NO'_3 dissociati ed eventualmente dell'ione idroxonio, fin qui non conosciuto come individuo fisico capace di emettere radiazioni proprie.

Ci siamo proposti di studiare lo spettro Raman delle soluzioni nitriche tenendo presenti queste previsioni. La nostra attenzione tuttavia è stata rivolta in ispecial modo a ricercare se fra le cosidette radiazioni molecolari dell'acido ne esistesse almeno una attribuibile al gruppo NO_2, indice della supposta costituzione dell'acido nitrico concentrato.

(1) Hantzsch, « Zeitschr. f. phys. Chemie », *134*, p. 406, 1928; Hantzsch e Dürigen, « Zeitschr. f. phys. Chemie », *134*, p. 413, 1928; v. anche Geiger u. Scheel, « Handbuch d. Phys. », vol. XXI, p. 78, 1929.

Questo studio è stato preceduto da un accurato esame delle bande dell'acqua e del solvente acquoso, le quali occupano un'importante estensione dello spettro Raman nelle regioni azzurra e violetta. Esso è riportato per esteso in una Nota precedente, nella quale sono descritte anche le condizioni sperimentali in cui si è svolto il nostro lavoro [1]. Riferiremo prima dei resultati relativi alle soluzioni nitriche quelli ottenuti:

1° dall'esame delle radiazioni proprie dell'ione NO_3', che potevano mettersi in evidenza con la nostra disposizione sperimentale;

2° dalla ricerca delle radiazioni del gruppo NO_2 nelle diverse associazioni molecolari in cui esso si presenta (legame polare ed omeopolare).

2. – Da soluzioni di $NaNO_3$ a 9.8 Mole per litro noi otteniamo le differenze di frequenza 717, 1049, 1389 cm^{-1}, che corrispondono alle lunghezze d'onda infrarosse 13.9, 9.5, 7.2 μ. I nostri resultati concordano cioè, oltre che con quelli di altri autori, con i dati recentissimi di C. Schaefer, Matossi e Aderhold [2], che presso cristalli di $NaNO_3$ trovano le frequenze corrispondenti alle lunghezze d'onda infrarosse 13.75, 9.35, 7.20 μ. Alcune differenze di lunghezza d'onda dipendono dal diverso stato di aggregazione del materiale usato da Schaefer, Matossi e Aderhold e da noi. Come infatti ha messo in evidenza Gerlach [3], nelle soluzioni le frequenze di NO_3' sono inferiori alle omologhe frequenze del cristallo.

Per osservazione nell'infrarosso C. Schaefer e Bormuth [4] osservano massimi d'assorbimento a 14.44, 12.04, 9.30 (frequenza inattiva calcolata), 7.17 μ.

In soluzioni di NH_4NO_3 a 12.5 Mole per litro la frequenza corrispondente alla 1389 cm^{-1} appare assai più larga che presso gli altri nitrati e supponiamo che essa comprenda non risolte le due radiazioni 7.2 μ dell'ione NO_3' e e 7.0 μ del gruppo NH_4. Gli altri nitrati esaminati a partire dalla soluzione satura [KNO_3, $Ba(NO_3)_2$, $Al(NO_3)_3$, $La(NO_3)_3$] danno resultati analoghi a quelli ottenuti con $NaNO_3$, facendo astrazione da piccole differenze di frequenza.

Per effetto Raman dei sali non compare dunque la radiazione la cui lunghezza d'onda infrarossa è 12.04 μ dell'ione NO_3', mentre la 14.44 appare alquanto spostata verso le lunghezze d'onda brevi.

3. – Le soluzioni di $NaNO_2$ esaminate a diverse concentrazioni (10.9 Mole per litro e 3.6 Mole per litro) hanno invece presentato le frequenze 815, 1241, 1326 cm^{-1}, le cui lunghezze d'onda infrarosse sono 12.37, 8.06, 7.54 μ. La prima è netta, la seconda sfumata e la terza di gran lunga la

(1) R. Brunetti e Z. Ollano, «Rend. R. Acc. d. Lincei», novembre 1930.
(2) «Zeitschr. f. Phys.», *65*, p. 300, 1930.
(3) «Ann. d. Phys.», *5*, p. 508, 1930.
(4) «Zeitschr. f. Phys.», *62*, p. 508, 1930.

più intensa delle tre. Da KNO_2 abbiamo ottenuto frequenze corrispondenti [1].

Le frequenze proprie dell'ione NO_2' dei sali è stata poco studiata sia in effetto Raman che nell'ultrarosso.

Carelli, Pringsheim e Rosen [2] trovano presso soluzione satura di $NaNO_2$ le frequenze 696, 785, 1303, 2151 cm^{-1}. Della prima e dell'ultima sulle nostre lastre non è traccia, mentre le 785 e 1303 cm^{-1} sono forse identiche alle nostre 815 e 1326 cm^{-1}.

R. Bär [3] con polveri cristalline ha messo in evidenza la sola frequenza 1333 cm^{-1}. Maslakowetz [4] attribuisce all'ione NO_2' un massimo di riflessione nell'ultrarosso a 8.04 μ (frequenza 1240 cm^{-1}).

A sua volta la molecola NO_2 [5] del biossido d'azoto assorbe a 3.43 μ (2915 cm^{-1}), 6.1 μ (1600 cm^{-1}) e 7.3 μ (1370 cm^{-1}) mentre in effetto Raman essa rivela solo la frequenza 1281,8 cm^{-1} [6].

In tutti i nitrocomposti organici [7] (nitrometano, tetranitrometano, nitrobenzene, orto-para-metanitrotoluene) si manifesta intensissima una riga il cui spostamento di frequenza è circa 1330 cm^{-1}. Essa, è unica pel tetranitrometano $C(NO_2)_4$, che contiene solo gruppi NO_2, e sembra quindi si debba attribuire senz'altro a questo gruppo molecolare. Nel passare da un composto all'altro questa riga subisce spostamenti nei due sensi di 10 cm^{-1} in media. Solo presso il nitrometano $CH_3(NO_2)$ sembra essa sia a 1396 cm^{-1}, cioè abbia un valore molto elevato.

Nonostante questo, pare giustificato concludere che qualunque sia il legame con cui il gruppo NO_2 è trattenuto da una molecola, cioè qualunque sia la sua costituzione, la sua presenza sia accertabile mediante una frequenza prossima a 1330 cm^{-1}.

4. - L'acido nitrico in soluzione acquosa è stato esaminato alle concentrazioni seguenti: 13.4, 11.7, 10.0, 7.6, 7.0, 3.7, 3.1, 2.7 Mole per litro.

I resultati ottenuti si possono riassumere come segue:

1° Tutte le soluzioni di acido nitrico hanno certamente a comune coi nitrati le frequenze 1045 e 1400 cm^{-1}. Questa radiazione, poco intensa nelle soluzioni più diluite, si identifica male per la presenza nelle sue immediate vicinanze della banda dell'acqua 3225 cm^{-1}. Da 10 Mole per litro in giù è sicuramente presente anche la radiazione a 716 cm^{-1} di frequenza.

(1) I nitriti esaminati assorbono quasi totalmente la 4047 Å del mercurio. L'eccitazione presso di essi si può quindi considerare come monocromatica e dovuta alla 4358 Å del mercurio.

(2) « Zeitschr. f. Phys. », *51*, p. 511, 1928.

(3) « Nat. », *124*, p. 692, 1929.

(4) « Zeitschr. f. Phys. », *51*, p. 69, 1928.

(5) Cl. Schaefer u. Matossi, *Das Ultrarote Spektrum*, p. 246, Berlin, 1930.

(6) Dickinson Dillon e Rasetti, « Phys. Rev. », 34, p. 582, 1929.

(7) Ganesan e Venkateswaran, « Ind. Journ. of Phys. », vol. IV, p. III, p. 195, 1929.

Al di sopra di questa concentrazione non si può dire che essa sia assente del tutto, ma su di essa prevale la vicina 690 cm^{-1}, propria delle soluzioni concentrate di acido nitrico. *A priori* non è forse per ora da escludere che queste radiazioni provengano oltre che dagli ioni NO_3' liberi o idratati, anche da quelli che ancora fanno parte di una associazione del tipo $(NO_3)(H_3O)$.

2° Nelle soluzioni più concentrate si notano anche altre radiazioni oltre le citate fra cui notevolissima una a 1306 cm^{-1} di aspetto simile a quello della 1326 cm^{-1} dei nitriti, ma sicuramente spostata di 20 cm^{-1} circa. Noi non vediamo, nè altri ha registrato, anche quando questa riga è più intensa, le 815 e 1240 cm^{-1} dei nitriti.

D'altra parte il contenuto in acido nitroso delle soluzioni nitriche presso le quali la radiazione 1306 cm^{-1} era più intensa è risultato all'analisi chimica, eseguita gentilmente per nostro conto dal prof. E. Puxeddu della R. Università di Cagliari, inferiore a 0.01 gr. per litro. Questa bassa percentuale esclude il dubbio che la frequenza 1306 cm^{-1} sia dovuta a ioni NO_2' dell'acido nitroso presente.

Nelle soluzioni dette non si manifesta dunque l'ione negativo NO_2', ma piuttosto un gruppo NO_2 in legame omeopolare o in ogni modo di costituzione diversa da quella dell'altro gruppo citato (NO_2' per esempio [1]).

3° Mentre le frequenze del gruppo NO_3' diminuiscono di intensità solo quando la soluzione va impoverendosi di ioni NO_3', la 1306 cm^{-1} scompare assai prima e cioè poco al di sotto della concentrazione corrispondente a 7 Mole per litro. Kinsey [2] trova che la radiazione analoga alla nostra, da lui letta in 1293 cm^{-1}, scompare per soluzioni al 25 % di concentrazione, cioè a distanza non molto grande dal limite da noi assegnato.

4° Contemporaneamente noi notiamo che la banda dell'acqua 3225 cm^{-1} manca nelle soluzioni più concentrate: invece la 3446 cm^{-1} e specialmente il terzo elemento, di cui abbiamo dimostrata l'esistenza in altro lavoro, a frequenza 3589 cm^{-1} sono notevolmente intense. L'intensità della 3589 cm^{-1} decresce col crescere della diluizione dell'acido, mentre cresce l'intensità della 3225 cm^{-1}.

La 3589 cm^{-1} già da noi attribuita a un polimero molto basso della molecola H_2O [3], o a questa molecola stessa, proviene o dal solvente in istato di forte depolimerizzazione o da gruppi molecolari idratati, o dall'una e dall'altra origine insieme. L'idratazione ha certo come conseguenza la depolimerizzazione delle molecole del solvente.

Concludendo: La presenza della radiazione 1306 cm^{-1} e la forte intensità della banda dell'acqua 3589 cm^{-1} giustificano l'opinione che, fino a 7 Mole per litro almeno, nelle soluzioni acquose di acido nitrico non solo esista una molecola $O_2N \cdot OH$, ma forse anche un aggregato della forma

(1) London, «Zeitschr. f. Phys.», *46*, p. 471, 1928.
(2) «Phys. Rev.», *35*, p. 284, 1930.
(3) R. Brunetti e Z. Ollano, loc. cit.

supposta da Hantzsch $O_2N \cdot OH \cdot H_2O$. Anche il valore della concentrazione alla quale la riga Raman attribuita al gruppo NO_2 non è più visibile (al di sotto di 7 Mole per litro) è in buon accordo col calcolo di Hantzsch [1], il quale dà per 10 Mole per litro il 50 % di $O_2N \cdot OH$ e per 6 Mole per litro solo il 2 % di $O_2N \cdot OH$.

L'esistenza del gruppo OH non è accertabile perchè la sua radiazione caratteristica, se esiste, cade nella regione stessa in cui si trovano le bande dell'acqua.

5. – Oltre le radiazioni citate e interpretate noi abbiamo ottenuto dalle nostre soluzioni altri due gruppi di radiazioni.

Le prime sono le 640, 690, 950 cm^{-1}. Esse, intense in soluzioni concentrate, scompaiono con la diluizione. La 960 cm^{-1}, per quanto a 13.4 Mole per litro sia di intensità paragonabile a quella della 690 cm^{-1}, persiste forse un po' più a lungo delle altre due, che, al disotto di 10 Mole per litro di concentrazione, non sono più visibili sulle nostre lastre.

Il secondo gruppo di radiazioni molto deboli e a lettura molta incerta sono sfuggite ad alcuni ricercatori. La prima a frequenza 1138 cm^{-1} è stata osservata anche da Ganesan e Venkateswaran [2] in acido nitrico al 65 %. Essa sulle nostre lastre appare anche a concentrazioni basse. La seconda notata da Rao [3] cade fra due bande dell'acqua ed ha frequenza 3324 cm^{-1}, se si suppone che la sua eccitazione sia dovuta alla 4047 Å del mercurio come fa Rao.

Abbiamo visto quali sono in certo ordine di idee le previsioni che possono farsi circa le radiazioni provenienti dall'acido nitrico in soluzione acquosa. Finchè non si siano raccolti nuovi elementi relativamente a tutte le radiazioni di cui sono suscettibili sia il gruppo NO_2 in legame analogo a quello in cui esso si trova in acido nitrico, sia i componenti della molecola $(NO_3)(H_3O)$, è immaturo assegnare un'origine definita alle radiazioni citate in questo ultimo paragrafo.

Basti per ora aver messo in evidenza come dallo studio dell'effetto Raman delle sue soluzioni resulta una prova diretta della costituzione dell'acido nitrico concentrato abbastanza diffusamente ammessa già dai chimici e in quella forma $O_2N \cdot OH$ che inquadra anche con le recenti idee sulla costituzione molecolare esposta da London [4].

Con quanto si è detto in questo e nel precedente lavoro sul comportamento nelle soluzioni delle bande dell'acqua abbiamo messo in luce che l'effetto Raman può dare indicazioni anche relativamente al processo di solvatazione.

(1) « Zeitschr. f. Elektrochemie u. angew. phys. Chemie », *31*, p. 167, 1925.
(2) Loc. cit.
(3) « Nat. », *124*, p. 762, 1929.
(4) Loc. cit.

Fisica (Fisica teorica). — *Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno.* Nota di E. MAIORANA[1] presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Termini anomali con entrambi gli elettroni eccitati sono da lungo tempo conosciuti in atomi con due elettroni di valenza; notiamo in particolare i seguenti, che sono in parte ben noti in numerosi elementi neutri o ionizzati: $2p\ 2p\ {}^3P_{012}$, $2p\ 2p\ {}^1D$, $2p\ 2p\ {}^1S$. Formalmente analogo a questi ultimi sarebbe, secondo una recente interpretazione[2], il termine X della *molecola* di idrogeno, a cui spetterebbe precisamente la configurazione $(2p\sigma)\ {}^{21}\Sigma g$. Ma l'analogia non sussiste nei riguardi energetici; mentre infatti negli atomi la frequenza della riga $2p\ 2p \rightarrow 1s\ 2p$ è dello stesso ordine di grandezza della frequenza $1s\ 2p \rightarrow 1s\ 2s$, al contrario il termine X è relativamente profondo, poco più alto del termine normale $1s\sigma\ 2p\sigma\ {}^1\Sigma_u$ con cui dà intense combinazioni nell'ultra-rosso, ma il secondo a sua volta è assai più elevato dello stato fondamentale $(1s\sigma)\ {}^{21}\Sigma g$ (ca. 12 volt.); sorge di qua la difficoltà di giustificare in via teorica la anormale posizione energetica di detto termine anomalo e la sua stessa esistenza. A tale difficoltà Weizel ha cercato di ovviare con una valutazione problematica, fondata su dubbie analogie; noi abbiamo affrontato direttamente la questione, e i nostri calcoli sembrano confermare la presunzione di Weizel che esista un termine profondo $(2p\sigma)\ {}^{21}\Sigma g$, benchè la distanza teorica di equilibrio dei nuclei si accordi meglio con il termine K (secondo Weizel $2p\sigma\ 3p\sigma\ {}^1\Sigma g$) che con il termine X.

Risulta peraltro che la qualifica di stato con due elettroni eccitati è puramente formale, e in realtà la designazione dei termini mediante gli stati dei singoli elettroni, se giova alla loro numerazione e al riconoscimento di quei caratteri di simmetria che non sono turbati dall'interazione, non permette da sola di trarre conclusioni attendibili sulla forma effettiva delle autofunzioni; le cose stanno qui ben diversamente che nel caso di campi centrali, dove è in generale possibile astrarre dall'interdipendenza dei movimenti degli elettroni (polarizzazione), senza perder di vista l'essenziale.

Il termine $(2p\sigma)\ {}^{21}\Sigma g$ di cui ci dobbiamo occupare si può pensare come parzialmente costituito dall'unione $H^+ + H^-$, il che non significa che sia un composto polare, poichè per l'uguaglianza dei costituenti il momento elettrico cambia segno con frequenza elevata (frequenza di scambio)

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) W. WEIZEL, « Zeitschr. f. Phys. », *65*, 456, 1930.

e non è quindi osservabile; in questo senso parliamo di composto pseudopolare.

Tutto ciò vale soltanto in una rozza approssimazione e per una descrizione più accurata, benchè ancora assai schematica, è necessario considerare la reazione $H^+ + H^-$ insieme con l'altra $H + H$ che fu da sola esaminata da Heitler e London [1]; limitandoci allora ai termini *pari* che ne risultano troviamo: 1) lo stato fondamentale $(1s\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$ in seconda approssimazione rispetto al metodo di Heitler e London; 2) lo stato anomalo $(2p\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$. Il primo deriva prevalentemente da $H + H$, il secondo prevalentemente da $H^+ + H^-$.

1. Se si divide lo spazio delle configurazioni in quattro regioni *aa*, *ab*, *ba*, *bb*, secondo che ciascuno degli elettroni è più vicino al nucleo *a* o al nucleo *b*, e si prescinde per un momento dall'interazione, le quattro possibilità sono egualmente rappresentate nello stato $(2p\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$ ma l'autofunzione è, ad es., positiva in *aa* e *bb*, negativa negli altri due casi; l'interazione accresce la probabilità di trovare il sistema di *aa* e *bb* e diminuisce quella di trovarlo in *ab* e *ba*. Si riconosce facilmente questo comportamento anormale osservando che lo stato $(2f\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$ deve essere ortogonale allo stato fondamentale, e in questo, come la riconosciuta applicabilità del metodo di Heitler e London lascia presumere, sono rappresentati in modo preponderante, per nuclei sufficientemente lontani, le regioni *ab* e *ba*; possiamo quindi ritenere che con qualche approssimazione appartiene a $(2p\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$ l'autofunzione di $H^- + H^+$ simmetrizzata nei nuclei; che tale approssimazione sia peraltro insufficiente s'immagina facilmente se si osserva che in tal modo le superficie nodali vanno interamente perdute. Queste ricompaiono se si include nel calcolo di perturbazione l'unione $H + H$ di due atomi neutri. Indicando con Φ_{12} e Ψ_{12} le autofunzioni elettroniche di H^- rispettivamente intorno al nucleo *a* e intorno al nucleo *b*, e con φ o ψ l'autofunzione dell'atomo neutro *a* o *b*, si possono costruire come combinazione delle configurazioni $H^- + H^+$, $H^+ + H^-$, $H + H$ (quest'ultima doppia per risonanza degli elettroni) due autofunzioni pari appartenenti al sistema dei singoletti:

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = \Phi_{12} + \Psi_{12} \\ y_2 = \varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1 . \end{cases}$$

Degli altri due stati che derivano delle stesse configurazioni ed hanno simmetria differente non ci occupiamo; essi sono lo stato dispari dei tripletti $1s\sigma\ 2p\sigma\ {}^3\Sigma_u$, instabile e già considerato da Heitler e London e, con qualche approssimazione, lo stato $1s\sigma\ 2p\sigma\ {}^1\Sigma_u$ che appartiene ai singoletti ma è anch'esso dispari. Gli stati y_1 e y_2 dati da (1) non sono ortogonali, ma lo stato fondamentale $(1s\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$ e lo stato anomalo $(2p\sigma)\,{}^{21}\Sigma g$ devono risul-

(1) W. Heitler e F. London, «Zeitschr. f. Phys.», *44*, 455, 1927.

tare da loro combinazioni ortogonali. L'equazione secolare per la determinazione degli autovalori si scrive:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} I_0 + I_1 - (1+S)E & 2M - 2QE \\ 2M - 2QE & L_0 + L_1 - (1+R)E \end{vmatrix}$$

essendo, se le autofunzioni sono reali:

$$(3) \qquad \begin{aligned} I_0 &= \int \varphi_1 \psi_2 H \varphi_1 \psi_2 \, d\tau \\ I_1 &= \int \varphi_2 \psi_1 H \varphi_1 \psi_2 \, d\tau \\ L_0 &= \int \Phi_{12} H \Phi_{12} \, d\tau \\ L_1 &= \int \Phi_{12} H \Psi_{12} \, d\tau \\ M &= \int \varphi_1 \psi_2 H \Phi_{12} \, d\tau \\ S &= \int \varphi_1 \psi_1 \varphi_2 \psi_2 \, d\tau \\ R &= \int \Phi_{12} \Psi_{12} \, d\tau \\ Q &= \int \varphi_1 \psi_2 \Phi_{12} \, d\tau \end{aligned}$$

Se si assume come zero dell'energia quella, ad es., degli atomi neutri separati si può riguardare H come perturbazione; la difierenza delle energie di $H^+ + H^-$ e $H + H$ figura allora naturalmente come perturbazione quando H è applicato a Φ_{12} o a Ψ_{12}.

2. Parte degli integrali (3) si trovano in Heitler e London [1] e Sugiura [2]; per valutare gli altri dobbiamo procurarci una espressione approssimata di Φ_{12}. Questa autofunzione, che descrive lo ione H^-, non è esattamente conosciuta, ma il suo autovalore, che è legato all'affinità elettronica dell'idrogeno, è stato calcolato con estrema precisione da varî autori [3]; questo semplifica la valutazione degli integrali (3) poichè H si riduce ad un operatore finito. Come espressione di Φ_{12} possiamo assumere con una certa approssimazione il prodotto $\Phi_1 \, \Phi_2$ di due autofunzioni dipendenti dai singoli elettroni; la soluzione migliore, nel senso della minima energia, è allora, come è noto, quella fornita dal metodo di Harthree, che nel nostro caso è con grande approssimazione:

$$\Phi_1 = \frac{C}{r_1} \left(e^{-0{,}29 \frac{r_1}{a_0}} - e^{-1{,}68 \frac{r_1}{a_0}} \right)$$

(1) W. Heitler e F. London, loc. cit.

(2) Y. Sugiura, « Zeitschr. f. Phys. ». *45*, 484, 1927.

(3) H. Bethe, « Zeitschr. f. Phys. », *57*, 815, 1929; E. A. Hylleraas, ivi, *60*, 624, 1930; P. Starodubroski, ivi, *65*, 806, 1930.

è analogamente per Φ_2, ma benchè sia possibile eseguire tutti i calcoli con questa autofunzione, la complicazione è eccessiva è abbiamo preferito l'espressione più semplice

$$\Phi_1 = c\, e^{-\frac{11}{16}\frac{r_1}{a_0}}$$

che è stata usata da Hylleraas nella sua teoria dell'idrite di litio solida [1]. L'uso dell'autofunzione approssimata Φ_{12} e il modo convenzionale d'intendere $H\Phi_{12}$ fornisce per M due valori differenti:

$$M = \int \varphi_1 \psi_2 H \Phi_{12}\, d\tau \qquad \text{e} \qquad M = \int \Phi_{12} H \varphi_1 \psi_2\, d\tau .$$

Abbiamo preferito la prima espressione che è più semplice e forse più esatta, ma come la seconda non si presta al calcolo, il controllo non ci è stato possibile, salvo che in casi limiti. Il più alto degli autovalori di (2) che appartiene a $(2p\sigma)\,^{21}\Sigma g$ diviene minimo a una distanza che male si accorda con la distanza d'equilibrio del termine X (circa 2 Å in luogo di 1,35), ma l'energia risulta allora di 7.5 volt al di sopra di quella degli atomi neutri separati e nello stato fondamentale, cioè circa 27000 cm^{-1} sotto il limite normale di H_2 (sperimentalmente per il termine X: 22000 cm^{-1}) e questo risultato è anche troppo favorevole, poichè per il metodo seguito era da aspettarsi un valore notevolmente minore del vero. Benchè non possiamo escludere in modo assoluto che l'interpretazione di Weizel sia falsa e che il termine $(2p\sigma)\,^{21}\Sigma g$, certamente stabile e relativamente profondo, non sia il termine X ma, o il termine K, o altro termine non ancora osservato, si può forse attribuire l'errore nella determinazione della posizione di equilibrio e il risultato troppo favorevole del calcolo dell'energia all'uso di una autofunzione poco corretta per H^-; una valutazione quantitativa è difficile, ma sembra certo che quella approssimazione tende a produrre errori nel senso stesso delle divergenze constatate fra calcolo ed esperienza.

(1) E. A. Hylleraas, «Zeitschr. f. Phys.», *63*, 771, 1930.

Fisica (Fisica Mat.). — *Teoria della esperienza di Melde.* Nota di R. Serini, presentata (1) dal Corrisp. G. Giorgi.

L'esperienza di Melde consiste, come è noto, in questo. Una corda vibrante fissa ad un estremo è sollecitata a muoversi trasversalmente perchè l'altro estremo è attaccato ad uno dei rebbi di un diapason. Si tratta di trovare il movimento della corda. Sia $u(x, t)$ lo spostamento trasversale: la u dovrà soddisfare alle condizioni ai limiti (l ascissa del punto fisso)

$$u(l, t) = 0 \quad , \quad u(0, t) \begin{cases} = f(t) & \text{per } t > 0 \\ = 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases} , u(x, 0) = 0 \quad , \quad \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0} = 0 ,$$

e all'equazione delle corde vibranti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{1}$$

La soluzione si ottiene facilmente col metodo degli operatori differenziali sviluppato specialmente dal Giorgi (2).

Avendo posto $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, scriviamo la (1) sotto la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\Delta^2}{a^2} u .$$

Essa ha per integrale generale

$$u = e^{\frac{x\Delta}{a}} C_1(t) - e^{\frac{-x\Delta}{a}} C_2(t) .$$

Siccome per $x = 0$, $u = f(t)$ e per $x = l$, $u = 0$: si deve avere

$$C_1(t) + C_2(t) = f(t) ,$$

$$e^{\frac{l\Delta}{a}} C_1(t) + e^{\frac{-l\Delta}{a}} C_2(t) = 0 ,$$

da cui

$$C_1(t) = \frac{-e^{\frac{-l\Delta}{a}}}{e^{\frac{l\Delta}{a}} - e^{\frac{-l\Delta}{a}}} f(t) ,$$

$$C_2(t) = \frac{e^{\frac{l\Delta}{a}}}{e^{\frac{l\Delta}{a}} - e^{\frac{-l\Delta}{a}}} f(t) ,$$

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) Ved. p. es. Giorgi, *Lezioni di Fisica Matematica tenute nella Univ. di Cagliari*, 1926-27, cap. XI e sgg., oppure: Giorgi, *On the functional dependence of physical variables*. Congresso di Toronto 1924.

cosicchè infine si ha:

$$(2) \qquad u(x,t) = \frac{e^{\frac{l-x}{a}\Delta} - e^{-\frac{l-x}{a}\Delta}}{e^{\frac{l}{a}\Delta} - e^{-\frac{l}{a}\Delta}} f(t).$$

Se ora dell'operatore a secondo membro consideriamo la soluzione fondamentale dedotta dal principio di successione, tenendo conto che $f(t) = 0$ per $t < 0$, verranno soddisfatte anche le condizioni

$$u(x,0) = 0, \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$$

L'operatore che sta a secondo membro nella (2) è facilmente calcolabile. Si può infatti scrivere

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x}{a}\Delta} - e^{-\frac{2l-x}{a}\Delta}}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\Delta}} f(t) =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\Delta}} \left[f\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) \right],$$

applicando la formola $e^{h\Delta} \cdot f(t) = f(t+h)$

Ma siccome (con $\alpha > 0$)

$$\frac{1}{1 - e^{-\alpha\Delta}} = 1 + e^{-\alpha\Delta} + e^{-2\alpha\Delta} + \cdots$$

si ha in definitiva

$$u = f\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{2l-x}{a}\right)$$

$$+ f\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) - f\left(t - \frac{4l-x}{a}\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

tenendo conto che $f(t) = 0$ per $t \leq 0$.

Per esempio per $0 < t < \frac{l}{a}$ si ha da considerare soltanto il primo termine, per $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ i primi due: per $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ i primi tre e così via.

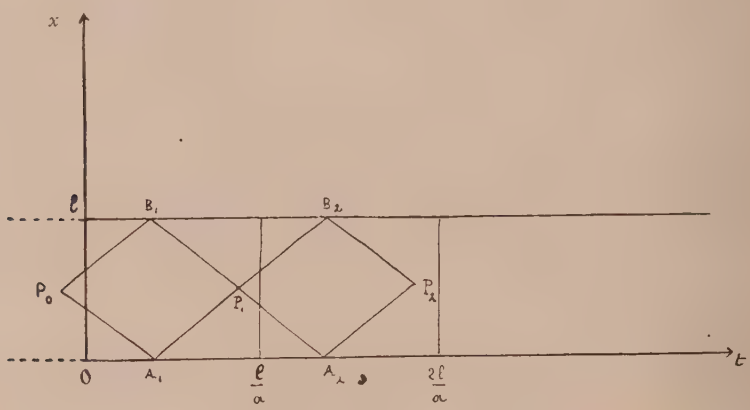
Il problema è così risolto.

Farò ora vedere come allo stesso risultato si arrivi col metodo di Riemann o delle caratteristiche [1].

Se si considera un circuito chiuso e s ne è l'arco, n la normale interna, si ha per una funzione u soddisfacente alla (1)

$$(3) \qquad \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \widehat{nx} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \cos \widehat{nt} \right) ds = 0 .$$

Consideriamo nella figura un punto $P_1 (t , x)$ del primo rettangolo per cui $t \leqq \frac{l}{a}$, $x \leqq l$: da esso conduciamo le caratteristiche di equazioni $X - aT = x - at$, $X + aT = x + at$ nel verso delle t decrescenti fino



ad ottenere i punti A_1 , B_1 e da questi le caratteristiche fino ad ottenere il punto P_0.

Avremo intanto sulla retta $x = 0 , u = f(t)$ per $t > 0$ sulla retta $x = l , u = 0$, sul segmento Ol (cioè per $t = 0$) $u = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = 0$. Cosicchè potremo estendere la nostra funzione u anche alla striscia $t < 0$, $0 \leqq x \leqq l$ facendo in essa $u = 0$.

Applichiamo la relazione (3) al circuito $A_1 P_1 B_1 P_0$: lungo le caratteristiche $A_1 P_1 , B_1 P_0$ si ha rispettivamente:

$$\cos \widehat{nx} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} , \cos \widehat{nt} = \mp \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} , ds = \begin{cases} \pm \sqrt{1 + a^2}\, dt \\ \pm \dfrac{\sqrt{1 + a^2}}{a}\, dx \end{cases} ,$$

(1) Ved. Riemann-Weber, *Partielle Differential-Gleichungen der mathematischen Physik*, 5ª ediz., 2° vol., pp. 217-219.

Ivi è contenuto quanto occorre per la risoluzione del problema attuale che però io risolvo qui con metodo più semplice.

lungo le $P_1 B_1$, $P_0 A_1$ si ha rispettivamente:

$$\cos \widehat{nx} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \cos \widehat{nt} = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}, ds = \begin{cases} \mp \sqrt{1 + a^2}\, dt \\ \pm \dfrac{\sqrt{1 + a^2}}{a}\, dx \end{cases}.$$

Moltiplicando la (3) per a e tenendo conto delle relazioni ora poste si ha

$$\int_{A_1}^{P_1} du - \int_{P_1}^{B_1} du + \int_{B_1}^{P_0} du - \int_{P_0}^{A_1} du = 0,$$

ossia siccome $u(B_1) = 0$, $u(P_0) = 0$, $u(P_1) = u(A_1)$.

Ma le coordinate di A_1 sono $\left(t - \frac{x}{a}, 0\right)$ quindi $u(A_1) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ e perciò per $0 < t \leq \frac{l}{a}$

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

intendendosi pel secondo membro lo zero se $t < \frac{x}{a}$ cioè se il punto A_1 cade a sinistra di O.

Se il punto P_2 è nel secondo rettangolo, applicando il teorema precedente al parallegramma $A_2 P_2 B_2 P_1$ si ha

$$\int_{A_2}^{P_2} du - \int_{P_2}^{B_2} du + \int_{B_2}^{P_1} du - \int_{P_1}^{A_2} du = 0,$$

ossia siccome $u(B_2) = 0$,

$$u(P_2) = u(A_2) - u(P_1).$$

Ora il punto A_2 ha coordinate $\left(t - \frac{x}{a}, 0\right)$ se P_2 ha coordinate t, x, quindi $u(A_2) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$: il punto P_1 ha per coordinate (come appare da un facile calcolo)

$$t_1 = t - \frac{l}{a},$$

$$x_1 = l - x,$$

quindi

$$u(P_1) = f\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = f\left(t - \frac{2l - x}{a}\right),$$

e perciò per $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ si ha

$$u = f\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{2l - x}{a}\right)$$

in accordo col risultato trovato precedentemente. Il metodo è estendibile per induzione agli intervalli seguenti, e si ottiene il risultato già ottenuto col metodo simbolico.

Fisica (Elettrotecnica). — *Teorema sulle reti elettriche passive.* Nota di A. Marino, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

Nella presente Nota viene data la dimostrazione di un importante e poco noto teorema sulle reti elettriche passive enunciato la prima volta, nel caso di una rete di capacità, dal Campbell [2], e successivamente, nel caso di reti a lati con resistenze, capacità ed induttanze, dal Rosen [3], il quale ultimo ha indicato il teorema stesso come una generalizzazione del teorema di Kennelly [4] dell'equivalenza di un sistema stellare a tre raggi ad un sistema triangolare, senza però dare del teorema generalizzato una dimostrazione diretta.

Il teorema di cui sopra può enunciarsi come segue:

« In una rete elettrica passiva, un nodo n che non sia alimentato dall'esterno, può essere soppresso, senza alterare la distribuzione, allo stato di regime, dei potenziali e delle correnti nel resto della rete, purchè le conduttanze immaginarie tra i nodi terminali dei raggi uscenti dal nodo n da sopprimere siano aumentate dal prodotto delle conduttanze immaginarie dei raggi uscenti da n e terminanti ai due nodi, tra i quali l'induttanza stessa viene considerata, divisa per la somma delle conduttanze immaginarie dei raggi uscenti da n ».

In particolare, riferendoci alla rete della fig. 1, possiamo in essa sopprimere il nodo n senza alterare la distribuzione, allo stato di regime, delle correnti e dei potenziali nel resto della rete, purchè le conduttanze immaginarie Y, tra i nodi terminali di due qualsiasi dei raggi uscenti da n siano sostituite dalle nuove conduttanze immaginarie Y′ date dalle seguenti relazioni:

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) G. A. Campbell, *Direct Capacity Measurement.* « Bell System Technical Journal », july 1922.

(3) A. Rosen, *A New Network Theorem.* « Journal I. E. E. », 1924, vol. 62, p. 916.

(4) A. E. Kennelly, *The equivalence of Triangles and Three pointed Star in Conducting Networks.* « Electrical World and Engineer », vol. XXIV, n. 12, pp. 413-414.

$$(1)\qquad \begin{cases} \left[Y'_{1s} = Y_{1s} + \dfrac{Y_{1n}\, Y_{sn}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{rn}} \right]_{\text{per } s = 2,3,\cdots,(n-1)} \\ \left[Y'_{2s} = Y_{2s} + \dfrac{Y_{2n}\, Y_{sn}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{rn}} \right]_{\text{per } s = 1,3,\cdots,(n-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[Y'_{(n-1)s} = Y_{(n-1)s} + \dfrac{Y_{(n-1)n}\, Y_{sn}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{rn}} \right]_{\text{per } s = 1,2,\cdots,(n-2)}. \end{cases}$$

Per dimostrare il teorema suddetto, è necessario prima stabilire le relazioni che, in una rete elettrica, i cui lati comprendono resistenze, capa-

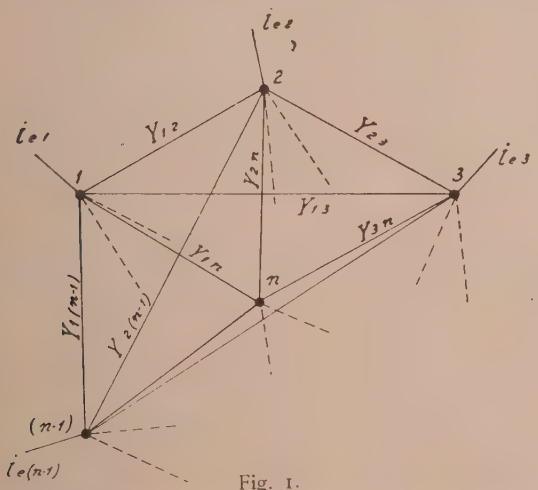


Fig. 1.

cità ed induttanze, legano allo stato di regime, le correnti di alimentazione ai potenziali nei diversi nodi della rete stessa. A tale scopo, riferendoci ad una rete qualunque a n nodi, indichiamo in un dato istante con:

$$i_{e1}, i_{e2}, \cdots, i_{en}$$

le correnti di alimentazione dall'esterno dei nodi $1, 2, \cdots, n$ della rete; con:

$$|i_{1s}|_{\text{per } s=2,3,\cdots,n}, \quad |i_{2s}|_{\text{per } s=1,3,\cdots,n}, \quad \cdots, \quad |i_{ns}|_{\text{per } s=1,2,\cdots,(n-1)}$$

le correnti nei lati che fanno capo rispettivamente ai nodi $1, 2, \cdots, n$; con:

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

i potenziali nei nodi $1, 2, \cdots, n$.

Applicando ai nodi $1, 2, \cdots, n$ il primo principio di Kirkhoff, avremo:

$$(2)\qquad \begin{cases} i_{e1} = i_{12} + i_{13} + \cdots + i_{1n} \\ i_{e2} = i_{21} + i_{23} + \cdots + i_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_{en} = i_{n1} + i_{n2} + \cdots + i_{n(n-1)}. \end{cases}$$

Tra i potenziali di due nodi qualsiasi della rete e la corrente che percorre il lato che collega i due nodi stessi si hanno inoltre le seguenti relazioni:

$$\left[v_1 - v_s = R_{1s}\, i_{1s} + L_{1s}\frac{di_{1s}}{dt} + \frac{1}{C_{1s}}\int i_{1s}\, dt\right]_{\text{per } s=2,3,\cdots,n}$$

$$\left[v_2 - v_s = R_{2s}\, i_{2s} + L_{2s}\frac{di_{2s}}{dt} + \frac{1}{C_{2s}}\int i_{2s}\, dt\right]_{\text{per } s=1,3,\cdots,n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[v_n - v_s = R_{ns}\, i_{ns} + L_{ns}\frac{di_{ns}}{dt} + \frac{1}{C_{ns}}\int i_{ns}\, dt\right]_{\text{per } s=1,2,\cdots,(n-1)}.$$

Nel caso che le correnti i e le tensioni v siano funzioni armoniche semplici del tempo di pulsazione ω, considerando lo stato di regime si avrà:

$$\left[v_1 - v_s = \left(R_{1s} + j\omega L_{1s} + \frac{1}{j\omega C_{1s}}\right) i_{1s}\right]_{\text{per } s=2,3,\cdots,n}$$

$$\left[v_2 - v_s = \left(R_{2s} + j\omega L_{2s} + \frac{1}{j\omega C_{2s}}\right) i_{2s}\right]_{\text{per } s=1,3,\cdots,n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[v_n - v_s = \left(R_{ns} + j\omega L_{ns} + \frac{1}{j\omega C_{ns}}\right) i_{ns}\right]_{\text{per } s=1,2,\cdots,(n-1)}.$$

Ovvero indicando con $Y_{1s}, Y_{2s}, \cdots$, le conduttanze immaginarie, si ha:

$$[(v_1 - v_s)\, Y_{1s} = i_{1s}]_{\text{per } s=2,3,\cdots,n}$$

$$[(v_2 - v_s)\, Y_{2s} = i_{2s}]_{\text{per } s=1,3,\cdots,n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[(v_n - v_s)\, Y_{ns} = i_{ns}]_{\text{per } s=1,2,\cdots,(n-1)}.$$

Sostituendo detti valori di $i_{1s}, i_{2s}, \cdots, i_{ns}$ nel sistema di equazioni 2, si avrà:

$$(3)\quad \begin{cases} i_{e1} = (v_1 - v_2)\,Y_{12} + (v_1 - v_3)\,Y_{13} + \cdots + (v_1 - v_n)\,Y_{1n} \\ i_{e2} = (v_2 - v_1)\,Y_{21} + (v_2 - v_3)\,Y_{23} + \cdots + (v_2 - v_n)\,Y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_{en} = (v_n - v_1)\,Y_{n1} + (v_n - v_2)\,Y_{n2} + \cdots + (v_n - v_{(n-1)})\,Y_{n(n-1)}\,. \end{cases}$$

Ne segue dunque che in una rete elettrica passiva, allo stato di regime, le correnti di alimentazione sono funzioni lineari omogenee dei potenziali

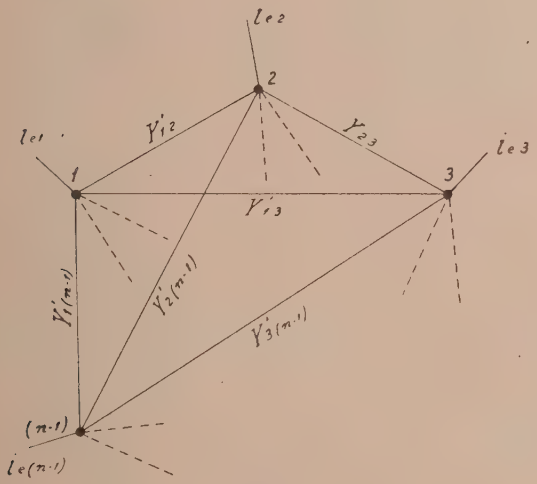


Fig. 2.

che si hanno ai nodi della rete stessa; le relazioni sono identiche a quelle che si hanno in un sistema di conduttori tra le cariche e i potenziali dei conduttori stessi.

Premesso quanto sopra, per dimostrare l'equivalenza della rete della fig. 1, a quella della fig. 2, nella quale il nodo n è stato soppresso e nella quale ai valori delle conduttanze immaginarie tra i nodi terminali dei raggi uscenti da n sono stati sostituiti i valori Y′ dati dalle relazioni (1), immaginiamo che le correnti di alimentazione dall'esterno della rete della fig. 1 che indicheremo con $i_{e1}, i_{e2}, \cdots, i_{en}$, siano eguali alle correnti di alimentazione dall'esterno dei corrispondenti nodi della rete della fig. 2; indichiamo allora con $v_1, v_2, \cdots, v_{(n-1)}$ i potenziali dei nodi $1, 2, \cdots, (n-1)$ della rete della fig. 1 e con $v'_1, v'_2, \cdots, v'_{(n-1)}$ i potenziali dei corrispondenti

nodi $1, 2, \cdots, (n-1)$ della fig. 2; perchè le due reti siano equivalenti, i potenziali dei nodi corrispondenti dovranno risultare eguali.

Appplichiamo le relazioni di cui al sistema (3) al caso delle reti della fig. 1 e fig. 2; nel caso della fig. 1, tenendo presente che il nodo n da sopprimere non è alimentato dall'esterno, avremo:

$$(4)\quad \begin{cases} i_{e1} = (v_1 - v_2)\,Y_{12} + (v_1 - v_3)\,Y_{13} + \cdots + (v_1 - v_n)\,Y_{1n} \\ i_{e2} = (v_2 - v_1)\,Y_{21} + (v_2 - v_3)\,Y_{23} + \cdots + (v_2 - v_n)\,Y_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = (v_n - v_1)\,Y_{n1} + (v_n - v_2)\,Y_{n2} + \cdots + (v_n - v_{(n-1)})\,Y_{n(n-1)}\,. \end{cases}$$

Nel caso della rete della fig. 2 avremo:

$$(5)\quad \begin{cases} i_{e1} = (v'_1 - v'_2)\,Y'_{12} + (v'_1 - v'_3)\,Y'_{13} + \cdots + (v'_1 - v'_{(n-1)})\,Y'_{1(n-1)} \\ i_{e2} = (v'_2 - v'_1)\,Y'_{21} + (v'_2 - v'_3)\,Y'_{23} + \cdots + (v'_2 - v'_{(n-1)})\,Y'_{2(n-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_{e(n-1)} = (v'_{(n-1)} - v'_1)\,Y'_{(n-1)1} + (v'_{(n-1)} - v'_2)\,Y'_{(n-1)2} + \cdots\cdots + \\ \qquad + (v'_{(n-1)} - v'_{(n-2)})\,Y'_{(n-1)(n-2)}\,. \end{cases}$$

Ricaviamo dall'ultima equazione del sistema (4) il valore v_n del potenziale nel nodo n da sopprimere e sostituiamolo nella prima equazione dello stesso sistema; avremo, tenendo presente che $Y_{rs} = Y_{sr}$

$$i_{e1} = Y_{12}(v_1 - v_2) + Y_{13}(v_1 - v_3) + \cdots + \\ + Y_{1n}\left[v_1 - \frac{Y_{n1}v_1 + Y_{n2}v_2 + \cdots + Y_{n(n-1)}v_{(n-1)}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{nr}}\right]$$

$$= Y_{12}(v_1 - v_2) + Y_{13}(v_1 - v_3) + \cdots + \\ + \frac{Y_{n1}Y_{n2}(v_1 - v_2) + Y_{n1}Y_{n3}(v_1 - v_3) + \cdots + Y_{n1}Y_{n(n-1)}(v_1 - v_{(n-1)})}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{nr}}$$

$$= \left(Y_{12} + \frac{Y_{n1}Y_{n2}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{nr}}\right)(v_1 - v_2) + \left(Y_{13} + \frac{Y_{n1}Y_{n3}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{nr}}\right)(v_1 - v_3) + \cdots + \\ + \left(Y_{1(n-1)} + \frac{Y_{n1}Y_{n(n-1)}}{\sum_{r=1}^{n-1} Y_{nr}}\right)(v_1 - v_{(n-1)})\,.$$

Sostituendo il valore di v_n anche nelle altre equazioni $2, 3, \cdots, n-1$ del sistema (4) e tenendo presenti le relazioni (1), avremo in definitiva:

$$(6)\quad \begin{cases} i_{e1} = (v_1 - v_2)\,Y'_{12} + (v_1 - v_3)\,Y'_{13} + \cdots + (v_1 - v_{(n-1)})\,Y'_{1(n-1)} \\ i_{e2} = (v_2 - v_1)\,Y'_{21} + (v_2 - v_3)\,Y'_{23} + \cdots + (v_2 - v_{(n-1)})\,Y'_{2(n-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_{e(n-1)} = (v_{(n-1)} - v_1)\,Y'_{(n-1)1} + (v_{(n-1)} - v_2)\,Y'_{(n-1)2} + \cdots + \\ \qquad + (v_{(n-1)} - v_{(n-2)})\,Y'_{(n-1)(n-2)}. \end{cases}$$

Confrontando il sistema (6) con quello (5) si rileva subito che:

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 \\ v'_2 &= v'_2 \\ &\cdots\cdots \\ v_{(n-1)} &= v'_{(n-1)} \end{aligned} \qquad \text{c. b. d.}$$

In quanto sopra esposto se invece delle conduttanze immaginarie dei lati della rete, avessimo considerato le impedenze immaginarie X, si sarebbero avute per le impedenze X′ dei lati della rete della figura 2 ottenuta dopo la soppressione del nodo n, le seguenti espressioni:

$$\left[X'_{1s} = \frac{1}{\dfrac{1}{X_{1s}} + \dfrac{1}{X_{1n} X_{sn} \displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} \dfrac{1}{X_{rn}}}} \right]_{\text{per } s = 2, 3, \cdots, (n-1).}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il teorema suddetto risulta di grande utilità nello studio delle reti elettriche passive, inquantochè permette di passare rapidamente da reti molto complesse a reti molto semplici.

Fisica. — *Su un nuovo tipo di cavo elettrico disuniforme.* Nota di M. Federici, presentata dal Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Prodotti di condensazione tra glucosio e p-toluidina* [1]. Nota di M. AMADORI, presentata [2] dal Socio N. PARRAVANO.

In precedenti ricerche [3] ho dimostrato come il glucosio formi con la p-fenetidina e con la p-anisidina due prodotti di condensazione isomeri che si ottengono quando si operi in condizioni diverse; l'uno facendo reagire i due componenti a freddo o a moderato calore in soluzione alcolica, l'altro invece per reazione a secco a temperatura più elevata; per varie ragioni esposte in quelle note ha concluso che al primo si deve assegnare la costituzione glucosidica, al secondo la costituzione di base di Schiff.

È stato così dimostrato che le ipotesi di copulazione secondo l'uno o l'altro tipo emesse dai precedenti autori avevano possibilità di realizzarsi, e che prodotti di carattere diverso già descritti risultanti da reazioni tra la stessa base e il glucosio erano realmente capaci di esistere quando si fossero variate le condizioni di reazione.

Tra le condensazioni che furono oggetto di studio accurato da parte di precedenti autori è la condensazione della p-toluidina con glucosio studiata prima da Sorokin [4], e poi più estesamente da Jrvine e Gilmour [5].

Questi autori hanno agito in soluzione alcolica ottenendo un unico composto che si forma per condensazione in rapporti equimolecolari, e che per i suoi caratteri si manifesta di natura glucosidica, come entrambi gli autori affermano.

Specialmente da ricordare sono le ricerche di Jrvine e Gilmour che ottennero il composto diversamente cristallizzato e con un diverso contenuto in acqua a seconda della quantità di solventi impiegata nella preparazione, e a seconda che questi contenevano più o meno acqua; e cioè un composto cristallizzato in aghi di p. f. 115–120°, altro cristallizzato in tavole di p. f. 117-119°; ottennero anche un prodotto anidro cristallizzato in prismi per ebollizione dei primi con acetato di etile. Il potere rotatorio specifico dei due primi prodotti risultò negativo con mutarotazione che portava il potere rotatorio specifico da — 94° ad un equilibrio di — 45°, il terzo prodotto aveva un potere rotatorio iniziale positivo di + 182° che passava a negativo raggiungendo esso pure l'equilibrio di — 45°.

I composti ottenuti da Sorokin e da Jrvine e Gilmour appartengono al tipo glucosidico, capace di esistere in due forme stereoisomere, e le ri-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Modena.
(2) Nella seduta del 21 dicembre 1930.
(3) Questi «Rendiconti», II, 2° sem. 337 (1925); IX, 1° sem., 68 e 226 (1929).
(4) «Journ. f. prakt. Chem.», 37, 291 (1894).
(5) «Journ. Chem. Soc.», 95, 1545 (1909).

cerche di Jrvine e Gilmour dimostrano che la modificazione β ha potere rotatorio negativo e la modificazione α ha potere rotarorio positivo.

Non furono ottenuti dai detti autori composti che potessero far pensare ad un diverso tipo di condensazione.

In questa nota riferisco le ricerche che ho eseguito sulla condensazione del glucosio con la p–toluidina, e che hanno anche per questa base portato a due tipi di condensazione diversa a seconda che essa viene eseguita in soluzione o per via secca.

Composto A: p. f. 115°.

Si prepara facendo reagire gr. 7 di toluidina e gr. 10 di glucosio (in rapporto equimolecolare con lieve eccesso di p-toluidina) in soluzione di 80 gr. alcol etilico a 95°, facendo bollire moderatamente la miscela fino a soluzione completa del glucosio; viene poi allontanato per distillazione poco più di una metà d'alcol. Dalla soluzione a freddo lentamente si separa cristallino il composto; si può avere un rendimento maggiore se si completa la precipitazione dalla soluzione alcolica con aggiunta di etere. Il prodotto che viene purificato per ricristallizzazione dall'alcol, e i cristalli ottenuti possono esser lavati con etere, oppure posti direttamente in essiccatore a vuoto. Il prodotto trattiene piccole quantità di alcol e di acqua che difficilmente si possono togliere. Per allontanare l'alcol è opportuno il lavaggio con etere, per l'acqua porre la sostanza in essiccatore a vuoto; però non si riesce ad allontanarla completamente, come dimostrano i risultati d'analisi e sopratutto il contenuto in C inferiore al teorico. All'aria il prodotto si altera piuttosto facilmente, sopratutto se esso non è molto puro.

Aghi splendenti bianchi. È alquanto solubile in acqua a freddo, ma successivamente la soluzione si scompone; è solubile in alcol etilico e metilico a freddo, molto più a caldo, e le soluzioni sono stabili; è insolubile in etere e in altri solventi organici.

All'analisi del prodotto lavato con etere risultò un contenuto di

$$C = 57.14\,\% \qquad H = 7.42\,\% \qquad N = 5.12\,\%$$

Il peso molecolare determinato in soluzione in alcol etilico all'ebollizione risultò

283.9 a conc. 3.33 %; 292.0 a conc. 5.96 %

Calcolato per $C_{13}H_{19}O_5N$

$$C = 57.99\,\% \qquad H = 7.06\,\% \qquad N = 5.22\,\% \quad \text{p. m.} = 269$$

La differenza tra il contenuto trovato ed il teorico è dovuta a piccole quantità di acqua trattenuta dal composto.

Il potere rotatorio specifico della soluzione acquosa di conc. 2 % appena preparata risulta $[\alpha]_D^{20} = -82°$; il potere rotatorio negativo va lenta-

mente diminuendo, però dall'intorbidamento della soluzione è evidente la scomposizione della soluzione.

Il potere rotatorio specifico della soluzione in alcol etilico a conc. 1 % è $[\alpha]_D^{20°} = -85°$, appena preparata, scende lentamente a $-40°$ e si mantiene costante; poichè la soluzione alcolica è stabile, la diminuzione del potere rotatorio è indubbiamente dovuta a mutarotazione.

Gli stessi risultati si hanno in soluzione in alcol metilico.

Le prove di diazotazione eseguite sul composto dimostrano che in esso manca il gruppo amminico $-NH_2$. Se il composto viene mantenuto anche poco tempo in contatto con acido cloridrico esso si scinde, ed è allora manifestamente positiva la prova di diazotazione per la p-toluidina che si è resa libera.

La scomposizione del prodotto per azione degli acidi risulta anche dal comportamento delle soluzioni acide riguardo il potere rotatorio.

Il potere rotatorio di questo composto fu studiato anche in soluzione alcalina e in soluzione acida con i seguenti risultati.

Soluzione alcalina:

a) in acqua: in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N: $[\alpha]_D^{20°} = -75°$ costante

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: $[\alpha]_D^{20°} = -75°$ costante;

b) in alcol etilico a 90 %: in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N: $[\alpha]_D^{20°} = -72°$ appena preparata, poi passa lentamente a $-40°$, poi si mantiene costante

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: $[\alpha]_D^{20°} = -58°$ appena preparata, poi passa a $-42°$, poi si mantiene costante.

In alcol metilico si osserva comportamento analogo.

Soluzione acida:

a) in acqua: in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1 : 4: appena preparata $[\alpha]_D^{20°} = +32°$

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl conc.: appena preparata $[\alpha]_D^{20°} = +32°$

b) in alcol etilico a 90 %: in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1 : 4: appena preparata $[\alpha]_D^{20°} = 0°$, poi lentamente passa a $+32°$.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl conc.: appena preparata $[\alpha]_D^{20°} = +14°$, poi passa a $+32°$.

In soluzione alcalina il composto è alquanto stabile, tanto che si hanno valori di potere rotatorio che si avvicinano a quelli delle soluzioni neutre; nelle soluzioni acquose alcaline il composto appare più stabile che nelle soluzioni neutre.

In soluzione acida il composto si decompone in p-toluidina e glucosio, e la soluzione mostra subito il potere rotatorio che spetta alla corrispondente quantità di glucosio.

Dalle varie ricerche eseguite su questo composto di condensazione tra glucosio e p–toluidina risulta evidente che la condensazione avviene tra una molecola di glucosio e una molecola di p-toluidina con eliminazione di una molecola di acqua; la mancanza della reazione di diazotazione mostra che la condensazione avviene nel gruppo amminico della p–toluidina che si lega all'OH glucosidico del glucosio formando un composto che è instabile agli acidi, ed ha mutarotazione dovuta alla trasformazione tra le due forme α e β del glucoside.

Il composto corrisponde a quello descritto da Sorokin, e da Jrvine e Gilmour.

Composto B: p. f. 154°.

Si prepara scaldando a secco a 80-90° fino a fusione completa glucosio e p–toluidina in quantità uguale a quella impiegata per il composto precedente. La massa raffreddata venne sciolta in poco alcol etilico all'ebollizione; per raffreddamento si separa il composto che si purifica per ricristallizzazione dall'alcol.

Cristallizza in scaglie di color paglierino. È pochissimo solubile in acqua e in alcol a freddo; è più solubile a caldo. Fonde a 154°.

All'analisi risultò:

C = 58.05 % H = 7.34 % N 5.24 %

Il peso molecolare in soluzione in alcol etilico all'ebollizione risultò:

276.4 alla conc. 3.36; 288.2 alla conc. 5.52

Calcolato per $C_{13}H_{19}C_5n$

C = 57.99 % H = 7.06 % N = 5.22 % p. m. = 267

Il potere rotatorio specifico della soluzione acquosa di conc. 0.25 % risulta $[\alpha]_D^{20°}$ — 30°, — 25°, costante; quello della soluzione in alcol etilico a 0.5 % è $[\alpha]_D^{20°}$ — 25°, costante; quello della soluzione in alcol metilico a 1 % è $[\alpha]_D^{20°}$ = — 45° appena preparata la soluzione, scende poi a — 25°, e si mantiene costante.

Le prove di diazotazione eseguite sul composto dimostrarono che non è presente il gruppo $-NH_2$, cioè che questo gruppo ha preso parte alla condensazione. La prova di diazotazione fu positiva quando venne eseguita sul composto dopo averlo trattato con alcali, ciò che dimostra la scomposizione che esso subisce separando p-toluidina.

Anche di questo composto furono eseguite prove di determinazione del potere rotatorio in soluzione alcalina e in soluzione acida.

Soluzione alcalina:

a) in acqua: in 100 cc.

2 gr. prodotto × 2 cc. NaOH 2N: $[\alpha]_D^{20°} = -30°$ appena preparata; va poi diminuendo mentre si colora in giallo

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: $[\alpha]_D^{20°} = -25°$ appena preparata; poi diminuisce e la soluzione si colora in giallo;

b) in alcol etilico a 90 %: in 100 cc.

2 gr. prodotto = 2 cc. NaOH 2N: $[\alpha]_D^{20°} = -9°$ appena preparata, poi va diminuendo mentre la soluzione si colora in giallo

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: $[\alpha]_D^{20°} = -0°$ appena preparata, poi passa a + 6° mentre la soluzione si colora in giallo rossastro.

In alcol metilico si osserva comportamento analogo.

Soluzione acida:

a) in acqua: in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1 : 4: $[\alpha]_D^{20°} = -50°$ costante

2 cc. HCl conc.: $[\alpha]_D^{20°} = -50°$ costante;

b) in alcol etilico a 90 %: in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1 : 4: appena preparata $[\alpha]_D^{20°} = -46°$, poi scende a $-24°$

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl conc.: appena preparata $[\alpha]_D^{20°} = -36°$, poi scende a $-24°$.

Per questo composto appare nel complesso una maggior stabilità per la soluzione acida per la quale si giunge allo stesso equilibrio che per la soluzione neutra, mentre per la soluzione alcalina il potere rotatorio tende a diminuire, e anche a diventare positivo per una probabile scomposizione del composto con formazione di glucosio.

L'insieme dei risultati ottenuti nelle ricerche fatte su questo composto portano a concludere che la condensazione tra glucosio e p–toluidina avviene pure molecola a molecola con eliminazione di una molecola di acqua, e che il composto si forma per un legame tra il gruppo amminico e l'ossigeno del gruppo aldeidico, o l'ossigeno del legame lattonico del glucosio, come si può dedurre dalla maggiore stabilità che questo composto presenta, sia lasciato a sè, sia nel trattamento con acidi, e dalla più facile decomponibilità nel trattamento con basi. La debole mutarotazione osservata è dovuta probabilmente a una trasformazione tra la forma sin e anti del composto, come fu già osservato per i composti delle precedenti basi.

Come già per la p–fenetidina e per la p–anisidina si deve adunque concludere anche per la p-toluidina che il composto A, di p. f. 114°, preparato in soluzione alcolica, è del tipo glucosidico, e che il composto B, di p. f. 154°, preparato per fusione è di tipo delle basi di Schiff.

L'analogia che corre tra i composti con il glucosio di queste tre basi risulta evidente dal confronto che si può fare nella proprietà di questi composti.

I composti A di natura glucosidica sono cristallizzati in aghi voluminosi; sono poco stabili all'aria; sono alquanto solubili in acqua e in alcol anche a freddo; hanno punto di fusione più basso che i composti B (il composto 118° con fenetidina, 86° il composto con anisidina, 114° il composto con toluidina). Il potere rotatorio specifico presenta una mutarotazione, e da — 90°–85° passa ad un equilibrio di — 40°–35°. In soluzione sono scissi rapidamente dagli acidi in glucosio e base libera, cosicchè nelle soluzioni acide acquose e alcoliche si osserva un passaggio del potere rotatorio a + 30° corrispondente al glucosio formatosi. Sono alquanto stabili agli alcali: le soluzioni alcaline acquose hanno potere rotatorio specifico — 70°, per tutti tre i composti; le soluzioni alcaline alcoliche hanno la stessa mutarotazione che le soluzioni neutre.

I composti B di tipo delle basi di Schiff sono cristallizzati in scaglie di color paglierino; sono stabili all'aria; sono pochissimo solubili in acqua e in alcol; hanno punto di fusione più elevato che i composti A (155° il composto con la fenetidina, 140° il composto con l'anisidina, 154° il composto con la toluidina). Il potere rotatorio presenta una lieve mutarotazione da — 50°–40° passa a — 25°. In soluzione sono stabili rispetto agli acidi; la soluzione acida acquosa ha potere rotatorio specifico — 50° per tutti tre i composti, la soluzione acida alcolica ha all'incirca la stessa mutarotazione delle soluzioni neutre; sono meno stabili verso le basi; nelle soluzioni alcaline il potere rotatorio negativo va diminuendo, e anche diventando positivo verso il potere rotatorio del glucosio. Si può osservare che nei composti A e B sono scambiati i rapporti di stabilità e di variazione del potere rotatorio di fronte alla alcalinità e acidità delle soluzioni.

Chimica (Chimica-fisica). — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* – VIII. *Analisi termica e röngtenografica del sistema* Li_2Br_2—$MgBr_2$ *anidri*[1]. Nota[2] di A. Ferrari e C. Colla, presentata dal Socio G. Bruni.

Dall'esame del comportamento di molte coppie di cloruri bivalenti aventi analogie chimiche, fatto nelle note precedenti, appare chiara l'importanza della forma cristallina nella solubilità allo stato solido. Rimando ai lavori precedenti in argomento per le conclusioni raggiunte [3].

Non abbiamo invece potuto indagare quale sia l'importanza delle analogie chimiche, e se queste possano prevalere su quelle cristallografiche.

Lo studio della miscibilità fra gli alogenuri di litio ed i corrispondenti di magnesio può essere interessante a questo scopo. Ricordiamo a questo proposito che, malgrado la valenza diversa, il cloruro di litio e quello di magnesio danno soluzioni solide in ogni rapporto. Questo risultato che si può supporre derivi dalle note analogie chimiche del litio col magnesio, in relazione alla reciproca posizione di questi elementi nel sistema periodico, è stato ottenuto da C. Sandonnini per mezzo dell'analisi termica [4] e confermato per via röngtenografica da G. Bruni in collaborazione con uno di noi [5]. L'esame röngtenografico ha spiegato questo risultato colla identità della forma geometrica e del volume delle celle dei due cloruri.

Sembra quindi giustificato ammettere che la miscibilità in ogni rapporto di questi due cloruri derivi più dalle caratteristiche analogie di reticolo dei due composti piuttosto che da quelle chimiche, perchè i fluoruri di litio e di magnesio che presentano forma cristallina diversa, malgrado la quasi identità dei volumi molecolari equivalenti [6], sono miscibili tra loro solo in piccole proporzioni [7], pur essendovi fra i cationi le note analogie chimiche.

Appare quindi interessante indagare il comportamento dei bromuri di litio e di magnesio che presentano forme cristalline diverse. Il bromuro di litio è monometrico tipo « NaCl » [8] quello di magnesio, come ha dimostrato uno di noi [9], è esagonale tipo « CdI_2 ». In conseguenza di questa diversità

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale e Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1930.

(3) Questi « Rendiconti » (6ª) VII (1928) 848-53 e 1040-43; VIII (1928) 238-43 e 306-8 IX (1929) 782-89 X (1929) 253-258.

(4) « Gazz. Chim. », XLIV (1914) 377.

(5) G. Bruni e A. Ferrari. Questi « Rendiconti » (6ª) II (1925) 457.

(6) A. Ferrari. Questi « Rendiconti » (5ª) I (1925) 664-77.

(7) G. Bruni e G. R. Levi. Questi « Rendiconti » (5ª) XXXIII (1924) 397.

(8) H. Ott. « Phys. Zeitschr. » *24* (1923) 209-12.

(9) A. Ferrari e F. Giorgi, Questi « Rendiconti », (6ª) IX (1929) 1134-40.

di forma dei due bromuri, ci si dovrebbe attendere, se sulla solubilità ha una influenza preponderante la forma cristallina, di trovare malgrado le analogie chimiche una miscibilità incompleta. Nel presente lavoro ci siamo proposti di confermare sperimentalmente questa ammissione.

Le miscele dei due bromuri sono state ottenute impiegando bromuro di litio e bromuro di magnesio anidri ottenuti per disidratazione in corrente di acido bromidrico dei bromuri idrati della ditta Erba.

La fusione delle miscele è stata fatta in corrente di acido bromidrico col solito dispositivo descritto nella nota I del presente studio [1].

L'acido bromidrico gassoso usato per la disidratazione e la fusione è stato preparato facendo passare vapori di bromo e di idrogeno sopra amianto palladiato moderatamente riscaldato.

Alcune miscele dopo la fusione sono state analizzate col metodo dato da Gray Dinwddie [2]. La soluzione contenente la miscela viene portata a un volume di 50 cm.³ e addizionata di un ugual volume di alcool assoluto. La precipitazione viene fatta per aggiunta di 50 cm.³ di una soluzione satura ammoniacale di carbonato ammonico contenente il 50 % di alcool. Dopo aver lasciato il precipitato in riposo per mezz'ora si elimina il liquido decantato e il precipitato rimasto si scioglie nella minor quantità possibile di acido cloridrico, e si ripete su questa soluzione il trattamento di prima. È conveniente ripetere questa precipitazione ancora una volta se vogliamo avere il carbonato di magnesio esente dal litio. Il carbonato di magnesio dopo filtrazione e lavaggio viene calcinato e pesato come ossido. Nelle soluzioni rimaste, liberate dall'eccesso di sali ammoniacali per calcinazione, si determina il litio come solfato.

I dati sperimentali relativi all'analisi termica di questo sistema sono riassunti nella seguente tabella:

Tabella I.

Molecole % di Li_2Br_2	Inizio della cristallizzazione	Molecole % di Li_2Br_2	Inizio della cristallizzazione
0	692°	60.0	537°
13.5	640°	70.0	540°
26.7	580°	80.0	548°
38 1	530°	90.0	549°
40.0	528°	100.0	550°
50.0	533°	—	—

(1) A. Ferrari e A. Baroni, Questi «Rendiconti», (6ª) VII (1928) 849.
(2) «Am. Journ. Sciences», XXXIX (1915) 662.

Questi dati sperimentali sono rappresentati graficamente nella fig. 1 e dimostrano che la coppia Li_2Br_2—$MgBr_2$ forma due serie di cristalli misti, l'una del tipo bromuro di magnesio che arriva fino alle miscele con circa il 35 % di $MgBr_2$, l'altra più vasta che presenta la struttura del bromuro di litio che va fino a un contenuto in $MgBr_2$ del 60 % circa. Tra le due serie di cristalli si ha una piccola lacuna di miscibilità più che altro individuata nella fig. 1 dal brusco cambiamento di direzione delle due curve che rappresentano le due serie di cristalli.

Le miscele fuse sono state esaminate coi raggi X. Questo esame conferma le deduzioni dell'analisi termica perchè nelle miscele che vanno fin

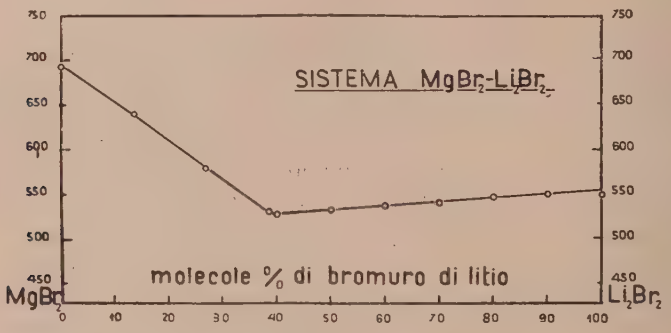


Fig. 1.

circa alla 40 Li_2Br_2—60 $MgBr_2$ si ritrova il reticolo del bromuro di litio pressochè inalterato. Le miscele più ricche di $MgBr_2$ e precisamente la 26,7 Li_2Br_2—73,3 $MgBr_2$ e la 13,5 Li_2Br_2—86,5 $MgBr_2$ presentano prevalentemente le linee del bromuro di magnesio.

Riassumendo: Lo studio termico e röngtenografico del sistema Li_2Br_2—$MgBr_2$ dimostra che i due composti non sono interamente miscibili tra loro, ma formano due serie di soluzioni solide con una piccola lacuna di miscibilità. Considerando le coppie fra i fluoruri, i cloruri e i bromuri di litio e di magnesio si deve giungere quindi ad ammettere che se malgrado le analogie del litio col magnesio solo tra i cloruri si trova una miscibilità completa, questa deve derivare dalla struttura dei cloruri che è casualmente eguale. Quando invece la struttura è diversa, come nel caso dei fluoruri e dei bromuri, abbiamo solo una miscibilità parziale con due serie di cristalli misti.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando « The Chimical Analysis of Rocks » del Socio WASHINGTON; l'« Annuario delle industrie Chimiche », pubblicato a cura delle Federazioni nazionali fasciste; alcuni opuscoli del Socio MATTIROLO; un'opuscolo dell'ing. LUIGI RESPIGHI « Per la priorità di Antonio Meucci nell'invenzione del telefono »; gli « Atti del primo Congresso del motore a scoppio ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. GIORGI, anche a nome dei Soci VOLTERRA e LEVI-CIVITA, legge la relazione con la quale si propone la stampa fra le Memorie dello studio di F. SBRANA: « Sull'applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla riduzione di equazioni integrali di Volterra ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente GARBASSO presenta tre plichi suggellati inviati, per essere conservati negli archivi dell'Accademia, dai sigg. REMO DE FAZI e PIETRO PISA.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci AMALDI, ARMELLINI, CORBINO, GARBASSO, GIORGI, LEVI-CIVITA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 gennaio 1931

Alsterberg Gustaf. — Wichtige Züge in der Biologie der Süsswassergastropoden. Lund 1930. 8°, pp. 1-130.

Annuario 1930 delle Federazioni Nazionali Fasciste. Industrie chimiche ed affini; Industria dei prodotti chimici per l'agricoltura; Produttori fibre tessili artificiali. Roma. 1930. 8°, pp. 1-1204, 1-49.

Atti del primo Congresso del motore a scoppio tenuto a Padova nei giorni 16 e 17 giugno 1927-v per iniziativa del Comitato Nazionale per le onoranze ad Enrico Bernardi. Padova, 1927. 4°, pp. I-XI, 1-504.

Buich Raul. - La investigacion de las tensiones elasticas mediante la luz polarizada. (Publicacion de la Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias exactas, fisicas y naturales. Serie B. n. 7). Buenos Aires, 1929. 8°, pp. 1-204.

Il Consiglio Nazionale delle ricerche. Compiti e organizzazione. Venezia, 1930. 8°, pp. 1-98.

De Marchi Giulio. — Il problema attuale dell'idraulica tecnica ed agraria. Discorso (R. Politecnico di Milano). Milano, 1930. 8°, pp. 14-32.

Fantoli Gaudenzio. — L'inaugurazione dell'annata didattica 1930-1931. Relazione annuale (R. Politecnico di Milano). Milano, 1930. 8°, pp. 1-13.

Garnier René. — Cours de mathématiques générales (Analyse et géométrie). Tome II. Calcul integral. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris). Paris, Gauthier-Villars et C.ie Editeurs, 1931. 8°, pp. I-VI, 1-96.

Mattirolo Oreste. — Carlo Emanuele I e le sue benemerenze floreali considerate da un botanico. (Miraflores-Millefonti). (Esttr. dalla Rassegna mensile « Torino ». Settembre 1930). Torino, 1930. 4°, pp. 1-26.

Mattirolo Oreste. — Giovanni Vincenzo Virginio. (Estr. da « Comunicazioni della Società per gli Studi storici, archeologici ed artistici per la provincia di Cuneo ». 1° novembre 1930). Cuneo, 1930. 8°, pp. 1-16.

Mattirolo Oreste. - La Junglans bergomensis Bals. Criv. testè ritrovata in Piemonte. (Estr. dalle « Memorie dell'Istituto geologico della R. Università di Padova ». Vol. VIII). Padova, 1930. 4°, pp. 1-7.

Mattirolo Oreste. — Vittorio Amedeo Gioanetti, medico e chimico, creatore della porcellana detta di Vinovo. Nel bicentenario della sua nascita. (Torino, 31 ottobre 1729 - Vinovo, 30 novembre 1815). (Estr. dalla « Rassegna mensile Municipale ». Maggio, 1930). Torino, 1930. 4°, pp. 1-18.

Meschinelli Luigi. — Bellezze e prodotti dell'Alto Vicentino. L'Astico e le sue trote. (Estr. dalla Rivista « Le vie d'Italia », fasc. XII, 1930). Milano, 1930. 8°, pp. 1-10.

Petitjean L. — Le temps et la prévision du temps en Algerie et au Sahara. Service metéorologique de l'Algerie. (Collection du Centenaire de l'Algerie 1830-1930). Paris, Masson et C.ie Éditeurs, 1930. 8°, pp. 1-68.

Pollani Gino e Bergamaschi Maria. — Sulla formazione di aldeide formica in

piante vive durante la fotosintesi clorofilliana. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia». Serie IV, Vol. II). Siena, 1930. 4°, pp. 1-64.

Ranzi Silvio. — Considerazioni morfologiche sul labirinto dei Ciclostomi. (Estr. dall'« Archivio zoologico italiano ». Volume XV, pagine 253–257). Napoli, 1930. 8°.

Ranzi Silvio. — La distribuzione della vita nel golfo di Napoli. XI Congresso geografico italiano. (Estr. dagli « Atti del Congresso ». Vol. II). Napoli, 1930. 8°, pp. 1–4.

Ranzi Silvio. — Stadî giovanili di Sparidi del golfo di Napoli. (Estr. dalle « Pubblicazioni della stazione zoologica di Napoli ». Vol. X, fasc. III, pp. 407-416). Napoli, 1930. 8°.

Ranzi Silvio. — Ulteriori ricerche sulle correlazioni tra organi di senso e centri nervosi in via di sviluppo. (Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi). (Estr. dal « Bollettino di zoologia ». Anno I, pp. 131–135). Napoli, 1930. 8°.

Respighi Luigi. — Per la priorità di Antonio Meucci nell'invenzione del telefono. Roma, 1930. 8°, pp. 1-60.

Sergent Edm. et Et., et Parrot L. — La découverte de Laveran Constantine 6 novembre 1880. Études scientifiques. L'œuvre médicale de la France in Algérie. (Collection du Centenaire de l'Algérie 1830–1930). Paris. Masson et Cie Éditeurs. 1929. 8°, pp. 1–48.

Seurat L. G. — Exploration zoologique de l'Algérie de 1830 à 1930. Études scientifiques. (Collection du Centenaire de l'Algérie). Paris. Masson et Cie Éditeurs, 1930. 8°, pp. 1–708.

Washington Henry S. — The chemical Analysis of Rocks. New Jork, John Wiley, 1930. 8°, pp. I–XVI, 1–296.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 gennaio 1931 (anno IX)

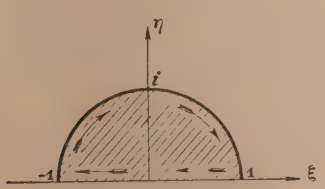
MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica (Idromeccanica). — *Correnti circolatorie locali intorno a regioni di acqua morta.* Nota [1] del Corrisp. U. Cisotti.

1. Corrispondenza conforme tra un campo circolare e uno semicircolare. – Sieno $\zeta = \xi + i\eta$ e $\tau = \mu + i\nu$ le affisse di due piani complessi; mediante la posizione:

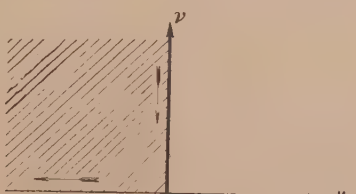
$$\tau = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \tag{1}$$

vengono a corrispondersi, in modo biunivoco e conforme, il semicerchio segnato nella figura 1 del piano ζ [2] e il quadrante segnato nella figura 2 del piano τ, in guisa che al diametro $-1,1$ del primo corrisponde il semiasse reale negativo del secondo e alla semicirconferenza $1, i, -1$ del primo il semiasse positivo degli immaginari del secondo.



Piano $\zeta = \xi + i\eta$

Fig. 1.



Piano $\tau = \mu + i\nu$

Fig. 2.

(1) Presentata nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) I disegni delle figure furono curati dal prof. A. Masotti che ringrazio.

Introducendo una terza variabile complessa $Z = Z + iY$, mediante la ulteriore relazione

$$(2) \qquad Z = \frac{i + \tau^2}{i - \tau^2},$$

colla determinazione $\tau = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}$ per $Z = 0$, il quadrante suaccennato viene riferito conformemente e biunivocamente al cerchio $|Z| \leq 1$ del piano Z, nel modo indicato dalla figura 3, cioè corrispondendosi la semicirconferenza $1, i, -1$ del piano Z e l'asse positivo degli immaginari del piano τ e la semicirconferenza $1, -i, -1$ del primo al semiasse reale negativo del secondo.

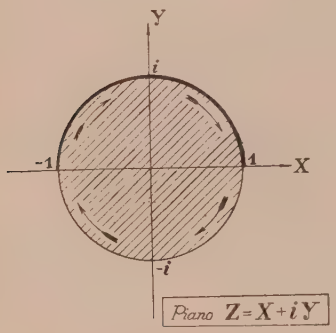


Fig. 3.

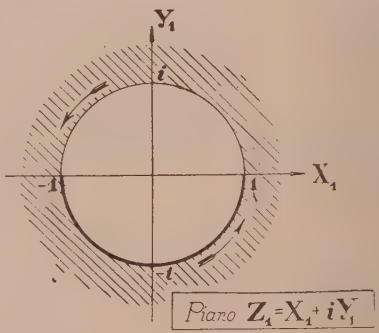


Fig. 4.

Infine, essendo $Z_1 = X_1 + iY_1$, colla posizione

$$(3) \qquad Z_1 = \frac{1}{Z},$$

il cerchio del piano Z viene messo in corrispondenza, biunivoca e conforme, colla regione esterna $|Z_1| \geq 1$ al cerchio segnato in figura 4: alla semicirconferenza $1, i, -1$ del piano Z fa riscontro la semicirconferenza $1, -i, -1$ del piano Z_1 e all'altra semicirconferenza del primo la rimanente semicirconferenza del secondo.

Eliminando τ e Z tra le relazioni (1), (2), (3) si mettono in corrispondenza diretta il semicerchio del piano ζ (fig. 1) e il piano Z_1 forato circolarmente:

$$(4) \quad Z_1 = i\frac{\zeta^2 - 2i\zeta + 1}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1} = i\,\frac{\left[\zeta - i\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]\left[\zeta + i\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]}{\left[\zeta + i\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]\left[\zeta - i\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]}.$$

Risulta, in particolare, che al punto all'infinito del piano forato corrisponde, nel semicerchio, il punto $\zeta = i\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

2. Vortice interno al semicerchio. – È noto che, ponendo

$$(1) \qquad f = \frac{C}{2\pi i} \log Z_1 ,$$

la funzione f si può interpretare come potenziale cinetico di una corrente circolatoria, permanente e locale (*vortice*) le cui linee di flusso sono circonferenze concentriche, col centro nell'origine $Z_1 = 0$, denotando C la *circolazione* o *intensità del vortice*. Mediante la (4) del numero precedente si può riferire f ai punti del semicerchio, con che si ottiene:

$$(2) \qquad f = \frac{C}{2\pi i} \log \left[i + \frac{4\zeta}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1} \right],$$

che è il potenziale cinetico di una corrente che circola entro il semicerchio,

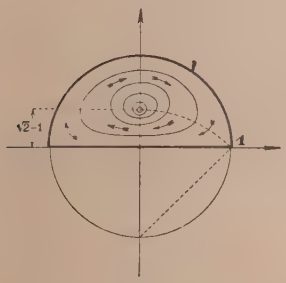


Fig. 5.

Fig. 6.

intorno al vortice che ha sede nel punto $\zeta = i(\sqrt{2} - 1)$. La velocità complessa è definita [1] da

$$(3) \qquad \frac{df}{d\zeta} = \frac{2C}{\pi} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^4 + 6\zeta^2 + 1};$$

e, se $C > 0$, la circolazione ha luogo nel senso indicato dalle freccie nella figura 5 [2].

3. Corrente locale circolante intorno a una regione di acqua morta limitata da un pelo libero. – Sia B una regione semplice, occupata da fluido in quiete, limitata da una linea libera chiusa λ (fig. 6); nella regione esterna A il liquido circola intorno a B, la corrente diventando evanescente all'infinito. Sieno: f il potenziale cinetico, funzione dell'affissa

(1) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*, Milano; Tamburini, I (1921) e II (1922), p. 62.

(2) Cfr. Greenhill, *Plane Vortex Motion*, «The Quart. Journ. of Pure and Appl. Math.», vol. XV (1878), p. 10 e sgg.

$\zeta = x + iy$, dei punti del campo A; la velocità complessa è allora definita [1] dalla relazione

$$(1) \qquad w = \frac{df}{d\zeta}.$$

Seguendo Levi-Civita [2] conviene introdurre la funzione $\omega = \vartheta + i\tau$ [3], legata a w dalla relazione:

$$(2) \qquad w = e^{-i\omega} = e^{\tau - i\vartheta},$$

colla determinazione $\omega = 0$ per $w = 1$. Eliminando w tra le precedenti si ha:

$$(3) \qquad \frac{df}{d\zeta} = e^{-i\omega}.$$

Si noti che, sopra λ, trattandosi di linea di flusso, la parte immaginaria di f deve assumere valore costante; inoltre λ, come linea di separazione delle due regioni A e B dev'essere isotachia [4], cioè $|w| = e^{\tau}$ deve assumere un valore costante; il che implica che anche la parte immaginaria di ω dev'essere costante su λ. Il comportamento di f all'infinito deve essere quello di un potenziale logaritmico e, per le (1) e (2), ω deve avere eguale comportamento qualitativo. Per questo e per la circostanza rilevata che su λ tanto f quanto ω devono avere ciascuna un valore costante per le rispettive parti immaginarie, scende che il rapporto delle predette funzioni dev'essere costante e reale; posto quindi $\omega = kf$, con k costante reale, dalla (3) si ottiene:

$$\frac{df}{d\zeta} = e^{-ikf},$$

che, integrata, fornisce:

$$kf = \frac{\pi}{2} - i \log k - i \log (\zeta - \zeta_0),$$

essendo ζ_0 la costante di integrazione. Scende da questa che le linee di flusso sono circonferenze concentriche col centro nel punto arbitrario ζ_0. Dunque: *la regione* B *di acqua morta non può essere che circolare* [5].

4. La regione di acqua morta è limitata da una parete rigida e da un pelo libero. – Sia ora B limitata da una parete rigida $\tilde{\omega}$ e da un pelo

(1) Loc. primo cit., p. 62.

(2) Loc. primo cit., p. 158.

(3) ϑ e τ sono reali; non v'ha luogo a equivocare sul significato del τ, non avendo più occasione di riferirci a quello introdotto al n. 1.

(4) Loc. primo cit., p. 65.

(5) È interessante il confronto colle correnti che ho denominato « spontanee », cfr. loc. primo cit., p. 67 e sgg.

libero λ (fig. 7). In tal caso λ e $\tilde{\omega}$ devono appartenere ad una stessa linea di flusso, cioè la funzione di corrente ψ, coefficiente dell'unità immaginaria di f, deve avere tanto sopra λ quanto sopra $\tilde{\omega}$ il medesimo valore costante. Sopra λ di più, essendo pelo libero, il valore $|w| = e^{\tau}$ e quindi anche τ, devono mantenere un valore costante. Manifestamente $\tilde{\omega}$ e λ non possono essere assegnati *a priori*, in generale, perchè la ulteriore condizione alla quale deve soddisfare λ, dopo quella di costituire con $\tilde{\omega}$ una stessa linea di flusso, è di essere linea isotachia, il che è sovrabbondante. Farò vedere invece che è possibile, in generale, determinare λ in corrispondenza a un assegnato $\tilde{\omega}$. Un caso particolare, ben manifesto, ci è offerto da una parete rigida $\tilde{\omega}$ ad arco circolare: allora λ è l'arco circolare che con $\tilde{\omega}$ completa la circonferenza [n. 3].

In generale conviene riferire il campo A del piano $\zeta = x + iy$ (fig. 7), sede del moto fluido, al semicerchio del piano $\zeta = \xi + i\eta$ già considerato

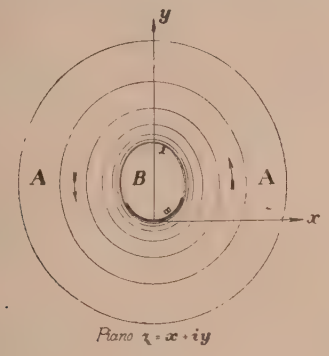


Fig. 7.

(fig. 1), in modo che alla parete rigida $\tilde{\omega}$ corrisponda la semicirconferenza $1, i, -1$ e al pelo libero λ il diametro $-1,1$ e ai punti di A esterni alla linea chiusa formata da $\tilde{\omega}$ e λ corrispondano punti interni del semicerchio. La relazione tra ζ e ζ, che deve definire analiticamente questa corrispondenza non è nota *a priori*, e nemmeno assegnabile in generale, essendo incognita la forma di λ. Si tratta appunto di determinarla in modo che in A il potenziale cinetico f e la velocità w, o in modo preciso, il suo logaritmo $-i\omega$ [n. 3] soddisfino a tutte le dovute condizioni.

Sfruttando un criterio che ho avuto occasione di introdurre nella trattazione di problemi idromeccanici piani, quando intervengono pareti rigide e peli liberi [1], noto che, considerando f e ω funzioni dei punti ζ del semicerchio, anzichè dei punti ζ di A, dovranno ivi soddisfare alle condizioni a cui devono soddisfare in A.

(1) Loc. primo cit., cap. V.

La funzione $f(\zeta)$. – Il potenziale cinetico $f = \varphi + i\psi$ deve avere [n. 3] le parte immaginaria costante sopra tutti i punti del contorno, inoltre nel punto $\zeta = i(\sqrt{2} - 1)$, corrispondente al punto all'infinito del piano z [n. 1] f diviene logaritmicamente infinito. La f definita dalla (2) del n. 2 soddisfa appunto a tutte queste condizioni.

La funzione $\omega(\zeta)$. – La funzione $\omega = \vartheta + i\tau$ [n. 3] deve avere su λ costante il valore della sua parte immaginaria; senza ledere la generalità si potrà assumere tale costante nulla [1]; per cui sopra il diametro $-1,1$ dell'asse reale del piano ζ dev'essere $\tau = 0$: cioè ω *è reale sull'asse reale.*

Nel punto $\zeta = i(\sqrt{2} - 1)$ che, come si disse, corrisponde all'infinito del piano z, $w = e^{-i\omega}$ deve diventare nulla di primo ordine il che implica che ω divenga logaritmicamente infinita, cioè dev'essere

$$\omega = i \log \frac{\zeta - i(\sqrt{2} - 1)}{\zeta + i(\sqrt{2} - 1)} + \Omega, \tag{1}$$

designando Ω una funzione di ζ regolare entro il semicerchio e reale sull'asse reale. Per il principio di Schwarz, la funzione Ω è continuabile, per riflessione analitica [2], nel semicerchio $-1, -i, 1$, simmetrico al precedente rispetto all'asse reale ed è sviluppabile in una serie di potenze positive di ζ:

$$\Omega = a_0 + \sum_1^\infty{}_n a_n \zeta^n, \tag{2}$$

i coefficienti essendo costanti reali, *a priori* indeterminate. Questa indeterminatezza si toglie se vengono assegnati i valori che la parte reale ϑ di ω assume sulla semicirconferenza $1, i, -1$, corrispondente a $\tilde{\omega}$ nel piano del moto, con che la Ω risulta determinata, a mezzo di una nota formula di Schwarz [3]. Applichiamo la (3) del n. 3; ponendo

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

si ottiene

$$dz = e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta} d\zeta,$$

che, integrata, porge

$$z - z_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta} d\zeta,$$

(1) Ciò corrisponde ad assumere eguale ad 1 il valore costante della velocità nei punti di λ [cfr. la (2) del n. 3].

(2) Loc. primo cit., p. 7.

(3) Loc. primo cit., p. 17.

avendo indicato con z_0 e ζ_0 una coppia di punti in corrispondenza. Sostituendo a $\frac{df}{d\zeta}$ la espressione (3) del n. 2 e a ω l'espressione (1) si ottiene:

$$(3) \qquad z - z_0 = \frac{2C}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\Omega} \frac{(\zeta^2 - 1)\, d\zeta}{\left[\zeta^2 + (\sqrt{2} + 1)^2\right] \left[\zeta - i(\sqrt{2} - 1)\right]^2}.$$

Questa relazione stabilisce la corrispondenza conforme del piano z del moto col semicerchio del piano ζ. In particolare, facendo percorrere all'affissa ζ il diametro $-1,1$ il corrispondente punto z descrive il pelo libero λ, che in tal modo risulta determinato, noto che sia Ω.

5. Interpretazione elettrostatica. – È noto (1) che la funzione f si può interpretare come potenziale elettrostatico complesso, relativo alla sezione di un conduttore cilindrico, normale al piano, racchiusa da una qualsiasi linea $\psi = \text{costante}$. Poniamo nella (2) del n. 2, $\frac{C}{2\pi} = -q$, con che risulta:

$$f = iq \log \left[i + \frac{4\zeta}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1} \right].$$

Ora la (3) del numero precedente stabilisce la corrispondenza conforme tra il semicerchio del piano ζ e la regione A del piano z esterna alla linea chiusa formata da $\tilde{\omega}$ e da λ (fig. 7); pertanto la (1), mediante la (3) ora citata, risolve il problema elettrostatico corrispondente a un conduttore cilindrico la cui sezione sia l'area limitata dalle linee $\tilde{\omega}$ e λ. La densità di distribuzione lineare sul contorno suaccennato è definita dalla formula (2)

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{df}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = 4q \left| \frac{1 - \zeta^2}{\zeta^4 + 6\zeta^2 + 1} \right| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|,$$

q rappresentando la quantità di elettricità.

Ma è [n. 4], indicando k una costante reale,

$$\frac{d\zeta}{dz} = k e^{-i\Omega} \frac{\left[\zeta^2 + (\sqrt{2} + 1)^2\right] \left[\zeta - i(\sqrt{2} - 1)\right]^2}{\zeta^2 - 1},$$

quindi

$$\mu = q\, k \left| \frac{\zeta - i(\sqrt{2} - 1)}{\zeta + i(\sqrt{2} - 1)} \right| \left| e^{-i\Omega} \right|.$$

(1) Cfr. ad es. la mia Nota: *Elettrostatica piana*, questi «Rendiconti», vol. XI (1° sem., 1930), pp. 243–246.

(2) Loc. ora cit., p. 244, formula (3).

Sopra il diametro — 1,1 Ω dev'essere reale quindi $|e^{-i\Omega}| = 1$; inoltre

$$\left|\frac{\zeta - i(\sqrt{2}-1)}{\zeta + i(\sqrt{2}-1)}\right| = 1,$$

ne segue

$$\mu = q\,|k|\,.$$

Dunque *su* λ *la densità è costante, cioè la elettricità si distribuisce uniformemente.*

Sulla semicirconferenza $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \pi$, corrispondente alla parete rigida $\tilde{\omega}$, si ha

$$\left|\frac{\zeta - i(\sqrt{2}-1)}{\zeta + i(\sqrt{2}-1)}\right| = \frac{\sqrt{1+\cos^2\sigma}}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\sigma},$$

per cui

$$\mu = q\,|k|\,\frac{\sqrt{1+\cos^2\sigma}}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\sigma}\,|e^{-i\Omega}|\,.$$

Meccanica. — *Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert al teorema di Kutta–Joukowski e delle azioni dinamiche sopra profili cuspidati.* Nota del Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Xantogenati e nitrosoxantogenati*[1]. Nota[2] del Corrisp. L. Cambi e di L. Szegö.

Recentemente W. Manchot e S. Davidson[3], facendo agire l'ossido d'azoto sui prodotti della reazione fra xantogenato potassico e solfato ferroso, isolarono un sale $(C_2H_5O \cdot CS_2)_2Fe(NO)_2$.

Gli AA. interpretarono il nitrososale come composto ferroso, senza peraltro studiarne il comportamento chimico e fisico, e senza indagare i rapporti col xantogenato ferrico descritto da antica data[4].

Lo xantogenato ferrico ed il nitrosoxantogenato predetto hanno in comune il carattere di complessi interni, con quelle spiccate manifestazioni di covalenze che portano alla solubilità nei solventi a bassa costante dielettrica, e ad un elevato potere assorbente per la luce.

Il primo, allo stato solido, è nero, insolubile in acqua; in soluzioni di benzolo, cloroformio, solfuro di carbonio, ecc., è nero–verdastro. Il secondo è rosso-bruno, pure insolubile in acqua, e nei solventi predetti presenta colorazioni intense rosso–brune o rosso-violacee. I due tipi di xantogenato manifestano cioè caratteri analoghi a quegli degli eptanitrososolfuri e degli eteri del tipo $[R \cdot S \cdot Fe(NO)_2]_2$.

I confronti che instituiamo richiamano a questo punto una manifestazione del ferro ferrico fin quì sfuggita nelle diverse discussioni sui nitrososolfosali di questo metallo. Cioè, i solfoacidi del tipo $R \cdot CS \cdot SH$ dànno in generale sali ferrici più stabili dei sali ferrosi e che posseggono caratteri analoghi all'etilxantogenato predetto, come venne riscontrato[5] oltrechè per vari xantogenati, $(RO \cdot CS_2)_3Fe$, anche per i ditiocarbammati $(R_2N \cdot CS_2)_3Fe$ e nel ditiobenzoato $(C_6H_5 \cdot CS_2)_3Fe$[6].

Tale relativa stabilità dei sali ferrici corrisponde a quella ancor più elevata dei sali $(C_2H_5OCS_2)_3Co$[7] e $(C_2H_5O \cdot CS_2)_3Cr$[8].

Si tratta evidentemente di assetti elettronici a valenze omeopolari caratteristici per i solfosali dei metalli della prima serie di transizione del sistema periodico.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 18 gennaio 1931.

(3) «Ber.», *62*, 1929, p. 681.

(4) Hlasiwetz, «Ann.», *122*, 1862, p. 88..

(5) Su questo argomento verrà riferito in una Nota successiva.

(6) Giova ricordare a proposito anche il tiocarbonato di K. A. Hofmann.

(7) Rosenheim, «Zeitschr. f. anorg. Chemie», *41*, 1904, p. 233.

(8) Hlasiwetz, loc. cit.

Da queste premesse procedemmo ad un adeguato esame e confronto dei nitrosoxantogenati e degli xantogenati del ferro, sopratutto nei riflessi delle quistioni tanto dibattute sulla costituzione dei nitrososolfosali del ferro, cobalto e nichel.

Vennero anzitutto indagate alcune reazioni dello xantogenato ferrico. Questo reagisce in sospensione acquoso–alcoolica col cianuro di potassio generando ferrocianuro, dixantogene e xantogenato:

$$Fe^{III}(S\cdot CS\cdot OC_2H_5)_3 + 6\,CN' \rightarrow$$
$$\rightarrow [Fe(CN)_6]'''' + {}^1/_2\,(C_2H_5\cdot O\cdot CS\cdot S)_2 + 2\,C_2H_5OCS_2'.$$

Questa reazione è affatto analoga per quanto concerne il comportamento del ferro a quella del ferricianuro, che noi abbiamo studiata:

$$[Fe(CN)_6]''' + C_2H_5O\cdot CS_2' \rightarrow [Fe(CN)_6]'''' + {}^1/_2\,(C_2H_5\cdot O\cdot CS\cdot S)_2.$$

In presenza cioè di cianuro alcalino il ferro ferrico esplica netta azione ossidante sullo xantogenato. Per contro in assenza di cianuro, in mezzo neutro od alcalino, il residuo $C_2H_5O\cdot CS\cdot S-$ non riduce il ferro ferrico, ma si ossida facilmente a dixantogene. La soluzione benzolica od alcoolica del sale ferrico assorbe ad es. rapidamente e *quantitativamente* ossigeno:

$$2\,Fe(S\cdot CS\cdot OC_2H_5)_3 + 1.5\,O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + 3\,(C_2H_5O\cdot C\cdot S\cdot S)_2.$$

In stretta analogia con il processo ora esposto verificammo che lo xantogenato ferrico dà luogo in soluzione alcoolica alla reazione *quantitativa* seguente:

$$Fe(S\cdot CS\cdot OC_2H_5)_3 + 2\,NO \rightarrow$$
$$\rightarrow Fe(NO)_2\,(S\cdot CS\cdot O\cdot C_2H_5)_2 + 0.5\,(C_2H_5O\cdot CS\cdot S)_2.$$

Si ottiene per questa via il nitrososolfosale allo stato di grande purezza, molto più facilmente di quanto si verifica col metodo di Manchot e Davidson.

Per quanto verrà esposto in seguito, noi dobbiamo riconoscere che il nitrosoxantogenato sia ferrico e che perciò per uno dei due gruppi nitrosilici si verifichi la riduzione:

$$2C_2H_5OCS\cdot S' + 2\,NO \rightarrow (C_2H_5O\cdot CS\cdot S)_2 + 2\,(NO').$$

Infatti il nitrosoxantogenato con cianuro potassico genera ferrocianuro ed NO, ma contemporaneamente si ottengono anche percentuali sensibili di N_2O, e operando in soluzioni diluite si nota anche formazione di nitroprussiato.

In presenza di cianuro alcalino, come abbiamo riferito, il ferro ferrico agisce da ossidante e possiamo ammettere anche il processo:

$$Fe^{III} + (NO') \rightarrow Fe^{II} + NO .$$

Una parte però del residuo alogenoidico NO' sfugge all'ossidazione, probabilmente per la concorrenza dei residui xantogenici, e genera protossido:

$$2(NO') + 2H^{\cdot} \rightarrow N_2O + H_2O .$$

Osservammo infine che con vari ossidanti, ma particolarmente con solfato di rame, ha luogo la reazione generale di scissione dei nitroso-solfosali già studiata da L. Cambi: si genera pressochè quantitativamente NO e si forma xantogenato rameoso, facilmente riconoscibile. Cioè, è consentito ammettere, anche in questo caso, il processo:

$$Cu^{\cdot\cdot} + (NO') \rightarrow Cu^{\cdot} + NO .$$

Le interpretazioni su esposte dei fatti chimici riferiti vengono avvalorate dalle misure da noi compiute della suscettibilità magnetica dei solfosali di cui ci occupiamo.

Riportiamo i risultati nella tabella I. Lo xantogenato ferrico è paramagnetico con 12-13 magnetoni Weiss, mentre il nitrosocomposto presenta suscettibilità appena apprezzabile [1].

Tabella I.

Sostanza	$\chi^m \cdot 10^6$	$\chi^m_{Fe} \cdot 10^6$	Numero atomico effettivo secondo Bose, Welo	Magnetoni Weiss	
				calcolati	osservati
$Fe(CS_2 \cdot OC_2H_5)_3$	+ 6.93	+ 3100	35	10	13.3
$Fe(CS_2 \cdot OCH_2 \cdot C_6H_5)_3$ . .	+ 3.68	+ 2523	35	10	12.1
$Fe(CS_2 \cdot CC_2H_5)_2(NO)_2$ . .	— 0.329	+ 61	36	0	1.9

Questi risultati sono in perfetto accordo con le teorie attuali sul magnetismo dei composti omeopolari. La teoria di Sidgwick [2] applicata agli xantogenati predetti, che evidentemente presentano tutti il numero di coordinazione 6, porta a riconoscere che ciascuno dei residui xantogenici partecipa con 4 elettroni all'assetto elettronico dell'atomo centrale. Risulta perciò

(1) Aggiungiamo anche i dati riferentisi al benzilxantogenato, su cui riferiremo in seguito.

(2) « Journ. Chem. Soc. », *123*, 1923, p. 725.

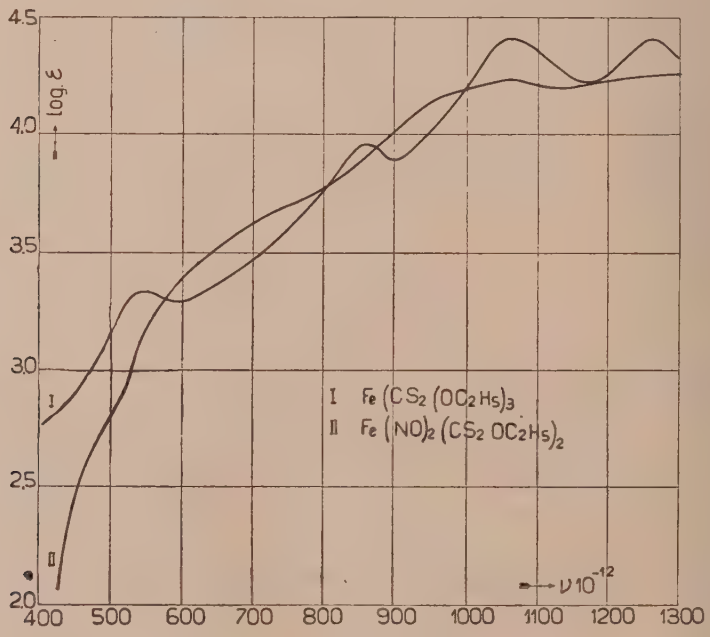
per l'atomo di ferro dello xantogenato ferrico un numero di 35 elettroni effettivi, che corrisponde ad 1 magnetone Bohr e in base alla curva di Cabrera e Weiss a 10 magnetoni Weiss (I).

Per quanto concerne il nitrososale dobbiamo tenere conto che il gruppo NO di addizione apporta 3 elettroni all'atomo centrale, come si verifica nel nitroprussiato [1] e nella serie nera delle nitrosocobaltoammine; mentre il legame del gruppo NO' alogenoidico corrisponde a 2 elettroni, come venne riscontrato recentemente da Ráy, Bhar e Bose [2] nella serie rossa delle nitrosocobaltiammine. Sempre col ferro trivalente (numero atomico effettivo = 23) si deduce per il nitrososale il numero di 36 elettroni effettivi (II) in armonia con la suscettibilità magnetica determinata. Abbiamo cioè le strutture:

$$Fe(\vdots S\cdot CS\cdot OR)_3 \qquad , \qquad \begin{matrix} ON: \\ \\ ON: \end{matrix} Fe(\vdots S\cdot CS\cdot OR)_2$$

(I) (II)

È insostenibile quindi l'ipotesi del ferro ferroso di W. Manchot, poichè non solo il complesso si genera da sale ferrico, ma possiede inoltre un com-



(1) Welo e Baudisch, « Nature », *116*, 1925, p. 359.
(2) « Journ. Indian Chem. Soc. », *5*, 1928, p. 499; « Phil. Mag. », (7), *5*, 1928, p. 1048.

portamento magnetico che corrisponde alla struttura elettronica con ferro trivalente.

Notiamo a questo punto che finora tutti i sali e i complessi del ferro indagati soddisfano alle condizioni che risultano dalla teoria di Sidgwick.

Oltre alle determinazioni predette venne indagato anche il comportamento ottico dei due xantogenati.

L'esame spettrografico, nel visibile e ultravioletto, riuscì particolarmente difficile per lo xantogenato ferrico, che in soluzione diluita si decompone con notevole rapidità. Gli spettrogrammi ottenuti mostrano la vicinanza degli indici di estinzione fra lo xantogenato ferrico ed il nitrosoxantogenato, che a sua volta presenta analoghe relazioni con gli spettrogrammi degli eptanitrososolfuri (sali di Roussin) su cui riferiremo in seguito. Inoltre ripetono quell'andamento, che venne messo in evidenza recentemente da L. Szegö e P. Ostinelli [1] nei cianuri complessi, in cui ad uno stato diamagnetico corrisponde in generale, per composti analoghi, maggiore semplicità di struttura dello spettro d'assorbimento. Infatti il $Fe(CS_2O \cdot C_2H_5)_3$ presenta quattro bande di assorbimento a $\nu \cdot 10^{-12} = 545, 863, 1060, 1263$, mentre al nitrososale ne compete solo una a $\nu \cdot 10^{-12} = 1050$ di assai scarsa intensità.

L'insieme dei fatti chimici e chimico-fisici da noi indagati porta alla conclusione che nei nitrosoxantogenati il ferro si trovi allo stato ferrico, come nello xantogenato ferrico, e che quindi uno dei due gruppi NO deve esercitare nel complesso funzione alogenoidica.

Parte sperimentale (con la collaborazione di A. Cagnasso).

1. *Xantogenato ferrico.* - Venne preparato da xantogenato potassico e cloruro ferrico in soluzione acquosa. Il sale nero grezzo precipitato, lavato rapidamente con acqua ed essiccato nel vuoto, venne cristallizzato più volte dal solfuro di carbonio. Lo si ottiene allo stato di grande purezza in cristalli neri lucenti. L'analisi ha dato i risultati seguenti:

	Fe	S
teorico	13.34 %	46.03 %
trovato	13.16 %, 13.23 %	46.22 %

Dalla determinazione del peso molecolare in benzolo è risultato:

solvente 24.26 gr. sostanza 0.2924 gr. $\Delta t = 0.138°$;
peso molecolare calcolato 419; trovato 428.

(1) «Gazz.», *60*, 1930, p. 946.

Per la misura della suscettibilità magnetica venne determinato il peso specifico operando al picnometro; venne trovato p. s. $\frac{15°}{4°}$ = 1.740.

La reazione con ossigeno venne esaminata in buretta di Bunte operando sulla soluzione benzolica del sale:

sostanza 0.1708 gr. assorbito cc. 6.63 O_2 corrisp. a 0.73 Mol. O_2/At. Fe
» 0.2950 » » » 11.95 O_2 « a 0.76 » » »

La soluzione a grado che assorbe l'ossigeno si decolora e si intorbida per ossido ferrico; nella soluzione finale si riscontra il dixantogene. L'azione del cianuro potassico venne seguita in atmosfera inerte, sospendendo lo xantogenato in soluzione di cianuro al 10% in debole eccesso ed agitando vivamente. La reazione si compie lentamente anche a freddo. Si ha completa decolorazione dello xantogenato, e in soluzione si riscontra ferrocianuro e xantogenato potassico, rimane in sospensione il dixantogene facilmente riconoscibile.

Nitrosoxantogenato ferrico. – Il nitrososale venne da noi preparato col nostro procedimento. Impiegammo xantogenato ferrico purissimo, e per ogni preparazione gr. 2.00 di sale in cc. 100 di alcool a 96°. L'assorbimento dell'NO avveniva in ca. 90′ a temperatura di 10–12°, con adeguata agitazione: si assorbivano in media cc. 220 di NO (0°/760 mm.). Risultava cioè il rapporto 2.05 NO : 1 Fe.

La soluzione ad assorbimento compiuto ha assunto il colore rosso-scuro del nitrosoxantogenato, che gradatamente si è separato in minuti cristalli. Questi vennero raccolti su filtro, lavati, essicati nel vuoto. Riferiamo i dati analitici:

	Fe	S	N	
trovato	15.75	36.07	7.90	(Dumas)
calcolato per $FeC_6H_{10}O_4S_4N_2$	15.56	35.81	7.82	

La determinazione del peso molecolare in benzolo ha dato:

solvente 21.08 gr. sostanza 0.2506 gr. $\Delta t = 0.165°$;
peso molecolare calcolato 358; trovato 359.

Il peso specifico determinato al picnometro è risultato: p. s. $\frac{15°}{4°}$ = 2.56.

Abbiamo osservato che il sale con diversi ossidanti sviluppa NO.

Particolarmente caratteristica è la scissione con solfato di rame, che eseguimmo in atmosfera di CO_2 a circa 90°. In numerose determinazioni ottenemmo risultati analoghi ai seguenti:

gr. 0.2556 di sostanza = cc. 33.2 NO e 0.8 N_2; 0°/760 mm.

Si deduce cioè il rapporto 1.94 NO : 1 Fe.

È facile riscontrare che il precipitato formatosi è costituito da xantogenato rameoso.

La scissione con cianuro di potassio venne compiuta analogamente alla precedente. Per l'analisi e la misura dei gas sviluppati, in alcune prove operammo rapidamente a caldo (80°) in atmosfera di CO_2, cercando di mantenere sempre un eccesso di cianuro alcalino. Il gas ottenuto era costituito principalmente da NO. Il tenore di N_2O si aggirava sul 10 %.

Nella soluzione è presente ferrocianuro, e operando a freddo lentamente in atmosfera di idrogeno od azoto, si riscontra nitroprussiato. La misura della suscettibilità magnetica è stata eseguita col metodo di Gouy [1], sui sali solidi.

Gli spettri d'assorbimento vennero determinati col dispositivo già descritto [2]. Nel campo visibile usammo uno spettroscopio di Hilger con fotometro a polarizzazione Nutting.

Chimica. — *Suscettibilità magnetica, spettri d'assorbimento e costituzione dei nitrosolfuri del ferro.* Nota del Corrisp. L. Cambi e di L. Szegö.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *I depositi di Ghelelli, del Gali koma e del Lago Afrera nella depressione dàncala.* Nota [3] del Corrisp. P. Vinassa de Regny.

Durante l'esplorazione della Dancalia centrale e meridionale, promossa dalla Soc. Maiaforit sotto la direzione dell'ing. Cavagnari e mia [4] svoltasi prevalentemente nelle Alpi dàncale, facemmo anche una discesa nella depressione sino a raggiungere, il 26 gennaio 1920, il fino ad allora ignoto Lago Afrera, che venne poi nuovamente raggiunto dal Nesbitt nel 1928 e successivamente dalla missione Franchetti [5] nella primavera del 1929.

Le ripetute escursioni del Cavagnari e mie sino ed entro la depressione [6] ci permisero di segnare con sufficiente esattezza il limite orientale della depressione stessa da Cululli sino al parallelo N. 13° 27′, che dal Marajum [7] per

(1) Per i dettagli rimandiamo alla pubblicazione di Szegö e Ostinelli, loc. cit.

(2) « Ber. », *61*, 1928, p. 2081; « Atti III Congr. Naz. Chim. Firenze », 1929, p. 395.

(3) Presentata nella seduta del 18 gennaio 1931.

(4) *Dancalia.* Ministero delle Colonie. - Alfieri e Lacroix, Roma 1923.

(5) *Nella Dancalia etiopica.* Mondadori, Milano 1930.

(6) Vinassa, op. cit., itinerari n. 11, 13, 21 e 22.

(7) Il Marajum è una lunga valle diretta da NE a SW trasversale all'andamento degli strati che sbocca nelle terrazze a serie prima della depressione e fiancheggiata da un notevole sistema montuoso costituito da sciști, da arenarie e da calcari, riccamente fossiliferi. Non esiste un Monte Marajum quale risulterebbe dalla Carta dimostrativa dell'I. G. M. che accompagna la relazione succitata del Franchetti.

Ghelelli ed il Gali koma raggiunge l'Afrera. Anzi dal Gali koma potei osservare come la depressione non si arresti là dove la cartina del Dainelli e del Marinelli [1] segna e chiude la quota 0, ma si estenda ancora verso SW. L'esplorazione del Nesbitt [2], che per primo traversò tutta la depressione nella sua lunghezza, ha confermato la mia osservazione. Esistono però dei rilievi che la sbarrano; ad es. in corrispondenza del Terù. Così almeno si rileva dal giornale di viaggio del barone Franchetti, che in succose e vivaci pagine da viaggiatore di fegato e di razza (poche disgraziatamente nella lunga relazione in grandissima parte non sua) porta preziose indicazioni di quote e di paesaggio. Questo soglio che interrompe la continuazione a S della depressione era già stato da me supposto [3] in base allo studio delle acque a W di Assab.

L'antico litolare è nettamente visibile anche da lontano per il candido nastro gessoso che lo caratterizza. I resti organici sono mirabilmente conservati e si direbbero deposti da pochi anni.

Sul litorale insieme alle numerose madrepore ed a numerosi echinidi e conchiglie non esiste che il gesso; il sale affiora più o meno visibilmente in macchie bianche. Tali macchie, deliquescenti al mattino, si asciugano col sole e per lo più scompaiono o lasciano una chiazza bianca. Il fenomeno di queste macchie è comunissimo, specialmente nelle piane alluvionali salmastre e lacustri come ad Amartù. Il fatto venne pure notato dai componenti la missione Franchetti.

Sui depositi interni della depressione in corrispondenza di venute basaltiche esistono però altri materiali e questi silicei. Essi sono evidentemente dovuti ad acque termali. Il primo di tali rilievi, ove potei raccogliere materiale del genere, è il vulcanello di Ghelelli; lo stesso tipo trovai anche al Gali koma [4], la collinetta basaltica a dosso tondeggiante (da cui il suo nome: Gali = camello; koma = collina) che serve egregiamente da punto di riferimento per quelli che si recano al lago Afrera a causa della tipica sagoma, che spicca nettamente nella desolata pianura circostante. E difatti anche la missione Franchetti, che si recò all'Afrera seguendo la via di Saadu ela invece di quella del Marajum seguìta da noi per la prima volta, si portò senz'altro al Gali koma.

(1) *Risultati scientifici di un viaggio nella Colonia Eritrea.* Pubbl. Ist. sup., Firenze 1912, tav. XI a p. 144. In questa cartina il limite meridionale della quota 0 è segnato a circa 13° 38′.

(2) *La Dancalia esplorata.* Bemporad, Firenze 1930.

(3) *Sopra i risultati di un viaggio in Dancalia.* « Atti Congr. geografico », Firenze 1921.

(4) Il Gali koma è un piccolo rilievo basaltico che sorge da un fondo di circa 90 m. e si alza per circa 60 m. Venne da me figurato nella veduta della fig. 6 (op. cit., p. 45). Non si comprende quindi perchè questa piccola collinetta, che nel testo della relazione Franchetti (p. 247) è giustamente riconosciuta come tale, apparisca poi nella carta dimostrativa, che accompagna il volume, come un sistema montuoso che a giudicare dalla scritturazione, dovrebbe occupare molti chilometri.

Ghelelli è un monticello che sorge proprio al margine dei terrazzi ciottolosi della depressione; esso ha una forma allungata con quattro piccole sporgenze ed è lungo poco più di 2 km., diretto SW–NE. La massa silicea si trova prevalentemente sulla terminazione nord–orientale. Qui il cordone litorale, più alto dell'attuale livello marino, è formato da gesso, da un crostone farinoso più o meno compatto con bei noduli silicei nettamente delimitati di forma sferica, ellittica o strozzata nel centro e da depositi di altro tipo, spesso stratificati. Identica è la formazione del Gali koma, salvo la selce stratificata. Solamente vi è da osservare che qui il cordone litorale è assai più basso che non a Ghelelli, trovandosi sotto la quota zero. La formazione silicea del Gali koma è posteriore a quella di Ghelelli, e corrisponde al momento in cui il livello del braccio marino, ormai separatosi dal Mar Rosso era evaporato sino a far affiorare l'antico scoglio sottomarino del Gali koma come una piccola isoletta a cocuzzolo tondeggiante, analoga a quelle che costellano tutto l'attuale litorale dàncalo.

Il gesso si presenta sia sotto forma di non molto grandi cristalli geminati, sia sotto forma fibrosa od anche a minute croste bianche cristalline. La speciale iridescenza del gesso cristallizzato fa un grande effetto sulla fantasia dei Dàncali, che lo chiamano « la pietra della luna ».

Silice mista a calcare si ha in due tipi di roccia. Uno è costituito da una massa di aspetto tripolaceo compatto, ma abbastanza facilmente divisibile in lamine di circa 1/4 di cm. di spessore. Le dendriti di manganese non mancano e si nota anche qualche frustolo vegetale. Manca però ogni traccia di altri organismi. Con acido dà forte effervescenza e si scioglie nella proporzione del 33,1 %, lasciando molta silice gelatinosa. Nel residuo si nota molta silice amorfa ed anche un poco del gesso che non si è tutto sciolto nell'acido. Nel soluto si trovano calcio, abbastanza magnesio e SO_4. Si tratta quindi di un miscuglio di calcare magnesiano misto a gesso ed a molta silice amorfa.

Il calcare pulverulento con noduli selciosi è bianco sporco. Si sfarina facilmente e i noduli ne saltan fuori perfetti e un poco scabrosi alla superficie, che talvolta è altresì incrostata da gesso. La massa avvolgente è prevalentemente calcarea e magnesiana. Si scioglie difatti in HCl nella notevole proporzione del 79,2 %. La presenza del carbonato di magnesio si rivela subito dal fatto che l'effervescenza avviene in due tempi; la seconda cioè quando si scalda l'acido. Il residuo è dato dalla parte di gesso che non si è tutto sciolto e da silice opalina. I noduli invece son tutti silicei. La silice del centro è quasi limpida a tipo di pietra focaia, all'esterno è bianca porcellanacea. Solo poche e rade macchiette ferruginose sono sparse nella pasta. Nessuna traccia di organismi.

Più riccamente ferruginoso è un altro tipo più leggero, di colore verdolino con macchie e striature a zone violacee. Si tratta però anche qui sempre di ferro; il violaceo viene dalla combinazione col verdolino di fondo

della roccia. La parte che si scioglie senza effervescenza è appena 8,2 %. Non esiste dunque calcare. Il soluto è dato solo da gesso e da ossidi di ferro. In sezione appare una massa opalina, in certi punti però trasformata in cristallini di quarzo. La pigmentazione ferruginosa è data da granuli tondeggianti, ammassati irregolarmente. Non è da escludere che questi granuli ferruginosi possano essere in rapporto colla vita. La roccia è intersecata da talune minute fratture, rilegate da silice amorfa quasi trasparente.

Esclusivamente silicee sono altre due rocce. Una è porcellanacea, compatta, a frattura nettamente concoide, con poche macchiette ferruginose. Al microscopio presenta una struttura quasi fluidale, a strati ondulati, indicati anche della disposizione dei granuli ferruginosi. Manca ogni traccia di quarzo cristallino; la pasta è formata tutta da silice amorfa.

L'ultimo tipo di roccia, che manca al Gali koma, sembra una Hälleflinta per la sua netta stratificazione a strati grigi, giallini, porcellanacei ogni tanto intercalati con strati irregolari di silice jalina trasparentissima. Al microscopio si notano alcuni granuli ferruginosi disposti paralleli alla zonatura. Si tratta di una tipica formazione idrotermale, connessa al fenomeno vulcanico della regione. Formazione di silice simili si hanno anche oggi nella regione. Poichè, benchè io non ne abbia trovata, è certamente di silice quella formazione di sostanza gelatinosa che poi indurisce, di cui parla l'estensore della relazione Franchetti a p. 301 per un'acqua termale a 68° presso Cohul (1).

Formazioni analoghe a quelle del Gali koma e di Ghelelli si stanno anche formando presso al Lago Afrera, per effetto delle potenti fonti termali che scaturiscono tutt'attorno al lago e che, come indicai sino da quando ne feci la prima osservazione, sono quelle che nutrono lo specchio d'acqua. Raccolsi del materiale del lago e precisamente dei crostoni salino–gessosi leggermente deliquescenti, delle incrostazioni saline sui vegetali che nel lago caddero o che vegetano sulla sua riva. Ho anche raccolto la « spuma » caratteristica che dà al lago l'aspetto di uno specchio d'acqua su cui galleggino dei cordoni ondulati bianchi. Non si tratta naturalmente di spuma, ma di minute lamelle saline. La loro origine si spiega facilmente. La superficie acquea evapora rapidamente, i sali si concretano in una pellicola superficiale. Questa, per la sua leggerezza, data la densità dell'acqua, e per la sua forma lamellare non cade a fondo. L'increspatura delle acque per il vento raggruppa poi in cordoni ondulati questi sali.

I crostoni pulverulenti delle rive hanno analogia con quelli di Ghelelli. In acqua calda se ne scioglie buona parte; nel soluto passano il poco cloruro di sodio e quello di magnesio, poi i solfati di calcio e di magnesio.

(1) Il relatore suppone possa invece trattarsi del grasso dei pesci lessati nella sorgente calda. Ma evidentemente questo non può essere che uno scherzo.

La soluzione è difatti amara e pochissimo salata. Il residuo trattato con acido dà poca effervescenza e lascia ancora una parte insoluta nella quale si notano molti granuli di quarzo arrotondati e parecchi elementi basaltici. L'origine eolica del quarzo è indubitata. Gli elementi basaltici vengono dallo sfatticcio delle rive, ma possono essi pure esser portati dal vento. Il soluto ha un leggero colore giallino dovuto alla soluzione dei sali di ferro contenuti negli elementi basaltici. Trattato con ammoniaca dà precitato di alluminio, appena ingiallito da idrossido ferrico. Abbondante la silice gelatinosa. Questi crostoni son dunque costituiti dai cloruri di magnesio e sodio (tracce di potassio), dai solfati di magnesio e di calcio, da poco carbonato calcare, da silicato alluminico e da silice colloide. Non ho creduto necessario far determinazioni quantitative, che non hanno interesse per il mio scopo, che è semplicemente quello di dimostrare come dalle sorgenti termominerali si abbiano appunto i materiali che troviamo anche a Ghelelli, naturalmente trasformati e modificati prima dall'ambiente marino (specialmente per la presenza di calcare) e poi dalle alterazioni successive. Il carbonato magnesiano di Ghelelli è certo dovuto alla reazione col calcare del cloruro di magnesio.

Un poco diverso è il contenuto delle concrezioni saline sui vegetali del lago. Qui difatti oltre ai soliti componenti, cloruri e solfati, si ha una forte quantità di calcare svelato dalla forte effervescenza. Questa maggior quantità di calcare è certo dovuta ad un effetto della vita. Anche il materiale insolubile è poco, ed esso pure (pochi granuli di quarzo e di elementi basaltici) è stato portato dal vento.

Le « spume » del lago si sciolgono quasi tutte in acqua calda, che, lasciata raffreddare, depone del gesso. Il materiale è bruno per materia organica ed è fortemente deliquescente. Poca effervescenza nel residuo per carbonato calcare; il resto è materia organica.

Le acque del Lago Afrera son perciò acque salmastre, selenitose, magnesiane. Amare quindi più che salate. Ogni origine da relitto sembra esclusa. I sali provengono tutti dalle sorgenti termominerali che circondano e nutrono il lago.

Da quanto si è detto si può concludere, cosa che risulta del resto oggi anche dalle osservazioni della missione Franchetti in tutta la regione circostante, che il fenomeno idrotermale è molto diffuso non solo nella depressione ma anche in tutto il ciglione che la circonda. E nemmeno è improbabile che la relativa ricchezza di acque, per quanto localizzate, che sarebbe difficilmente esplicabile in una regione come questa, sia da riportarsi ad un forte apporto di acque giovanili.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una generalizzazione del calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata.* Nota di Enea Bortolotti, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

10. In questa Nota [2] indicherò una estensione ulteriore del calcolo di Ricci rispetto a una quadrica differenziale, che comprende anche il calcolo assoluto generalizzato del Vitali, e ha anzi, rispetto a questo, non richiedendo la irriducibilità della forma fondamentale, il vantaggio di un ancor più vasto campo di possibili applicazioni.

Siano ancora le $u^r\,(r, s, t, p, v = 1, 2, \cdots, n)$ coordinate curvilinee in una varietà X_n, che ora però supporremo *proprio n-dimensionale*. Riprendendo, in sostanza, certe vedute variamente espresse da Cartan, König, Schouten [3], immaginiamo associato al punto variabile $P\,(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ della X_n uno spazio affine μ-dimensionale, $\underset{P}{E_\mu}$, passante per esso; l'intero μ essendo qualunque $(\mu \gtreqless n)$ [4]. Ad es., la X_n potrà essere una V_n di R_N euclideo e gli $\underset{P}{E_\mu}$ i rispettivi spazi (euclidei) tangenti, σ_1; 2-osculatori, σ_2; $\cdots$; r-osculatori, σ_r; $\cdots$ o invece, gli spazi normali (normali ai σ_1), o normali ai $\sigma_2, \cdots,$ ai $\sigma_r, \cdots,$ ecc.

Tornando alle ipotesi più generali: stabiliamo su ciascuno degli $\underset{P}{E_\mu}$ una *base*, cioè un sistema di vettori (controvarianti) fondamentali,

$$e_\alpha\ (\alpha = 1, 2, \cdots, \nu),$$

non nulli, sotto la sola condizione che ogni vettore dell'$\underset{P}{E_\mu}$ generico possa esprimersi quale combinazione lineare dei vettori della corrispondente base.

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) Si vedano le altre due Note: *Sulle forme differenziali quadratiche specializzate*, e *Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata*, già pubblicate su questi «Rendiconti»: pp. 541-547, vol. XII (1930) e pp. 19-25, vol. XIII (1931). Qui proseguiamo ancora nella numerazione delle formule e dei paragrafi e usiamo le medesime notazioni adottate nelle Note precedenti.

(3) É Cartan, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*. «Acta Mathematica», t. 48, 1925, pp. 1-42; R. König, *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre*, «Jahresb. Deut. Mathem. Verein.», B. 28, 1919, pp. 213-228; J. A. Schouten, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtpunkte zur Grundlegung der Geometrie*. «Rend. Circolo Matem. Palermo», t. 50, 1926, pp. 142-169, spec. 147-149.

(4) Secondo gli AA. ora citati s'intende invece sempre che sia $\mu \geq n$.

Questi vettori dovranno dunque essere in numero $(\nu) \geqq \mu$, e tra di essi, ve ne dovranno essere appunto μ linearmente indipendenti: ma non escludiamo che possa anche essere $\nu > \mu$. Per quanto in generale appaia conveniente l'assumere una base formata da vettori indipendenti fra loro, pure vi sono casi in cui si presenta naturalmente la scelta di una base, i cui elementi possono anche essere fra loro linearmente legati (1). Intenderemo dunque che sia $\nu \geqq \mu$, e nel caso $\nu > \mu$, posto $q = \nu - \mu$, che siano (come ai nn. 2, 3) $\overset{a}{\omega}{}^{\alpha}$, (con $a, b, c, \cdots = 1, 2, \cdots, q$) q sistemi indipendenti di soluzioni delle equazioni $\omega_\alpha \, e_\alpha = 0$. E supporremo, in ogni caso, che la base si faccia variare *soltanto per trasformazioni lineari*

$$e'_\alpha = c_\alpha^{\cdot\beta} \, e_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{40}$$

non degeneri, cioè a determinante $\left| c_\alpha^{\cdot\beta} \right| \neq 0$: le $c_\alpha^{\cdot\beta}$ essendo del resto funzioni arbitrarie delle u^r. I sistemi a uno o più indici $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ variabili fra 1 e ν, che per una trasformazione (40) si comportino come tensori (covarianti, controvarianti, misti) si diranno tensori di $\underset{P}{E_\mu}$, sotto la condizione che per ogni indice γ di covarianza, indicato il tensore con $H^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_h}_{\cdots\cdots\gamma\cdots\cdots}$, si abbia $H^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_h}_{\cdots\cdots\gamma\cdots\cdots} \overset{1}{\xi}_{\alpha_1} \overset{2}{\xi}_{\alpha_2} \overset{h}{\xi}_{\alpha_h} \overset{a}{\omega}{}^{\gamma} = 0$, qualunque siano i vettori covarianti $\overset{1}{\xi}_{\alpha_1} \overset{2}{\xi}_{\alpha_2} \overset{h}{\xi}_{\alpha_h}$. Si potranno anche considerare *tensori di* X_n, a indici $r, s, t, \cdots$, variabili fra 1 ed n, e tensori ad indici di entrambe le serie $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, r, s, t, \cdots$; presto ne avremo degli esempi.

Supponiamo d'ora in poi, per semplicità, per quanto ciò non sia affatto essenziale per ciò che esporremo in seguito, che la X_n coi rispettivi $\underset{P}{E_\mu}$ associati esista in un ambiente euclideo R_N; la X_n sarà dunque una varietà riemanniana, V_n, e supposto che l'equazione $P = P(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ ne dia una rappresentazione parametrica in R_N coi parametri u^r, il tensore fondamentale (di rango n) della metrica di V_n sarà $a_{rs} = \dfrac{\partial P}{\partial u^r} \times \dfrac{\partial P}{\partial u^s}$. E gli $\underset{P}{E_\mu}$ associati ai punti P della V_n saranno degli spazi euclidei, $\underset{P}{R_\mu}$, di R_N, sui quali i vettori e_α saranno vettori di R_N: posto $a_{\alpha\beta} = e_\alpha \times e_\beta$, il tensore $a_{\alpha\beta}$, di rango μ, sarà il tensore fondamentale di una metrica locale

(1) Così se gli $\underset{P}{E_\mu}$ sono i σ_r osculatori alla V_n di R_N rappresentata dall'equazione $P = P(u^1, u^2, \cdots, u^n)$, è naturale assumere la base costituita dai vettori

$$\frac{\partial^h P}{\partial u^{s_1} \cdots \partial u^{s_h}} \; (1 \leq h \leq r).$$

Questi in generale non sono fra loro indipendenti: pure la scelta di un'altra base complicherebbe singolarmente gli sviluppi.

(euclidea) in ciascun $\underset{P}{R_\mu}$, subordinata (come quella di V_n) alla metrica euclidea dell'ambiente R_N, e variabile da punto a punto della V_n, cioè al variare di P. Posto infine $a_{\alpha r} = \boldsymbol{e}_\alpha \times \frac{\partial P}{\partial u^r}$, le $a_{\alpha r}$ potranno servire per mettere in relazione metrica la V_n con gli $\underset{P}{R_\mu}$ associati. La metrica locale sugli $\underset{P}{R_\mu}$ sarà, se $\mu < \nu$, *specializzata* $q = \nu - \mu$ volte; il che analiticamente sarà espresso dal fatto che le equazioni $a_{\alpha\beta}\omega^\alpha = 0$ ammetteranno i q sistemi di soluzioni linearmente indipendenti $\underset{a}{\omega^\alpha}$ $(a = 1, 2, \cdots, q)$. Non è qui luogo a parlare di specializzazione *algebrica* o *assoluta*; ma a parte questo, è ovvio come la maggior parte delle considerazioni svolte (nelle Note precedenti) sulle metriche riemanniane specializzate (in particolare tutto quanto riguarda la corrispondente algebra tensoriale) possano ripetersi senza modificazioni sostanziali. Così dato un vettore ξ dell'R_μ associato al punto P di V_n, le quantità $\xi_\alpha = \xi \times \boldsymbol{e}_\alpha$ ne saranno le componenti covarianti nel sistema $(\boldsymbol{e}_\alpha)$, e ogni soluzione ξ^α del sistema $\xi^\alpha a_{\alpha\beta} = \xi_\beta$ ne costituirà un sistema di componenti controvarianti. Il quadrato del modulo di un vettore ξ sarà $\xi^2 = a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \xi_\alpha\xi^\alpha$, il prodotto scalare di due vettori ξ, η sarà $\xi \times \eta = a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta = \xi_\alpha\eta^\alpha$, ecc.

La metrica dell'ambiente R_N determina, oltre alla metrica locale su ciascun $\underset{P}{R_\mu}$, anche un raccordo, una *connessione metrica euclidea*, tra gli R_μ associati a due punti infinitamente vicini della V_n: e infatti si presenta naturale questa estensione della nozione di *trasporto per equipollenza* dei vettori secondo Levi-Civita: considerare come equipollenti rispetto a V_n, lungo PP*, due vettori ξ, ξ^* degli R_μ associati ai punti P, P* infinitamente vicini di V_n, quando la differenza vettoriale $\xi^* - \xi$ (calcolata nell'R_N ambiente) è ortogonale all'R_μ associato a P, ossia ξ e ξ^* hanno eguali moduli, e sono inclinati di angoli eguali (a meno di infinitesimi d'ordine superiore a quello della lunghezza PP*) su ciascuna direzione dell'R_μ in P. Ciò equivale a dire che una serie $\xi(s)$ di vettori degli R_μ associati ai punti P di una curva γ di V_n è formata di vettori equipollenti lungo γ, se il differenziale $d\xi(s)$ calcolato in R_N è, lungo γ, sempre normale in ciascun punto P al rispettivo $\underset{P}{R_\mu}$. Questa nozione ovviamente comprende il trasporto per equipollenza dei vettori tangenziali alla V_n secondo Levi-Civita e quello, da me introdotto, dei vettori normali (1).

La legge di trasporto detta sopra si esprime analiticamente con le formule

$$(41) \qquad \bar{d}\xi_\alpha = d\xi_\alpha - \begin{bmatrix} \alpha r \\ \beta \end{bmatrix} \xi^\beta du^r = d\xi_\alpha - \left\{ \begin{matrix} \alpha r \\ \beta \end{matrix} \right\} \xi_\beta du^r = 0 ,$$

(1) *Varietà minime infinitamente vicine in una* V_n *riemanniana.* «Memorie R. Accad. dalle Scienze di Bologna», serie VIII, t. V, 1927-28, pp. 43-48.

ove abbiamo posto

$$(42) \qquad \begin{bmatrix} \alpha r \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial u^r} \times \boldsymbol{e}_\beta \,, \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} \alpha r \\ \beta \end{bmatrix} \omega_a^\beta = 0 \,,$$

e abbiamo indicato con $\left\{ \begin{matrix} \alpha r \\ \beta \end{matrix} \right\}$ un qualunque sistema di soluzioni delle equazioni $\left\{ \begin{matrix} \alpha r \\ \beta \end{matrix} \right\} a_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha r \\ \gamma \end{bmatrix}$. È evidente *a priori* che il trasporto in parola *conserva lunghezze ed angoli*; ciò analiticamente è espresso dalle formule

$$(43) \qquad \bar{d}\, a_{\alpha\beta} = d\, a_{\alpha\beta} - \left(\begin{bmatrix} \alpha r \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta r \\ \alpha \end{bmatrix} \right) du^r = 0 \,.$$

Se si volesse procedere *indipendentemente da ogni ipotesi sull'ambiente di immersione*, basterebbe: introdurre in modo arbitrario una metrica riemanniana non specializzata per la X_n, e una metrica euclidea $q = \nu - \mu$ volte specializzata, e del resto arbitraria e arbitrariamente variabile da punto a punto della X_n, per gli $\underset{P}{E_\mu}$ associati: assegnare poi una legge di raccordo metrico tra gli E_μ associati a punti infinitamente vicini della X_n, cioè (essendo già date le $a_{\alpha\beta}$) un sistema di quantità $\begin{bmatrix} \alpha r \\ \beta \end{bmatrix}$, soddisfacenti alle (43) e del resto arbitrarie.

Ad ogni modo le (41) c'indicano già come debba proseguirsi per costruire, pei tensori di $\underset{P}{R_\mu}$, anche un'*analisi tensoriale*: essendo

$$\bar{d}\xi_\alpha = a_{\alpha\beta}\, \bar{d}\xi^\beta \,,$$

con $\bar{d}\xi^\beta = d\xi^\beta + \left\{ \begin{matrix} \alpha r \\ \beta \end{matrix} \right\} \xi^\alpha\, du^r$, si potranno considerare le $\bar{d}\xi_\alpha$ e $\bar{d}\xi^\beta$ (queste ultime, se $\nu > \mu$, non del tutto determinate) come componenti covarianti e controvarianti di un vettore, il *differenziale assoluto* del vettore ξ, che in relazione con l'ambiente R_N è il componente secondo $\underset{P}{R_\mu}$ del differenziale calcolato in R_N: dal differenziale assoluto $\bar{d}\xi_\alpha$ si ricaverà la *derivata covariante* $\nabla_r \xi_\alpha$, che è un tensore a due indici appartenenti a serie diverse: l'estendere poi queste operazioni *ai tensori qualunque*, anche ad indici delle due serie, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, r, s, t, \cdots$ (per quelli della seconda serie intervenendo i simboli di Christoffel costruiti per la forma fondamentale della metrica di V_n) non presenta alcuna difficoltà, e non staremo a sviluppare nei particolari questa estensione. Ci limiteremo, per concludere, a notare che, se si suppone che gli spazi $\underset{P}{R_\mu}$ associati siano i σ_m, m-osculatori, e si intendono coordinate, con una legge arbitrariamente fissata, ai numeri $1, 2, \cdots, \nu$, con $\nu = \binom{n+m}{m} - 1$, le combinazioni con ripetizione delle

classi $1, 2, \cdots, m$ dei numeri $1, 2, \cdots, n$, e corrispondentemente si indicano con $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_\nu$ i vettori derivati degli ordini $1, 2, \cdots, m$ del punto variabile $P(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ della V_n, assunti questi vettori a *base* sui σ_m osculatori, si ottiene, come caso particolare del calcolo assoluto di cui abbiamo qui rapidamente indicate le linee costruttive, *appunto il calcolo assoluto generalizzato del Vitali pei tensori ad indici di classe m*, esteso però dal caso in cui la dimensione μ del σ_m osculatore è proprio ν (cioè, la massima possibile), che è il solo caso considerato dal Vitali, al caso generale, in cui può anche essere $\mu < \nu$ [1].

Nel calcolo assoluto del Vitali veramente si considerano pure tensori a più indici di classi qualunque *anche diverse fra loro*: inteso in questo senso più largo, e liberato da ogni restrizione circa le dimensioni dei successivi spazi osculatori alla varietà, il calcolo del Vitali può venire ancora compreso nella sopra accennata teoria, convenientemente generalizzata.

Basta supporre che al punto P generico dello V_n siano associati, al modo detto al n. 10, con legge qualunque *più spazi* euclidei

$$\underset{P}{R_{\mu_1}}, \underset{P}{R_{\mu_2}}, \cdots, \underset{P}{R_{\mu_t}}, \cdots,$$

di dimensioni $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t, \cdots$, uscenti da esso; ed estendere (il che riesce ovvio) le precedenti considerazioni a tensori che presentino indici di due o più delle serie $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \cdots$; $\cdots$; $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \cdots$; $\cdots$ corrispondenti alle singole totalità di spazi associati. Il calcolo che così si ottiene [2] si riduce in effetto, quando gli spazi associati siano i σ_1 (spazi tangenti), σ_2 (spazi 2–osculatori), $\cdots, \sigma_t$ (spazi t–osculatori), $\cdots$ al calcolo assoluto del Vitali inteso nel senso più generale, relativo cioè ai tensori a indici di classi qualunque.

(1) Questo caso generale (anche nei riguardi dei tensori a indici di diverse classi, di cui dirò più innanzi) è studiato nel mio lavoro altre volte citato, *Calcolo assoluto generalizzato*... (« Atti Istit. Veneto »), e più ampiamente nella Memoria in corso di pubblicazione (« Rendiconti Seminario Matem. Univ. di Padova »), *Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo differenziale assoluto generalizzato del Vitali, ed applicazione alle geometrie riemanniane di specie superiore.*

(2) Il quale risulta di una forse eccessiva generalità.

Matematica. — *Sui tensori emisotropi.* Nota di MARIA PASTORI, presentata [1] dal Corrisp. U. CISOTTI.

Seguendo la denominazione introdotta dal prof. Cisotti [2], chiamo *tensori emisotropi* di un S_n euclideo quei tensori le cui componenti cartesiane ortogonali rimangono inalterate per un cambiamento di coordinate a determinante $+1$ e si mutano nelle opposte per un cambiamento di coordinate a determinante -1.

In questa Nota, estendendo i risultati ottenuti dal prof. Cisotti per i tensori tripli e quintupli di S_3, determino le proprietà dei tensori emisotropi delle varietà euclidee, giungendo alla conclusione che ogni loro componente può essere rappresentata dal prodotto di una componente di ε [3] per una componente di un tensore isotropo.

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) U. CISOTTI, *Tensori isotropi e tensori emisotropi*, questi «Rendiconti», vol. XI, serie 6ª, 1° sem., 1930, pp. 917-920 e *Tensori quintupli emisotropi*, ibidem, vol. XII, serie 6ª, 2° sem., 1930, pp. 195-199.

(3) Con tale simbolo indichiamo quel tensore n^{plo} di S_n che, rispetto al sistema cartesiano ortogonale che si considera, ha nulle tutte le componenti con almeno due indici eguali, e le altre eguali all'unità positiva o negativa secondo che la permutazione degli indici è di classe pari o dispari rispetto alla fondamentale $1, 2, \cdots, n$ (cfr. U. CISOTTI, *Lezioni di calcolo tensoriale*, Milano, Tamburini, 1928, p. 8).

Definito in tal modo il tensore ε, le sue componenti rispetto ad un altro qualunque sistema di coordinate cartesiane ortogonali si deducono dalle precedenti con le note formole. Si trova allora che esse rimangono eguali a quelle precedentemente definite per ogni cambiamento di coordinate a determinante $+1$, e si mutano nelle opposte per ogni cambiamento di coordinate a determinante -1.

Allo stesso modo, per una varietà riemanniana, si può definire il tensore ε le cui componenti covarianti e controvarianti, rispetto ad un dato sistema di coordinate, si deducono dalle precedenti sostituendo all'unità $\sqrt{a}$ nel primo caso e $\frac{1}{\sqrt{a}}$ nel secondo (dove con a viene indicato il determinante dei coefficienti della forma fondamentale). Le note leggi di trasformazione per le componenti di un tensore permettono di determinare le componenti di ε rispetto a qualunque sistema di coordinate. E si trova ancora che esse rimangono quelle definite nel modo precedente o si mutano nelle opposte secondo che il determinante jacobiano delle nuove coordinate rispetto alle primitive è positivo o negativo.

Tutto ciò equivale a definire le componenti covarianti o controvarianti del tensore ε nel modo precedente, ma indipendentemente dal sistema di coordinate, e convenire poi di mutare il segno al radicale che figura in esse ogni volta che, per un cambiamento di

Come già per i tensori isotropi [1], estendo poi definizione e proprietà dei tensori emisotropi alle varietà riemanniane.

1. – Prima proprietà.

Consideriamo un tensore m^{plo} emisotropo di un S_n euclideo. È facile constatare che:

Sono nulle tutte le componenti (cartesiane ortogonali) i cui indici non contengono tutti i numeri $1, 2, \cdots, n$ [2].

Indicandole infatti con $T_{i_1 i_2 \cdots i_m}$, $(i_1, i_2, \cdots, i_m, j_1, j_2, \cdots, j_m = 1, 2, \cdots, n)$ si deve avere, per la definizione di tensore emisotropo:

$$(1) \qquad T_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \pm T_{j_1 j_2 \cdots j_m} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \cdots \alpha_{j_m i_m}$$

dove le α sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale e vale il segno superiore o l'inferiore secondo che il loro determinante è $+1$ o -1.

coordinate, il corrispondente jacobiano è negativo (cfr. T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, p. 180).

Un altro modo di mettere in evidenza la natura del tensore ε si ha dalla considerazione dei tensori relativi, dotati cioè di peso. Si chiama tensore di peso p un tensore le cui componenti soddisfano, per un cambiamento di coordinate, alla legge che si deduce dalla ordinaria moltiplicando il secondo membro per la potenza del corrispondente jacobiano con esponente p. Il sistema delle componenti di ε definite come all'inizio di questa nota, costituisce (in coordinate generali) il sistema delle componenti tanto covarianti quanto controvarianti di un tensore relativo di peso 1 nelle componenti covarianti e di peso -1 nelle componenti controvarianti (cfr. ad es. O. Veblen, *Invariants of quadratic differential forms*, «Cambridge Tracts in Math. and Math.-Physics», 1927, p. 25). Una estensione del tensore ε si ha nei sistemi assoluti $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\sigma_\nu}}$ del Vitali associati alle funzioni N_ν-varianti (v. G. Vitali, *Geometria nello spazio Hilbertiano*, Bologna, Zanichelli, 1929, pp. 172-174). Le componenti covarianti di ε rientrano come caso particolare in tali sistemi, ponendo eguale ad 1 la classe comune di tutti gli indici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\sigma_\nu}$. Rimane allora $N_\nu = 1$ e si prende come funzione 1-variante $\sqrt{a}$. Questa funzione è 1-variante a meno del segno, donde le osservazioni precedenti. Prendendo al posto di $\sqrt{a}$ una funzione 1-variante in valore e segno (come è ad es. il determinante formato dalle componenti covarianti di n vettori; cfr. T. Levi-Civita, loc. cit., p. 178) le componenti del tensore ε ad essa associato nel senso del Vitali rimarrebbero eguali per qualunque sistema di coordinate.

Osserviamo infine che, passando dal caso di $\nu = 1$ al caso di $\nu = 2$ si trova subito che non esistono valori di n per cui si possa associare alla funzione 2-variante a un sistema $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\sigma_\nu}}$, mentre per ogni potenza intera e positiva di a si trova un valore di n per cui è possibile associare a tale potenza un sistema $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\sigma_\nu}}$.

(1) Cfr. le mie Note: *Sui tensori isotropi: relazioni fra le componenti*, questi «Rendiconti», serie 6ª, vol. XII, 2° sem. 1930, pp. 374-379 e *Espressione generale dei tensori isotropi*, ibidem, pp. 499-502.

(2) U. Cisotti, secondo loc. cit., n. 4.

Supposto allora che fra i numeri $i_1 i_2 \cdots i_m$ non sia compreso il numero p (essendo p uno dei numeri $1, 2, \cdots, n$), consideriamo la sostituzione ortogonale in cui sono nulle tutte le α tranne quelle della diagonale principale e queste sono tutte eguali ad 1, tranne l'elemento comune alla riga e alla colonna p^{esima} che è eguale a -1. Poichè in questo caso il determinante delle α è -1, la (1) diviene:

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_m} = - T_{i_1 i_2 \cdots i_m} \tag{2}$$

e dimostra l'asserto.

Ne deduciamo i seguenti corollari:

a) *Non esistono tensori m^{pli} emisotropi con $m < n$.*

b) *Sono nulle le componenti ad indici tutti eguali* (1).

2. – Seconda proprietà.

Sono nulle tutte le componenti in cui un indice figura un numero pari di volte (2).

Sia, per fissare le idee, l'indice 1 che figura un numero pari di volte tra i numeri $i_1, i_2 \cdots i_m$. Consideriamo la sostituzione ortogonale in cui sono nulli tutti i coefficienti tranne quelli della diagonale principale, e in essa $\alpha_{11} = -1$ e tutti gli altri sono eguali ad 1. Poichè in questo caso deve valere nella (1) il segno inferiore, se ne deduce ancora la (2), donde l'asserto.

In ogni componente non nulla di un tensore emisotropo gli indici si distribuiranno quindi in gruppi di $1, 3, 5, \cdots$, ecc. elementi tutti eguali, essendo gli elementi di ciascun gruppo indici consecutivi o no.

Se indichiamo quindi con $2k_1 + 1$ ($k_1, k_2, \cdots, k_n$ numeri interi, positivi o nulli) il numero degli indici eguali ad 1 che figurano in una componente non nulla, con $2k_2 + 1$ il numero degli indici eguali a 2 che vi figurano, $\cdots$ con $2k_n + 1$ il numero degli indici eguali ad n che vi figu-

(1) Questa proprietà si può constatare anche direttamente nel modo seguente: Sia, per fissare le idee, $i_1 = i_2 = \cdots = i_m = 1$. Se m è dispari consideriamo una sostituzione ortogonale a determinante $+1$ in cui sia $\alpha_{11} = -1$ e siano nulli gli altri elementi della prima riga e prima colonna (basterà che il minore d'ordine $n - 1$ complementare di α_{11} sia il determinante di una sostituzione ortogonale e sia -1). In questo caso vale nella (1) il segno superiore, da cui (poichè m è dispari) $T_{11 \cdots 1} = - T_{11 \cdots 1}$.

Se m è pari basterà considerare una sostituzione ortogonale a determinante -1 in cui α_{11} sia indifferentemente $+1$ o -1 e siano nulli tutti gli altri elementi della prima riga e prima colonna.

(2) Cfr. U. Cisotti, secondo loc. cit., n. 5.

rano, si dovrà avere: $m = 2k + n$, dove si è posto $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Concludiamo quindi:

I numeri m ed n hanno la stessa parità (1).

3. – Terza proprietà.

Se si considerano in una componente due gruppi di indici tutti eguali e si scambiano tra loro i due valori degli indici dei due gruppi (2), *la componente muta segno* (3).

Sia per esempio $n = 4$, $m = 6$ e consideriamo, per fissare le idee, la componente T_{121314}. Per essa la (1) diviene:

$$(1') \qquad T_{121314} = \pm T_{j_1 j_2 j_3 i_4 i_5 j_6} \alpha_{j_1 1} \alpha_{j_2 2} \alpha_{j_3 1} \alpha_{j_4 3} \alpha_{j_5 1} \alpha_{j_6 4} .$$

Consideriamo la sostituzione ortogonale in cui:

$$\alpha_{14} = \alpha_{41} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1 .$$

e le altre α sono tutte nulle. Sostituendo in (1') ed osservando che il determinante della sostituzione è -1, si ha:

$$T_{121314} = - T_{424341} .$$

In generale, qualunque siano m ed n, se sono p e q i due valori degli indici dei due gruppi, basta considerare la sostituzione ortogonale in cui $\alpha_{pq} = \alpha_{qp} = 1$ e sono nulli tutti gli altri elementi della riga e colonna p^{esima} e q^{esima} e le α delle altre righe e colonne sono tutte nulle, tranne quelle appartenenti alla diagonale principale che sono eguali ad 1. Poichè il determinante della sostituzione è -1, si puo ripetere la dimostrazione precedente.

Ora, poichè le componenti non nulle di un tensore emisotropo contengono tutti gli indici $1, 2, \cdots, n$, ciascuna di esse presenterà una certa permutazione di questi numeri, convenendo di prendere soltanto il primo

(1) A questa conclusione si può giungere anche direttamente. Basta infatti considerare la sostituzione ortogonale in cui sono nulle tutte le α tranne quelle della diagonale principale, e queste sono tutte eguali a -1. Se n è pari il determinante di tale sostituzione è $+1$, deve quindi nella (1) valere il segno superiore; ma se m è dispari, se ne deduce la (2), qualunque sia la componente considerata. In spazi a un numero pari di dimensioni non esistono quindi tensori emisotropi dispari. Allo stesso modo si constata che in spazi a un numero dispari di dimensioni non esistono tensori emisotropi pari.

(2) Lasciando tutto il resto inalterato, e cioè, oltre agli indici degli altri gruppi, lasciando inalterati, in ciascuno dei due gruppi che si considerano, il numero e la posizione degli indici.

(3) Cfr. U. Cisotti, secondo loc. cit., nn. 6 e 7.

elemento per ogni gruppo di più indici tutti eguali (così le due permutazioni presentate dalle componenti dell'esempio precedente sono 1, 2, 3, 4 e 4, 2, 3, 1). Dalla proprietà ora dimostrata, poichè ad ogni permutazione di classe pari si può giungere con un numero pari di scambi e ad ogni permutazione di classe dispari con un numero dispari di scambi, si deduce:

Ogni permutazione eseguita sugli n indici che presenta (con la convenzione precedente) *una componente, non ne muta il valore, ma solo il segno se la permutazione è di classe dispari rispetto a quella considerata* (1).

Si intende che vanno lasciati inalterati il numero e la posizione degli indici di ogni gruppo.

Tenendo presenti, insieme con le proprietà ora dimostrate, le prime due proprietà dei tensori isotropi (2) e la definizione del tensore ε, si conclude che: ogni componente di un tensore emisotropo $(2k+n)^{plo}$ può essere rappresentata come il prodotto di una componente di un tensore isotropo $(2k)^{plo}$ per una componente di ε. Per $k=0$ si avrà $T_{i_1 i_2 \dots i_n} = A\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ essendo A uno scalare arbitrario (3).

È quindi manifesta l'importanza del tensore ε nella considerazione dei tensori emisotropi.

4. – Tensori emisotropi in varietà riemanniane.

Come già per le Note precedenti (4), anche le considerazioni svolte in questa sono senz'altro applicabili a tensori di varietà riemanniane, sostituendo alle componenti cartesiane ortogonali le componenti intrinseche (ortogonali).

Definiamo quindi *tensore emisotropo* di una varietà riemanniana V_n un tensore le cui componenti intrinseche, per una mutazione dell'ennupla di congruenze ortogonali in un'altra:

$$\lambda'^{k}_{i} = \lambda^{k}_{j}\, c_{ij}\,, \tag{3}$$

rimangono inalterate o cambiano di segno secondo che il determinante dei coefficienti c_{ij} è $+1$ o -1.

Le proprietà ora dimostrate sono valide per le componenti intrinseche dei tensori emisotropi. In particolare il più generale tensore n^{plo} emisotropo avrà le seguenti componenti intrinseche:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} = A\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \text{ (5)}. \tag{4}$$

(1) Cfr. U. Cisotti, secondo loc. cit., n. 8.

(2) Cfr. le mie due Note citate.

(3) Cfr. le due Note citate del prof. Cisotti.

(4) Cfr. le mie due Note citate.

(5) Come nel n. precedente, A rappresenta uno scalare arbitrario ed $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ha il significato ricordato all'inizio della nota (3) a p. 109.

Ricordando le formole che legano le componenti intrinseche di un tensore con le sue componenti covarianti $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$, si avrà, indicando con $\lambda_{\underset{j}{i}}$ i momenti dell'ennupla di congruenze ortogonali:

$$(5) \qquad T_{i_1 i_2 \dots i_n} = A \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \lambda_{\underset{j_1}{i_1}} \lambda_{\underset{j_2}{i_2}} \cdots \lambda_{\underset{j_n}{i_n}} = A \begin{vmatrix} \lambda_{\underset{1}{i_1}} & \lambda_{\underset{2}{i_1}} & \cdots & \lambda_{\underset{n}{i_1}} \\ \lambda_{\underset{1}{i_2}} & \lambda_{\underset{2}{i_2}} & \cdots & \lambda_{\underset{n}{i_2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{\underset{1}{i_n}} & \lambda_{\underset{2}{i_n}} & \cdots & \lambda_{\underset{n}{i_n}} \end{vmatrix}$$

o anche, indicando con c il numero delle inversioni della permutazione $i_1 i_2 \cdots i_n$;

$$(5') \qquad T_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^c A \begin{vmatrix} \lambda_{\underset{1}{1}} & \lambda_{\underset{2}{1}} & \cdots & \lambda_{\underset{n}{1}} \\ \lambda_{\underset{1}{2}} & \lambda_{\underset{2}{2}} & \cdots & \lambda_{\underset{n}{2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{\underset{1}{n}} & \lambda_{\underset{2}{n}} & \cdots & \lambda_{\underset{n}{n}} \end{vmatrix}.$$

Ma il quadrato del determinante delle λ è eguale ad a, come si ottiene subito ricordando le formole: $a_{ik} = \lambda_{\underset{j}{i}} \lambda_{\underset{j}{k}}$. Quindi:

$$(5'') \qquad T_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^c A \sqrt{a}.$$

In modo analogo si trova, per le componenti controvarianti del più generale tensore n^{plo} emisotropo:

$$(6) \qquad T^{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^c \frac{A}{\sqrt{a}} \ (1).$$

(1) Cfr. T. Levi-Civita, primo loc. cit. Il segno da attribuire al radicale è arbitrario; ma, una volta fissato, si intende che non vada mutato in relazione coi cambiamenti di coordinate (cfr. nota (3) a p. 109).

Matematica (Analisi). — *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali.* Nota II di MARIA CIBRARIO, presentata [1] dal Corrisp. G. FUBINI.

Nella presente Nota sono dati alcuni teoremi di esistenza e di unicità per l'equazione differenziale lineare a derivate parziali del secondo ordine, di tipo iperbolico:

$$(1)\quad \lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \mu_1\mu_2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Analogo argomento è trattato in una recente Nota interessantissima del prof. Colucci [2], di cui ho generalizzato il risultato; usando i teoremi contenuti nella mia Nota I di egual titolo, ho potuto fare ipotesi meno restrittive e precisare alcune condizioni, sotto cui può essere fatto il cambiamento di variabili, fondamentale sia nella Nota del Colucci, che nel presente lavoro.

Nella (1) λ_i, μ_i siano funzioni D^{III} (con funzioni D^n si indicano funzioni finite e continue con tutte le derivate continue fino a quelle di ordine n incluse) in un dominio D semplicemente connesso [3], non si annullino contemporaneamente e soddisfino la:

$$(2)\qquad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$$

in tutto D; $f(x, y, z, p, q)$ sia funzione D^1 definita per x, y in D e per ogni valore di z, p, q. I due sistemi di caratteristiche della (1) soddisfano le

$$(3)\qquad \frac{dx}{\lambda_i} = \frac{dy}{\mu_i} = dt \qquad (i = 1, 2).$$

Allora: T. I. «I due sistemi di caratteristiche formano rete in D». Infatti per ogni punto di D passa una caratteristica di ognuno dei due sistemi e una sola; poichè in D $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, una caratteristica di un sistema non può essere tangente ad alcuna delle caratteristiche dell'altro

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) A. COLUCCI, *Trattazione in grande del problema di Cauchy per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine a caratteristiche reali e distinte*, «Math. Ann.», B. 104, H. 1.

(3) Per il seguito bastano l'esistenza e la continuità delle λ_{ixxx}, λ_{ixyx}, λ_{iyyx}, μ_{ixxy}, μ_{iyyx}, μ_{iyyy}.

sistema e per il T. III del § 1 della Nota I non può avere più di un punto in comune con ognuna di esse.

Sia R un quadrilatero limitato dagli archi di caratteristiche α_1 e β_1 di un sistema, α_2 e β_2 dell'altro, e contenuto in D; le equazioni di α_1 e α_2 siano rispettivamente:

$$x = f_1(\xi) \quad , \quad y = g_1(\xi) \; (0 \leq \xi \leq a) \quad ; \quad x = f_2(\eta) \quad ,$$
$$y = g_2(\eta) \; (0 \leq \eta \leq b) \; (1);$$

il punto A comune ad α_1 e α_2 corrisponda a $\xi = \eta = 0$.

Le caratteristiche del sistema delle α_2, β_2 incontrano tutte α_1 (2); poichè f_1, g_1 sono certo funzioni D^{III} sono soddisfatte le ipotesi del T. IV del § 1 Nota I. Per tale teorema l'equazione delle caratteristiche del sistema delle α_2, β_2 in R è: $\Phi(x, y) = \xi$, dove Φ è funzione D^{III}. Così le caratteristiche del sistema delle α_1, β_1 hanno equazione $\Psi(x, y) = \eta$, dove ψ è funzione D^{III}. Col cambiamento di variabili

$$(4) \qquad \Phi(x, y) = \xi \quad ; \quad \Psi(x, y) = \eta,$$

certo invertibile perchè le caratteristiche formano rete in D, la (1) assume la forma:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} = g\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

dove ξ, η variano nel rettangolo R_1 definito dalle $0 \leq \xi \leq a$, $0 \leq \eta \leq b$; g è funzione D^1 definita per ξ, η variabili in R_1, e per ogni sistema di valori $z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$ (3).

Sia γ un arco di curva contenuto in R, congiungente A col vertice opposto, privo di punti doppii, di equazioni

$$x = \varphi(u) \quad , \quad y = \psi(u) \; (u_1 \leq u \leq u_2);$$

(1) Lungo α_1 e α_2 si è posto dunque $\xi = t_1$, $\eta = t_2$.

(2) Una tale caratteristica γ_2 per un punto P di R deve uscire da R (per il T. I del § 1, Nota I) e poichè non ha punti in comune con α_2 e β_2, e non può incontrare in più di un punto α_1, β_1, le incontra in un punto ciascuna.

(3) L'esistenza delle derivate parziali prime e seconde di Φ e Ψ permette di calcolare z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} in funzione di $z_{\xi\xi}, z_{\eta\eta}, z_{\xi\eta}, z_\xi, z_\eta$; l'esistenza delle derivate parziali terze di Φ e Ψ permette di stabilire l'esistenza delle derivate parziali di

$$g\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

rispetto a ξ, η.

Se in tutto D $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, e se $\frac{\mu_i}{\lambda_i} = \varphi_i(x, y)$ per ottenere i risultati precedenti sono sufficienti le ipotesi che le φ_i siano finite e continue colle derivate parziali prime e seconde e colla φ_{iyy}, e che $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

φ, ψ siano funzioni D^1 tali che:

$$\lambda_1 \lambda_2 \psi'^2 - (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \varphi' \psi' + \mu_1 \mu_2 \varphi'^2 \neq 0. \tag{6}$$

γ non è tangente ad alcuna caratteristica e per il T. III del § 1 della Nota I non può esserne incontrata in più di un punto; viceversa tutte le caratteristiche dei due sistemi per punti di R incontrano γ [1]. Dunque tra i valori $\xi (0 \leq \xi \leq a)$ e i valori $u (u_1 \leq u \leq u_2)$ e tra questi e i valori $\eta (0 \leq \eta \leq b)$ vi è corrispondenza biunivoca. Lungo γ è:

$$\xi = \Phi [\varphi (u), \psi (u)] \quad , \quad \eta = \Psi [\varphi (u), \psi (u)]$$

e poichè $\frac{d\xi}{du} \neq 0$, $\frac{d\eta}{du} \neq 0$ per la (6), u è funzione derivabile di ξ o di η, e quindi lungo γ ognuna delle due coordinate è funzione monotona e derivabile dell'altra $(\eta = h (\xi) \quad ; \quad \xi = k (\eta))$.

T. II. « Nel quadrilatero R esiste una e una sola funzione $D^{II} z (x, y)$ che soddisfa la (1) e soddisfa una delle seguenti tre condizioni:

1. Su α_1 e α_2 z si riduce rispettivamente ad una delle funzioni D^{II} date ad arbitrio $m_1 (\xi)$, $m_2 (\eta)$, tali che $m_1 (0) = m_2 (0)$.

2. Su γ z_x e z_y si riducono a due funzioni D^1 $m (u)$ e $n (u)$ date ad arbitrio, e z assume un valore assegnato in un punto P prefissato di γ.

3. Supposto che esistano $\varphi'' (u)$ e $\psi'' (u)$, z su γ e su α_1 si riduce rispettivamente ad una delle funzioni D^{II} date ad arbitrio $M (u)$ e $N (\xi)$, tali che $M (u) = N (\xi)$ ».

Lungo γ si possono ricavare z_ξ e z_η come funzioni D^1 di u e per quanto si è visto si può porre:

$$z_\xi = \overline{m} (\xi) \quad , \quad z_\eta = \overline{n} (\eta),$$

dove $\overline{m}$ ed $\overline{n}$ sono funzioni continue colle loro derivate prime; così su γ sarà $M (u) = \overline{M} (\eta)$, dove $\overline{M} (\eta)$ è funzione D^{II} [2].

Nel rettangolo R_1 esiste una e una sola funzione $z = F (\xi, \eta)$, continua colle z_ξ , z_η e $z_{\xi\eta}$ che in R_1 soddisfa la (5) e inoltre soddisfa una delle tre condizioni:

1) per $\eta = 0$ $(0 \leq \xi \leq a)$ si riduce a $m_1 (\xi)$ e per $\xi = 0$ $(0 \leq \eta \leq b)$ a $m_2 (\eta)$;

2) su γ $z_\xi = \overline{m} (\xi)$ e $z_\eta = \overline{n} (\eta)$ e z assume il valore prefissato in P;

(1) Una caratteristica γ_1 (del sistema di α_1, p. es.) per un punto P del trilatero limitato da γ, α_1, β_2, p. es. deve uscire da quel trilatero, e, poichè γ_1 non incontra α_1 e ha un solo punto in comune con β_2, incontra γ in un punto.

(2) Nel caso (3) per l'esistenza di $\varphi'' (u)$, $\psi'' (u)$, la $\eta = \Psi [\varphi (u), \psi (u)]$ ha derivata seconda rispetto a u, e questa ha derivata seconda rispetto a η.

3) su γ si riduce a $\overline{M}(\eta)$ e su α_1 a $N(\xi)$, secondo noti teoremi di esistenza [1]. Da questi però segue solo l'esistenza di $z_{\xi\eta}$; occorre stabilire l'esistenza di $z_{\xi\xi}$, $z_{\eta\eta}$ per poter stabilire quella di z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} e provare così che la $z = F[\Phi(x, y), \Psi(x, y)]$ soddisfa la (1). Posto $z_\xi = U$, la U è un integrale della:

$$(7) \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta} = g\left[\xi, \eta, F(\xi, \eta), U, \frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right],$$

(il cui secondo membro ha derivata rispetto a ξ), che nel caso 1) per $\eta = 0$ si riduce a $m_1'(\xi)$, funzione derivabile di ξ, nel caso 2) per $\eta = h(\xi)$ vale $\overline{m}(\xi)$, entrambe funzioni derivabili di ξ, e nel caso 3) per $\eta = 0$ si riduce a $N'(\xi)$, che pure ha derivata; esiste dunque la $z_{\xi\xi}$. Analogamente si dimostra l'esistenza della $z_{\eta\eta}$.

Matematica. — *Sur la généralisation des fonctions conjuguées.* Nota di Gr. C. Moisil, presentata dal socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Proprietà di alcune connessioni lineari.* Nota di A. de Mira Fernandes, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Picard, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles* (Leçons XIII^e–XVI^e); per l'equazione lineare solo nella $z_{\xi\eta}$ v. anche Niccoletti, *Sull'estensione dei metodi di Picard e di Riemann ad una classe di equazioni a derivate parziali*, « Acc. di Napoli », 1896.

Meccanica. — *La relatività generale nei fenomeni di irradiamento atomico.* Nota di B. Finzi, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

In questa Nota, seguendo lo schema della relatività generale di Einstein, si istituisce una meccanica relativistica dei fenomeni di irradiamento atomico, caratterizzando, come nella meccanica di Heisenberg, le grandezze geometriche, cinematiche, fisiche che in essa intervengono con sistemi multipli, e valendosi del calcolo differenziale assoluto unico da me stabilito per tali sistemi. In questa meccanica compariranno due costanti: la velocità della luce nel vuoto e la costante di Planck. Ritenendo infinita la prima, si ricadrà nella meccanica di Heisenberg. Ritenendo nulla la seconda, si ricadrà nella meccanica einsteiniana.

1. *Cronotopo.*

È noto che, secondo Heisenberg [2], coordinate, momenti, e in generale tutte le grandezze fisiche, che secondo la meccanica classica dei fenomeni d'irradiamento si suppongono sviluppabili in serie di Fourier, sono rappresentabili da matrici. Più generalmente, poichè l'insieme dei passaggi di un elettrone da uno stato quantico caratterizzato dalla disposizione $i_1, \cdots, i_r$ allo stato caratterizzato dalla disposizione $j_1, \cdots, j_r$ è individuato da un sistema multiplo d'ordine $2r$ [3], con tali sistemi individueremo coordinate, momenti, ecc. nei fenomeni di irradiamento atomico. Con 3 matrici $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, e, più generalmente, con 3 sistemi multipli d'ordine $2r$, che rappresenteremo ancora con $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, individueremo dunque la posizione di un punto nello spazio geometrico.

Indichiamo con $\mathfrak{x}_0$ la matrice, e più generalmente il sistema d'ordine $2r$, $t\mathfrak{c}$, essendo t lo scalare che rappresenta il tempo in un determinato luogo e, se $\mathfrak{d}$ è l'unità nell'operazione prodotto d'ordine r (S. M. (5) [4]), $\mathfrak{c} = c\mathfrak{d}$ la velocità della luce nel vuoto.

I 4 sistemi $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ individuano un « punto » del cronotopo. Se, per brevità, indichiamo le matrici, e più generalmente i sistemi d'ordine $2r$, con lettere grassette, e nel prodotto d'ordine r (S. M. (3)) di tali

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) Heisenberg, « Zeitschrift für Physik », 33, p. 879; Heisenberg, Born, Jordan: « Zeitschrift für Physik », 34, p. 858; 35, p. 557.

(3) B. Finzi, questi « Rendiconti », vol. XII, vol. XIII. Dovendo sovente citare queste Note, le indicherò brevemente con S. M.

(4) Cfr. nota (3).

sistemi sottointendiamo il segno $\cdot_r$, caratterizzeremo la metrica del cronotopo con il sistema (S. M. (29)):

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_0^3{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad , \quad g_{ik} = g_{ki} .$$

Nella (1) g_{ik} sono sistemi d'ordine $2r$ funzioni del tipo S. M. (30) delle variabili x_i invertibili con i differenziali dx_j nel prodotto d'ordine r, e questi sono invertibili fra loro. Supponiamo in oltre che (come al n. 11 di S. M.) le x_i siano invertibili fra loro, e quindi le derivate uniche di g_{ik} risultino invertibili fra loro nel prodotto d'ordine r.

Se nella (1) al posto di x_i poniamo $x_i(\tau)$, essendo tale funzione invertibile nel prodotto d'ordine r con $d\tau$, la (1) assume la forma

$$ds^2 = f^2(\tau)\, d\tau^2 ,$$

caratterizzante la metrica di una linea del cronotopo. In particolare, le condizioni specificate sono soddisfatte, qualunque siano le funzioni $x_i(\tau)$ se $\tau = x_0 = ct\,\delta$ (S. M. (6)) e $d\tau = c\,\delta\,dt$. Se dunque nel cronotopo (1) consideriamo le relazioni

$$(2) \qquad x_i = x_i(x_0) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

esse definiscono nel cronotopo una linea oraria, cioè il moto di un punto.

In particolare, consideriamo le linee orarie tali che ponendo in (1) le (2) risulti, con il consueto significato dei simboli (cfr. S. M. n. 12),

$$(3) \qquad \delta \int ds = 0 .$$

Diremo queste linee orarie geodetiche del cronotopo considerato.

2. *Dinamica del punto.*

Ammettiamo con Einstein che, in circostanze fisiche determinate, sia determinata la metrica del cronotopo. In tal caso una linea oraria geodetica del cronotopo stesso caratterizzerà il moto di un punto nelle circostanze fisiche considerate. Le linee orarie (2) sono dunque quelle che sono individuate dalla (3)[1]. Ricordando che $x_0 = ct\,\delta$, tali linee avranno equazioni $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, e saranno individuate da un'equazione variazionale del tipo

$$(4) \qquad \delta \int f(x_i, \dot{x}_i, t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

in cui $\dot{x}_i$ denota la derivata di x_i rispetto allo scalare t.

(1) Cfr. ad es., T. Levi-Civita, *Fondamenti di Meccanica relativistica*, Bologna, 1928, p. 44.

Si noti che la legge (3) ha carattere invariantivo rispetto a tutte le trasformazioni a derivate commutabili del tipo S. M. (30)

$$(5) \qquad x_i = \sum_0^\infty{}_{i_0 \dots i_3} a_{i_0 i_1 i_2 i_3} \overline{x}_0^{i_0} \cdot \overline{x}_1^{i_1} \cdot \overline{x}_2^{i_2} \cdot \overline{x}_3^{i_3} \qquad (\overline{x}_0 = c\,\overline{t})$$

che lasciano inalterata la (1) e che sono in oltre invertibili con i sistemi invertibili fra loro $d\overline{x}_j$.

3. *Equazioni della relatività generale.*

Per individuare la metrica (1) del cronotopo mediante i fenomeni che in esso hanno sede, consideriamo il tensore (S. M. n. 11) energetico le cui componenti covarianti sono definite dai seguenti sistemi d'ordine $2r$:

$$(6) \qquad \mathbf{T}_{00} = \varepsilon \quad , \quad \mathbf{T}_{0i} = -\varepsilon\beta_i \quad , \quad \mathbf{T}_{ik} = \Phi_{ik} + \varepsilon\beta_i\beta_k \qquad (i,k = 1,2,3),$$

nelle quali: $\varepsilon = c^2\,\mu = c^2\,\mu\,\delta$ (n. 1) rappresenta la densità di energia, se μ è la densità di materia; β_i la velocità di un punto espressa in unità römeriane; Φ_{ik} il tensore degli sforzi, a cui sono ridotte tutte le forze non gravitazionali (in particolare le forze elettromagnetiche) (1). Si noti che se $\mathbf{T}_{ih}{}^{/k}$ è il tensore derivato controvariante di $\mathbf{T}_{ih}$ (S. M. n. 11),

$$(7) \qquad \sum_0^3{}_k \mathbf{T}_{ik}{}^{/k} = 0\,.$$

Leghiamo, seguendo Einstein e Levi-Civita, il tensore fondamentale al tensore degli sforzi così:

$$(8) \qquad \mathbf{A}_{ik} = -\chi\,\mathbf{T}_{ik}\,,$$

essendo χ un sistema costante da determinarsi a posteriori e $\mathbf{A}_{ik}$ l'ovvia estensione del noto tensore gravitazionale che soddisfa identicamente (come $\mathbf{T}_{ik}$) all'equazione

$$(7') \qquad \sum_0^3{}_k \mathbf{A}_{ik}{}^{/k} = 0\,,$$

ed è così definito (2):

$$(9) \qquad \mathbf{A}_{ik} = \mathbf{G}_{ik} - \frac{1}{2}\,\mathbf{G}\,g_{ik}\,.$$

Nella (9)

$$\mathbf{G}_{ik} = \sum_0^3{}_h \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ h\,k \end{matrix} \right\} \quad , \quad \mathbf{G} = \sum_0^3{}_{ik}\, g^{ik}\,\mathbf{G}_{ik}$$

(1) Cfr. T. Levi-Civita, loc. cit., p. 71.
(2) Cfr. T. Levi-Civita, loc. cit., pp. 93–101.

e $\{ihbk\}$ è la estensione di un tensore (S. M. n. 11), detto tensore di Riemann, definito nel modo consueto mediante i simboli di Christoffel di seconda specie e le loro derivate [1]. Si intende però che alle operazioni algebriche su i numeri andranno sostituite operazioni su sistemi d'ordine $2r$ e all'operazione di derivazione l'operazione di derivazione unica (S. M. n. 11).

4. *Caso particolare: c molto grande (meccanica quantistica).*

Riteniamo c molto grande, e, in questa ipotesi, si consideri un punto mobile di massa unitaria, soggetto ad una forza proveniente da un potenziale, rappresentato dal sistema d'ordine $2r$, $\mathbf{U}$. In tal caso dalle (8) può dedursi, in prima approssimazione, [2]

$$(10) \qquad g_{oo} = \delta - \frac{2}{c^2}\mathbf{U} \quad , \quad g_{oi} = 0 \quad , \quad g_{ik} = -\delta\,\delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3).$$

La (4) può allora scriversi così:

$$(11) \qquad \delta \int \mathbf{L}(x_i, \dot{x}_i, t)\,dt = 0 \qquad (i = 1,2,3),$$

in cui

$$(12) \qquad \mathbf{L}^2 = \delta - \frac{2}{c^2}\mathbf{U} - \sum_1^3{}_i\,\beta_i^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \delta - \frac{1}{c^2}(\mathbf{U} + \mathbf{T}),$$

denotando $\mathbf{T}$ il sistema d'ordine $2r$ che rappresenta l'energia cinetica del punto.

Parafrasando una classica dimostrazione, se $\mathbf{L}$ è funzione invertibile con i sistemi invertibili fra loro δx_i e $\delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt}\delta x_i$, dalla (11) si deducono le equazioni, che per $r = 0$ coincidono con le equazioni di Lagrange [3]:

$$(13) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_k} = 0\,.$$

Ponendo al posto della lettera x la lettera q (come è tradizionale in meccanica analitica) ed introducendo i momenti

$$(14) \qquad p_k = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1,2,3),$$

diciamo $\mathbf{H}(p, q, t)$ la funzione corrispondente alla funzione dell'Hamilton così definita:

$$(15) \qquad \mathbf{H} = \sum_1^3{}_k\,p_k\dot{q}_k - \mathbf{L}\,.$$

(1) Cfr. T. Levi-Civita, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, Roma, 1925, p. 201, (3).

(2) Cfr. T. Levi-Civita, loco primo citato, pp. 99-100.

(3) Cfr. ad es., T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, II, parte 2ª, pp. 492-503 e pp. 522-530.

Consideriamo $\mathbf{H}$ funzione invertibile con i sistemi invertibili fra loro $\boldsymbol{dq_k}$, $\boldsymbol{dp_k}$. Da (14) e (15) si otterrà il sistema canonico [1]:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}}_k = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{q}_k} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_k = \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{p}_k} \end{cases}$$

Le (16) sono appunto le relazioni che presiedono la meccanica quantistica di Heisenberg relativa ai fenomeni irradiatori dell'atomo [2]. In esse $\mathbf{H}$ dipende dai suoi argomenti nello stesso modo di quello con il quale H dipende dai suoi argomenti nel problema di meccanica classica corrispondente al problema di meccanica quantistica di cui è oggetto. Non solo, ma se $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ sono matrici, esse sono matrici di Hermite, e fra le $\boldsymbol{p}$ e le $\boldsymbol{q}$ sussistono le seguenti relazioni [3]:

$$(17)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{q}_i\,\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_j\,\boldsymbol{q}_i = 0 \\ \boldsymbol{p}_i\,\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_j\,\boldsymbol{p}_i = 0 \end{cases}$$

$$(18)\qquad \boldsymbol{p}_i\,\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{p}_j\,\boldsymbol{q}_i = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}\,\delta_{ij}\,\boldsymbol{\delta}\,.$$

Nelle (18) h è la costante di Planck.

Si noti che la prima delle (17) ci assicura che $\mathbf{U}(\boldsymbol{q}_i)$ è funzione del tipo S. M. (30) dei suoi argomenti, e quindi i coefficienti $\boldsymbol{g}_{ik}$ della metrica del cronotopo sono, nel caso particolare in istudio (cfr. (10)), funzioni del tipo S. M. (30): precisamente così come avevamo supposto in generale (n. 1).

5. *Sottocaso: c molto grande, h trascurabile (meccanica classica).*

Se, oltre a ritenere c molto grande, supponiamo h molto piccolo, anzi trascurabile, in virtù delle (17) e (18), non soltanto le $\boldsymbol{p}$ e le $\boldsymbol{q}$ sono commutabili fra loro, ma anche le $\boldsymbol{p}$ sono commutabili con le $\boldsymbol{q}$. In tal caso tutte le deduzioni che si possono trarre dalle (16) nel caso in cui le $\boldsymbol{p}$ e le $\boldsymbol{q}$ sono scalari, sussistono inalterate anche supponendo le $\boldsymbol{p}$ e le $\boldsymbol{q}$ matrici (e più generalmente sistemi d'ordine $2r$): la meccanica quantistica dei fenomeni di irradiamento atomico coincide con la classica teoria dell'irradiamento: ciò è conforme al principio di Heisenberg [4].

6. *Caso particolare: h trascurabile (meccanica relativistica).*

Se, senza ritenere c molto grande, riteniamo h trascurabile, in virtù delle (17) e delle (18) le $\boldsymbol{p}$ e le $\boldsymbol{q}$ sono invertibili fra loro e anche le $\boldsymbol{p}$

(1) Cfr. ad es., T. Levi-Civita e U. Amaldi, loc. cit., pp. 292–295.

(2) Per la deduzione delle (16) dalla (11), cfr. Heisenberg, Born, Jordan, loc. cit., 34, p. 858.

(3) Heisenberg, Born, Jordan, lochi citati.

(4) Heisenberg, loc. cit.

sono commutabili con le q. Le deduzioni che allora si possono trarre dal principio variazionale (4) (ossia ancora dalle (14), (15), (16) in cui la f di n. 2 sostituisce la **L** di n. 4) sono quelle stesse che si trarrebbero supponendo p e q scalari. La meccanica dei fenomeni di irradiamento atomico coincide in questo caso con la meccanica einsteiniana dei fenomeni stessi: ciò è ancora conforme al principio di Heisenberg.

7. *Caso generale.*

Nel caso generale in cui si ritenga c non grandissimo e h non trascurabile, supporremo ancora valide le (17) e le (18) così che i cofficienti g_{ik} della metrica del cronotopo sono funzioni del tipo S. M. (30), così come avevamo supposto al n. 1.

Determinati tali coefficienti mediante le equazioni (8), costruiamo la funzione f [1] che interviene nella (4), funzione che sostituiamo alla **L** di n. 4, individuando così, mediante le (14), (15), (16) le p e le q in funzione del tempo, e caratterizzando quindi l'irradiamento del sistema atomico.

Si è così instituita la teoria generale della relatività nei fenomeni dell'irradiamento atomico, teoria che comprende come casi di approssimazione la meccanica di Heisenberg (n. 4), la meccanica classica (n. 5) e la ordinaria meccanica einsteiniana (n. 6) dell'irradiamento atomico.

Astrofisica. — *Il postulato di Ritz–La Rosa e le Cefeidi.* Nota di M. Crenna, presentata [2] dal Corrisp. M. La Rosa.

Come è noto il Ritz [3] volendo estendere il *principio di relatività* della meccanica ai fenomeni ottici ed elettromagnetici, senza uscire dalla concezione classica, fece l'ipotesi (detta « balistica ») che *la velocità della luce si componga con quella della sorgente*, ma essa fu recisamente negata in base alle note considerazioni del De Sitter [4] a proposito delle leggi del moto delle stelle doppie. Come è noto La Rosa, nel 1923 [5], dimostrò errate le conclusioni del De Sitter e riuscì a fornire, con l'uso dell'ipotesi balistica, *una semplice e chiara spiegazione di un vasto gruppo di fatti astronomici dei più interessanti ed oscuri*: quello delle stelle variabili [6].

(1) Cfr. S. M., n. 1.

(2) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(3) Cfr. Ritz, « Ann. de Ch. et de Phys. »; vol. XIII, p. 145, 1908.

(4) In « Phys. Zeitschr. » Bd. XIV, p. 429, 1913.

(5) Cfr. La Rosa, *Il postulato di Ritz sulla velocità della luce ed i fenomeni delle stelle variabili. Nuova teoria di queste stelle* in « Memorie della Società Astronomica Italiana » (già degli Spettroscopisti), Nuova Serie, vol. II, n. 4, pp. 324-57.

(6) Cfr. La Rosa, op. cit., p. 325. Per più ampie notizie sulle Cefeidi cfr. F. Henroteau, *Les Céphéides* in *L'Astronomie*, « Bulletin de la Société Astronomique de France », juillet–aout–septembre 1924.

L'importanza delle argomentazioni del La Rosa, subito rilevata dal Castelnuovo in questi « Rendiconti », valse ad accendere un'aspra polemica sulla questione della validità dell'ipotesi balistica, che è gravida di conseguenze importantissime, ed aprì una via molto promettente all'interpretazione dei misteriosi fenomeni delle « variabili ». In questa Nota vengono segnalate alcune nuove circostanze rilevate dalle conoscenze sulle stelle variabili, le quali depongono a favore del postulato di Ritz–La Rosa.

Un primo fatto è che *tutte le Cefeidi mostrano una variazione di velocità radiale avente lo stesso periodo della loro variazione d'intensità luminosa ed inoltre che l'epoca del minimo di velocità radiale* (*massima velocità verso l'osservatore*) *coincide, approssimativamente, con quella del massimo splendore, e l'epoca del massimo di velocità radiale con quello del minimo splendore* [1].

La coincidenza del periodo di variazione della velocità radiale con quello della curva di luce ha condotto all'ipotesi che le Cefeidi siano doppie (o multiple) e ciò è pienamente conforme a quanto presuppone l'impiego dell'ipotesi balistica nella spiegazione delle variabilità; ma mentre la coincidenza fra il minimo di velocità col massimo di luce e viceversa rimane un fatto inesplicabile e misterioso nelle varie teorie che del fenomeno della variabilità sono state date, appare, al contrario, naturale nell'ipotesi balistica, che riesce nel modo più immediato a prevedere un legame intimo fra splendore e velocità, ed a dare ragione del fatto particolare offerto dalle Cefeidi. Infatti la coincidenza del massimo di luce col minimo di velocità e viceversa, *deve verificarsi*, secondo quell'ipotesi, tutte le volte che il prodotto Kb di La Rosa assume *particolari valori* [2]. In proposito è interessante anzi rilevare che se questa circostanza non ci fosse stata già rilevata dall'osservazione diretta delle Cefeidi, sarebbe stato facile *prevederla*, quale necessaria conseguenza dell'ipotesi balistica, dall'esame delle curve tracciate per i vari valori che può assumere il prodotto Kb [3], dalle quali si rileva che quando

(1) Anche nell'ipotesi di Shapley, sostenuta da Ludendorf, Eddington ed altri, che le Cefeidi siano stelle pulsanti la spiegazione dell'accennata coincidenza resta sottoposta a obiezioni troppo forti, per non dire insuperabili, e tali da non lasciare per nulla persuasi della sua validità.

(2) Cfr. La Rosa, op. cit.

(3) Per non ripetere la teoria del La Rosa rimandiamo il lettore alla Memoria citata. Dall'esame delle curve ivi tracciate (p. 322) si vede che la curva corrispondente a $Kb = 0{,}16$, spostata un pochino di base (la coincidenza predetta è solo *approssimata*) darebbe già sufficiente ragione del fenomeno. Nell'ipotesi classica della luce il massimo e il minimo di velocità radiale, per la corrispondente posizione occupata dalla stella satellite, dovrebbero produrre lo stesso effetto (due massimi) nell'intensità luminosa (sempre supponendo le Cefeidi sistemi binari di stelle) mentre nell'ipotesi balistica gli effetti sono appunto i richiesti: infatti l'esame della curva anzidetta mostra, un po' prima di $\frac{\tau_0}{2}$ (minimo di velocità radiale) un massimo di intensità luminosa, per la sua piccolissima inclinazione sull'asse delle **T**, e un po' prima di τ_0 (massimo di velocità radiale) un minimo di intensità luminosa, per la sua forte inclinazione sull'asse delle **T**.

l'andamento dell'intensità luminosa è quello osservato nelle Cefeidi, K*b* è vicino a 0,16, ed è proprio allora che il massimo di velocità cade in vicinanza del minimo di luce e viceversa.

Un secondo fatto che concorda con le previsioni dell'ipotesi balistica è questo: negli ammassi globulari non è stata trovata nessuna stella variabile del tipo *Algol* (classe III, secondo la classificazione di Scheiner). Questa constatazione assai strana aveva condotto alla speciosa conclusione che ciò dovesse indicare « que des systèmes binaires, où deux étoiles tournent l'une autour de l'autre, n'y existent probablement pas, et aussi que la cause primordiale de la variation des Céphéides ne se trouve pas nécessairement dans un mouvement orbital Képlérien » [1].

Una conclusione di questo genere, appare indubbiamente quanto mai inverosimile e ingiustificabile; al punto da potersi quasi dire paradossale: giacchè non è cosa facile comprendere per quali motivi le « doppie » debbano mancare in tutti gli ammassi globulari. L'ipotesi balistica, invece, ci permette di rigettare questa stranissima conclusione, ed anche qui senza sforzo e nel modo più naturale!

Essa prevede, infatti [2], « che una doppia di piccolo periodo può apparire come *variabile* se è a *conveniente* distanza dall'osservatore, e viceversa ». Ora, le stelle di tipo Algol sono fra tutte le variabili, quelle che hanno il periodo più piccolo; e quindi *giustamente gli ammassi non ci mostrano nessuna variabile di questo tipo*, perchè essendo assai grandi le loro distanze da noi, non è più possibile che le *doppie* di piccolo periodo ci presentino il fenomeno di variabilità di quel tipo.

La constatata assenza di variabilità del tipo Algol degli ammassi stellari resta così pienamente spiegata senza che si debba per questo ammettere la curiosa ipotesi della assenza di *doppie* a piccolo periodo [3].

Un altro fatto assai importante restando sempre nel campo delle Cefeidi, ci dà un notevole indizio in favore della teoria balistica. Alludiamo alla famosa e misteriosa legge di Miss Leavitt su cui nulla le teorie attuali hanno saputo dire:

Com'è noto Miss Leavitt ha scoperto che le variabili (Cefeidi) della Piccola Nube di Magellano presentano la curiosa particolarità che il loro periodo è funzione della grandezza stellare apparente; e siccome tali stelle si trovano tutte, con grande approssimazione, alla stessa distanza da noi, ne

(1) Cfr. Henroteau, op. cit., août 1924, p. 341.

(2) Cfr. La Rosa, op. cit., p. 350.

(3) Quando si pensa che la classificazione di Scheiner delle variabili è fondata esclusivamente sulla lunghezza del periodo, apparisce strana la necessità in cui si trova la teoria classica della luce di spiegare le varie classi di variabili con ipotesi diverse (classe III, sistemi binari; classe II, stelle pulsanti, ecc.) quasi che il diverso periodo potesse realizzarsi solo in astri di diversa natura, mentre l'ipotesi balistica abbraccia le varie classi con un'unica spiegazione (sistemi binari o complessi).

risulta che anche la loro grandezza assoluta è funzione del periodo (proporzionale al logaritmo del periodo). Il Bailey ha trovato che anche per le variabili degli altri ammassi stellari esiste una relazione, dello stesso tipo, fra grandezza e periodo. La legge è assai misteriosa, ma nondimeno l'ipotesi balistica può offrirci una via di orientamento, se non un vero inizio di spiegazione; ed ecco in qual modo:

Siccome le variabili di un ammasso stellare si trovano tutte alla stessa distanza da noi, ne segue che considerata una doppia per la quale Kb sia prossimo a $1/2\,\pi$, come la teoria vuole affinchè essa ci si riveli come variabile, un'altra doppia di periodo maggiore dovrebbe trovarsi (secondo l'ipotesi balistica) a distanza maggiore perchè la condizione $Kb \sim 1/2\,\pi$ sia soddisfatta; ma essendo le distanze tutte uguali, questa doppia non potrà rivelarcisi come variabile, a meno che le sue variazioni di luce non si rendano più appariscenti in grazia di una grandezza assoluta maggiore; quindi al crescere del periodo ci si potranno manifestare come variabili soltanto doppie di grandezza assoluta sempre più grande. Dunque la legge di Miss Leavitt non sarebbe la traduzione di un misterioso legame effettivamente esistente fra la grandezza vera delle variabili e il periodo, ma sussisterebbe solo in conseguenza delle speciali condizioni dell'investigazione, per cui riusciamo (fra le tante doppie esistenti) a riconoscere come variabili (in conseguenza dell'ipotesi balistica) soltanto quelle per le quali si verifica l'accennata relazione.

Un altro modo di spiegazione potrebbe trovarsi per la via seguente: essendo i limiti, entro i quali varia il periodo delle Cefeidi degli ammassi, non eccessivamente ampi, si può limitare l'intervallo di variazione di Kb fra 1 e 0,1 [1]. Ma allora dall'esame delle curve tracciate [2] per valori di Kb compresi fra tali limiti e dalla discussione susseguente si rileva che, a parità di grandezza assoluta, lo splendore apparente dell'astro dovrà gradatamente aumentare quando Kb varia progressivamente da 1 a 0,1, ossia quando il periodo aumenta.

Delle due spiegazioni nessuna è veramente soddisfacente, ma ad ogni modo esse possono almeno provare che la legge di Miss Leavitt può ricevere un primo, se pur debole, lume dal postulato di Ritz-La Rosa.

(1) Pensando che per valori di Kb che, restando fisso b, farebbero superare i limiti imposti a Kb, la doppia non si rivelerebbe come variabile; per tali valori di Kb quindi si dovrebbe supporre che b, per le stelle che si manifestano come variabili assuma valori corrispondentemente maggiori, in modo da conservare il valore di Kb entro i limiti stabiliti.

(2) Cfr. La Rosa, op. cit., p. 329 e sgg.

Fisica (Elettrotecnica). — *Su di un nuovo tipo di cavo elettrico disuniforme.* Nota di M. Federici, presentata [1] dal Corrispondente G. Giorgi.

In questa Nota si esaminerà un tipo di cavo elettrico in cui una sola delle costanti varia e precisamente cresce proporzionalmente alla lunghezza. I conduttori disuniformi sono stati trattati in diversi casi da diversi autori [2], ma il caso suddetto non è stato fatto oggetto di pubblicazione, almeno a nostra conoscenza, benchè sia di notevole importanza per le applicazioni.

È stato posato recentemente, fra La Panne, in Belgio e Lisbona, un cavo sottomarino per telegrafia celere, che appartiène a questo tipo.

Il cavo è krarupizzato, cioè una sottile spirale di una lega di ferro fortemente magnetica, avvolta sul conduttore di rame, ne accresce l'induttanza. Il cavo è diviso in cinque sezioni. Le due vicino alla terraferma non sono krarupizzate, quella di mezzo ha un'induttanza costante di 200 millihenry per miglio nautico, le due intermedie, lunghe 140 miglia ciascuna, hanno induttanza variabile con legge lineare da 60 millihenry per miglio nautico a un estremo, a 170 millihenry per miglio nautico all'altro estremo.

La capacità e la resistenza del cavo per unità di lunghezza sono sensibilmente costanti.

Si consideri il caso generale di un cavo con resistenza r, dispersione g, induttanza l e capacità c per unità di lunghezza, percorso da correnti alternate di pulsazione ω, e quindi dotato di ammettenza trasversale $g + j\omega c$ e di impedenza longitudinale $r + j\omega l$ per unità di lunghezza.

Si supponga che l'impedenza $r + j\omega l$ vari proporzionalmente alla lunghezza, cosicchè si possa scrivere, per un punto distante x dall'origine

$$r + j\omega l = (r_0 + j\omega l_0)\, x \tag{1}$$

dove r_0 ed l_0 non dipendono da x.

Le equazioni dei telegrafisti pel periodo di regime divengono

$$\frac{dV}{dx} = -(r_0 + j\omega l_0)\, x\, I \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dx} = -(g + j\omega c)\, V \tag{3}$$

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*. London 1912, vol. 2, p. 211; G. Di Pirro, *Su alcuni tipi di conduttori a costanti variabili*. « Atti del Congresso di Telegrafia e Telefonia », Como, 1927.

essendo V il voltaggio ed I l'amperaggio in un punto distante x dall'origine.

Da qui differenziando:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -(r_0 + j\omega l_0) I - x (r_0 + j\omega l_0) \frac{dI}{dx} \tag{4}$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = -(g + j\omega c) \frac{dV}{dx} \tag{5}$$

e scrivendo

$$(r_0 + j\omega l_0)(g + j\omega c) = \gamma^2 \tag{6}$$

e combinando le (4) e (5) con le (2) e (3), si avrà

$$x^2 \frac{d^2 V}{dx^2} - x \frac{dV}{dx} - \gamma^2 x^3 V = 0 \tag{7}$$

$$x^2 \frac{d^2 I}{dx^2} - \gamma^2 x^3 I = 0 . \tag{8}$$

Ambedue queste equazioni differenziali sono casi particolari dell'equazione

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (2a - 2bn + 1) x \frac{du}{dx} + [b^2 s^2 x^{2b} + a(a - 2bn)] u = 0 \tag{9}$$

che ha come soluzione

$$u = x^{bn-a} Z_n (s x^b) \tag{10}$$

dove Z_n indica la soluzione generale dell'equazione di Bessel di ordine n [1].

Nell'equazione del voltaggio si ha:

$$2a - 2bn + 1 = -1 \ , \ a - 2bn = 0 \ , \ b^2 s^2 = -\gamma^2 \ , \ 2b = 3 \tag{11}$$

e quindi

$$a = -2 \ , \ b = \frac{3}{2} \ , \ s = \frac{2}{3} j\gamma \ , \ n = -\frac{2}{3} . \tag{12}$$

La soluzione della (4) diviene

$$V = x Z_{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2} \right) . \tag{13}$$

(1) G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*. Cambridge 1922, p. 97.

Per l'amperaggio si ha:

$$(14) \quad 2a - 2bn + 1 = 0 \ , \ a - 2bn = 0 \ , \ b^2 s^2 = -\gamma^2 \ , \ 2b = 3$$

e quindi

$$(15) \qquad a = -1 \ , \ b = \frac{3}{2} \ , \ n = -\frac{1}{3} \ , \ s = \frac{2}{3} j\gamma$$

da cui

$$(16) \qquad I = \sqrt{x}\, Z_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right).$$

La funzione Z contiene due costanti arbitrarie e quindi (13) e (16) sono le due soluzioni generali delle due equazioni (4) e (5).

Dalla (13) e dalla (16) si ottengono immediatamente tre casi particolari.

1° Caso. – Resistenza e dispersione trascurabili $r = g = 0$ e induttanza crescente proporzionalmente alla lunghezza, $l = l_0 x$. Allora

$$(17) \qquad \gamma = j\omega\sqrt{l_0 c}$$

e l'argomento delle funzioni di Bessel diviene reale puro.

2° Caso. – Induttanza e capacità trascurabili, oppure cavo percorso da corrente continua a regime, $l = c = 0$. Resistenza crescente proporzionalmente alla lunghezza, $r = r_0 x$. Allora.

$$(18) \qquad \gamma = \sqrt{r_0 g}$$

e l'argomento di Z_n diviene immaginario puro.

3° Caso. – Dispersione trascurabile, $g = 0$, resistenza e capacità costanti, ma induttanza crescente proporzionalmente alla lunghezza

$$(19) \qquad l = l_0 x \, .$$

Scrivendo

$$(20) \qquad \frac{g + j\omega c}{(\omega l_0)^2} = \varepsilon^2 \qquad , \qquad y = r + j\omega l_0 x$$

si ha con trattamento analogo al caso generale

$$(21) \qquad V = y\, Z_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\varepsilon\, y^{3/2}\right)$$

$$(22) \qquad I = \sqrt{y}\, Z_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\varepsilon\, y^{3/2}\right).$$

Ritornando al caso generale, la funzione Z_n può essere espressa come somma delle due funzioni $\mathfrak{I}_n$ e Y_n, una di primo e l'altra di secondo

grado, o come somma di $\mathfrak{J}_n$ ed $\mathfrak{J}_{-n}$. Usando queste ultime funzioni, le (13) e (16) divengono

$$V = C x \mathfrak{J}_{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right] + D x \mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right] \tag{23}$$

$$I = A \sqrt{x}\, \mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right] + B \sqrt{x}\, \mathfrak{J}_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right] \tag{24}$$

dove A, B, C, D sono quattro costanti.

Derivando e sostituendo nelle (4) e (5) si hanno le due condizioni

$$C = jZB \tag{25}$$

$$D = -jZA \tag{26}$$

dove

$$Z = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega l_0}{g + j\omega c}} \,. \tag{27}$$

Scrivendo per convenienza

$$\varphi_{\pm\frac{1}{3}} = \sqrt{x}\, \mathfrak{J}_{+\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right) \tag{28}$$

$$\psi_{\pm\frac{2}{3}} = x \mathfrak{J}_{\pm\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} j\gamma x^{3/2}\right) \tag{29}$$

si ottiene

$$V = jZ\left[B\psi_{\frac{2}{3}} - A\psi_{-\frac{2}{3}}\right] \tag{30}$$

$$I = A\varphi_{\frac{1}{3}} + B\varphi_{-\frac{1}{3}} \,. \tag{31}$$

Le due costanti A e B possono venire determinate assegnando le condizioni al limite, ad esempio l'amperaggio I_0 ed il voltaggio V_0 all'origine. Per $x = 0$ si ha

$$\varphi_{-\frac{2}{3}} = k_2 \quad , \quad \varphi_{\frac{2}{3}} = 0 \quad , \quad \varphi_{-\frac{1}{3}} = k_1 \quad , \quad \varphi_{\frac{1}{3}} = 0 \tag{32}$$

dove k_2 e k_1 son due costanti che dipendono solo da γ.

Sostituendo questi valori nelle (30) e (31) si ottengono

$$B = \frac{I_0}{k_1} \quad , \quad A = \frac{-V_0}{jZk_2} \tag{33}$$

che sostituite di nuovo nelle (30) e (31) danno infine

$$V = V_0 \frac{\psi_{-\frac{2}{3}}}{k_2} + jZI_0 \frac{\psi_{\frac{2}{3}}}{k_1} \tag{34}$$

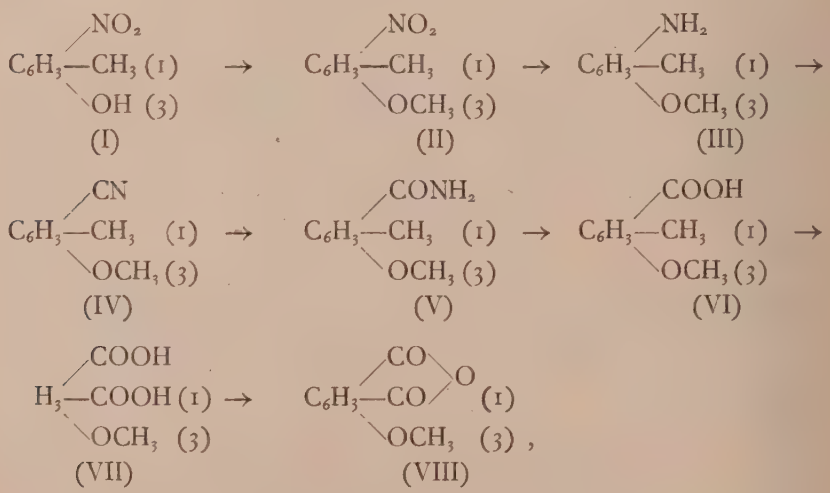
$$I = I_0 \frac{\varphi_{-\frac{1}{3}}}{k_1} + j\frac{V_0}{Z} \frac{\varphi_{\frac{1}{3}}}{k_2} \,. \tag{35}$$

Le quattro funzioni $\varphi_{\frac{1}{3}}$, $\varphi_{-\frac{1}{3}}$, $\psi_{\frac{2}{3}}$, $\psi_{-\frac{2}{3}}$ rappresentano per questo cavo quello che sono le funzioni seno e coseno iperbolico pel cavo uniforme e definiscono completamente il voltaggio e l'amperaggio in ogni punto del conduttore.

Chimica. — *Sull'1-metil 2-nitro 3-ossibenzolo* [1]. Nota di A. Corbellini e C. Ravazzoni, presentata [2] dal Corrisp. L. Cambi.

In una Nota precedente uno di noi con M. Rossi [3] ha avuto occasione di studiare l'acido 3-metossiftalico e di confermare per questo acido e per la sua anidride le caratteristiche già osservate da Bentley, Robinson e Weizmann [4].

Si era in proposito anche notato che la dimostrazione data da G. Ph. Gibson [5] della costituzione del nitro m-cresolo (p. f. 41°) da lui preparato, fondata sulla seguente serie di reazioni



non era esatta.

Infatti l'A., servendosi dei punti di fusione dell'acido 3-metossiftalico e della sua anidride dati da Jacobsen [6] e che competono invece all'isomero

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

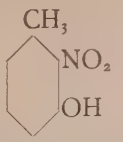
(3) A. Corbellini e M. Rossi, in corso di pubblicazione sulla « Gazzetta Chimica Italiana ».

(4) « Journ. Chem. Soc. », *91*, 107, (1907).

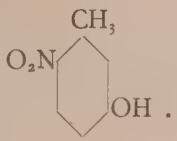
(5) « Journ. Chem. Soc. », *123*, 1269 (1923).

(6) « Ber. », *16*, 1959, 1963 (1883).

4-metossiftalico, aveva attribuito al suo nitro m-cresolo la costituzione

(IX) 

mentre i suoi risultati sperimentali portavano invece alla seguente

(X) 

La costituzione dell'1-metil 3-ossi 6-nitrobenzolo (p. f. 129°) è stata direttamente e indirettamente stabilita con sicurezza da diversi AA.[1], e d'altra parte questo composto e i suoi derivati posseggono caratteristiche nettamente distinte da quelle del nitro m-cresolo e dei derivati studiati da Gibson.

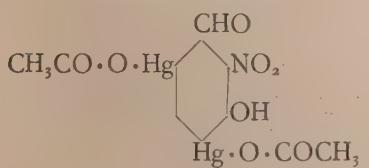
Tutto ciò ci aveva fatto escludere la costituzione (X), e ritenere molto probabile la (IX).

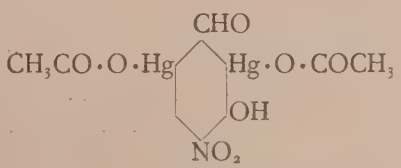
Esponiamo ora le ricerche da noi compiute per stabilire la costituzione del predetto nitro m-cresolo.

Se Gibson fosse effettivamente pervenuto ad un acido 4-metossiftalico ci troveremmo di fronte al caso di una interessante trasposizione: si dovrebbe ammettere cioè che in una delle reazioni con le quali l'A. passa dal nitro m-cresolo all'acido metossiftalico abbia avuto luogo la migrazione del gruppo sostituente dalla posizione 2 alla posizione 6.

La probabilità di questo processo risulta dal fatto che trasposizioni del medesimo tipo (oltre quelle analoghe del gruppo — OH durante la fusione alcalina di acidi solfonici e di fenoli alogenati già note da tempo) si sono constatate recentemente in vari altri casi.

Venne ad esempio osservato[2] che per azione del bromo sopra i seguenti composti di mercurio





(1) Staedel, «Ann.», *217*, 51 (1883); *259*, 210 (1890); Beilstein e Kulberg, «Ann.», *158*, 348 (1871); Cohen e Dakin, «Journ. Chem. Soc.», *83*, 331 (1903); Wroblewsky, «Ann.» *168*, 196 (1875); Lellmann e Klotz, «Ann.», *231*, 311 (1885); Reverdin e Crépieux, «Ber.», *33*, 2505 (1900); Hewitt e Mitchell, «Journ. Chem. Soc.», *91*, 1258 (1907).

(2) Henry e Scharp, «Journ. Chem. Soc.», *125*, 1049 (1924).

non si formano rispettivamente la 2–nitro 3–ossi 4,6-dibromobenzaldeide e la 3-ossi 4–nitro 2.6–dibromobenzaldeide, ma bensì in ambedue i casi la 2.4–dibromo 3-ossi 6-nitrobenzaldeide.

Siamo pervenuti a risultati conclusivi ripetendo le reazioni studiate da Gibson. Infatti, mentre i composti (I), (II), (III), (IV) e (V) da noi ottenuti coincidono con quelli preparati dal predetto A., per l'acido metossitoluico (VI) abbiamo ottenuto un composto fondente a 138°–139° invece di 114°.

Il punto di fusione del nostro acido e le sue caratteristiche coincidono con quelle dell'acido ottenuto da Ph. Chuit e F. Bolsing [1] ossidando il metilderivato della ossitolmilaldeide preparata mediante la reazione di Reimer-Tiemann dall'o-cresolo.

Questi AA. hanno invano tentato di ossidare in soluzione alcalina con permanganato potassico il loro composto ad acido metossiftalico per dimostrarne la costituzione; secondo essi la molecola verrebbe completamente distrutta dall'ossidante.

Operando con lo stesso reattivo e nelle stesse condizioni siamo invece riusciti ad ossidare il nostro acido metossitoluico ad acido metossiftalico. Il suo punto di fusione (173°-174°) e quella della sua anidride (p. f. 159°–160°), ben diversi da quelli trovati da Gibson (rispettivamente 160° e 87°), provano che si tratta dell'acido 3-metossiftalico.

Rimane con ciò definitivamente dimostrato per il nitro m–cresolo di Gibson la costituzione (IX).

Parte sperimentale.

2-metossi 6-metilanilina.

Si ottiene con ottimi rendimenti (93.5 %) riducendo l'etere metilico del 2-nitro m-cresolo (ottenuto metilando con solfato dimetilico il nitro m-cresolo preparato nitrando il m–cresolo nelle condizioni descritte da Gibson) con stagno e acido cloridrico. Dal prodotto di reazione si libera l'ammina nel modo indicato dal predetto A.

Il prodotto greggio, sotto forma di olio che all'aria ossidandosi si colora in rosso-bruno, si purifica raffreddando fortemente la sua soluzione acquosa; si ottengono degli aghetti bianchi fondenti a 30°.

Benzoilderivato. Si ottiene facendo reagire direttamente il cloruro di benzoile sull'ammina.

Il prodotto greggio si purifica cristallizzandolo ripetutamente da alcool diluito; si ottengono dei cristalli aghiformi riuniti a ciuffi fondenti a 135° (secondo Gibson 137°).

(1) «Bull. Soc. chim.» [3], *35*, 142 (1906).

La determinazione dell'azoto ha fornito:

	trovato °/₀	5.77
per $C_{15}H_{15}O_2N$	calcolato °/₀	5.81

Ftalilderivato $C_6H_4\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}NC_6H_3(OCH_3)CH_3$. Gr. 1 di amina si mescolano intimamente con gr. 1.30 di anidride ftalica finemente macinata e si riscalda la miscela verso 180° per breve tempo.

Il prodotto di reazione si estrae a caldo con acqua e si cristallizza il residuo ripetutamente dall'alcool. Si ottengono dei cristalli di forma romboedrica fondenti a 130°-132°.

La determinazione dell'azoto ha dato:

	trovato °/₀	5.26
per $C_{16}H_{13}O_3N$	calcolato °/₀	5.25

2-metossi 6-metilbenzonitrile.

Si diazota l'ammina precedente in soluzione cloridrica e si decompone la soluzione del diazo versandola al solito in una soluzione di cianuro rameoso-potassico riscaldata a bagnomaria.

Il nitrile si separa distillando la miscela di reazione in corrente di vapore. La maggior parte del prodotto si separa come olio che a freddo solidifica, il resto si estrae dalla soluzione acquosa con etere.

Mediante cristallizzazione dall'etere di petrolio si ottiene il prodotto puro in lunghi cristalli bianchi aghiformi fondenti a 62° (secondo Gibson 64°).

L'analisi ha fornito:

	trovato °/₀	C 73.59	H 6.11	N 9.46
per C_9H_9ON	calcolato °/₀	73.43	6.17	9.52

2-metossi 6-metilbenzamide.

Il nitrile precedente (10 gr.) si saponifica bollendolo a ricadere per circa sessanta ore con una soluzione alcoolica (alcool 95° 50 cc., acqua 5 cc.) di idrato potassico (10 gr.).

Si distilla l'alcool nel vuoto, si riprende il residuo con acqua, si filtra e si lava il prodotto secco con etere. Rendimento 77.5 °/₀.

Il prodotto così ottenuto (p. f. 145°) si cristallizza ripetutamente da acqua; si ottengono degli aghetti bianchi fondenti a 156°.

La determinazione dell'azoto ha dato:

	trovato °/₀	8.60
per $C_9H_{11}O_2N$	calcolato °/₀	8.48

Acido 2–metossi 6–metilbenzoico.

Si ottiene con la reazione di Gattermann–Bouveault sciogliendo a caldo l'amide precedente (gr. 1) in acido solforico 30 % (25 cmc.) ed aggiungendo gradualmente alla soluzione filtrata e raffreddata a circa 50°, mediante un tubo che arriva al fondo del recipiente, una soluzione acquosa di nitrito sodico (gr. 0.85).

L'acido si separa parzialmente.

Dopo raffreddamento si estrae la miscela con etere e si tratta il residuo etereo con una soluzione diluita di carbonato sodico che scioglie l'acido, mentre l'amide che è insolubile e le impurezze passano in soluzione sbattendo la sospensione con cloroformio. La soluzione alcalina si sbatte ripetutamente con questo solvente per liberarla completamente dall'amide, e, dopo acidificazione con acido cloridrico, si estrae con etere.

Il residuo etereo si lava con tetracloruro di carbonio, con che si ottiene un prodotto quasi puro (p. f. 137°). Cristallizzandolo ripetutamente dall'acqua si ottiene il composto puro in laminette bianche fondenti a 138°–139°[1].

All'analisi ha dato:

	trovato %	C 65.11	H 6.20
per $C_9H_{10}O_3$	calcolato %	65.03	6.07

È solubile in acqua calda, in etere ed in alcool, quasi insolubile in cloroformio.

Anidride ed acido 3–metossiftalici.

Gr. 1 (1 mol.) dell'acido precedente si scioglie in carbonato potassico diluito e si aggiunge una soluzione di 1.9 gr. (2 mol.) di permanganato potassico in 200 cmc. di acqua.

Riscaldando moderatamente a bagnomaria in alcune ore l'ossidazione è completa.

Si filtra il biossido di manganese, si concentra il filtrato e le acque di lavaggio a piccolo volume, si acidifica con acido cloridrico e si estrae con etere.

Il residuo etereo si scioglie in acqua e si concentra fortemente la soluzione. Per raffreddamento si separa l'acido precedente nei caratteristici cristalli lamellari.

Il filtrato si evapora a secco a bagnomaria e si sublima il residuo (p. f. 155°) nel vuoto.

Il sublimato lavato con etere (p. f. 159°) cristallizza dal benzolo in aghetti raggruppati a ciuffi fondenti a 159°–160°.

(1) Chuit e Bolsing, loc. cit.

All'analisi si è avuto:

	trovato %	C 60.80	H 3.53
per $C_9H_6O_4$	calcolato %	60.66	3.40

La miscela dell'anidride così ottenuta con quella preparata dall'acido 3-nitroftalico[1] (p. f. 159.5°-160) fonde alla loro comune temperatura.

Per evaporazione della soluzione acquosa dell'anidride precedente si ottiene l'acido 3-metossiftalico fondente a 173°-174°.

Un'ulteriore quantità di questo acido si ottiene evaporando a secco a bagnomaria la precedente soluzione acquosa già estratta con etere ed estraendo il residuo con questo solvente.

Chimica. — *Azione delle alghe marine sulla velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni zuccherine*[2]. Nota di F. Pirrone, presentata[3] dal Socio N. Parravano.

Per una serie numerosa di ricerche[4] condotte dal 1925 ad oggi da diversi Autori ed in diversi campi, è noto che:

1. La fermentazione alcoolica viene accelerata:

a) dalle vitamine ed in misura diversa per ciascuna di esse;

b) dal colesterolo e dall'ergosterolo che si suppone contengano in dose più o meno rilevante la provitamina di crescenza.

2. Il colesterolo e l'ergosterolo per azione dell'energia raggiante assumono in grado diverso ed a favore di quest'ultimo proprietà antirachitiche, e danno, dopo la irradiazione, le reazioni colorate della vitamina D.

3. L'energia radiante capace di fare assumere al colesterolo ed all'ergosterolo proprietà antirachitiche, può essere fornita, indifferentemente, dalle emanazioni di radio, dai raggi ultravioletti, dai raggi solari, dalla luce di magnesio.

4. Solo negli olii ricavati dagli animali marini, fra tutti gli olii vegetali ed animali, ed in ispecial modo dagli olii di fegato degli animali marini, si riscontrano assieme a dosi diverse di colesterolo, quantità molto rilevanti del fattore di crescenza.

5. Le alghe marine, che, assieme alle sostanze organiche disciolte o sospese nelle acque marine, costituiscono, sia direttamente che indirettamente, l'unico alimento degli animali marini, contengono: l'ergosterolo, l'algosterolo ed il fattore antirachitico.

(1) Corbellini e Rossi, loc. cit.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Messina e nell'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina.

(3) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(4) La bibliografia, molta estesa, è riportata nella Nota completa che sarà pubblicata nel « Bollettino di Pesca, Piscicultura ed Idrobiologia ».

6. Le alghe dei mari nordici, sottoposte per sei mesi l'anno alle radiazioni del sole settentrionale, costituiscono l'unico alimento diretto o indiretto degli animali marini i cui olii risultano più ricchi degli altri in fattore di crescenza.

Per quanto è sopra esposto risulta evidentemente, quale interesse avrebbe avuto uno studio condotto allo scopo di vedere quale azione abbiano le alghe marine sul decorso della fermentazione alcoolica di una soluzione zuccherina, per cercare di trarne, per questa via, delle conclusioni relative alla presenza degli steroli e delle vitamine nelle alghe del mare.

Le ricerche in questo senso dovevano, per mole di lavoro, essere condotte partitamente sulle diverse famiglie delle alghe marine: Cloroficee, Feoficee, Cianoficee, Rodoficee e Dictiotali.

La prima serie di ricerche dovendo necessariamente essere più ricca ed in maniera notevole di esperienze e di tentativi non poteva essere condotta che su una sola alga. Questa alga venne scelta nell'*Ulva Lactuca* (L) *Lejol*, della famiglia delle cloroficee, come la più abbondante nei nostri mari e la più facile a procurarsi in quantità sufficiente per le mie esperienze. Lo studio esposto in questa Nota è riuscito laboriosissimo, giacchè per mettere in evidenza i fenomeni descritti nella parte sperimentale e per ricercare con esattezza le cause che li determinavano, ho dovuto moltiplicare notevolmente le esperienze, per potere anche rispondere soddisfacentemente alle numerose domande, di svariata indole, che sono stato costretto a pormi, prima di potere attribuire, alla probabile presenza degli steroli e delle vitamine, i fenomeni notati.

Nelle condizioni sperimentali descritte nella Nota completa, l'*Ulva Lactuca*, ha mostrato, nelle esperienze eseguite, un potere accelerante notevole sulla velocità della fermentazione alcoolica e da queste esperienze ho potuto rilevare che:

1. l'*Ulva Lactuca*, allo stato fresco, accelera la velocità della fermentazione alcoolica;

2. l'*Ulva Lactuca* allo stato secco, ha un potere accelerante sulla velocità della fermentazione alcoolica più evidente che se usata allo stato fresco;

3. il potere accelerante dell'*Ulva Lactuca* varia col metodo usato per seccarla. Più attiva, si riscontra l'alga seccata al sole; vengono dopo in ordine decrescente di attività: l'alga seccata in presenza dei raggi ultravioletti, l'alga seccata alla luce diffusa, l'alga seccata a 100°;

4. Le sostanze contenute nell'alga e che attivano la fermentazione sono solubili in acqua, olio, etere, e vengono ad avere eccitata l'azione attivante dalla esposizione ai raggi ultravioletti mentre le sostanze solubili nell'alcool hanno potere inibitore sulla fermentazione, a meno che non siano esposte all'azione degli ultravioletti, solo nel quale caso divengono attivatrici della fermentazione.

Tabella I.

Tempo in ore (1)	Alga fresca (2)	Alga seccata alla luce diffusa a temperatura ordinaria (3)	Alga seccata al sole (4)	Alga seccata in presenza di raggi ultravioletti (5)	Alga seccata a 100°–105° (6)
1	117.82	150.00	200.00	183.67	124.19
2	121.21	148 27	172.17	166.93	126.51
3	117.44	143.61	157.79	151.26	127.27
4	115.28	140.69	147.58	149.36	127.77
5	113.23	138.29	123.27	139 47	126.17
6	106.56	135.27	110.88	121.21	123.45

Ciò risulta in maniera evidente dalla tabella n. I dove nelle colonne 2, 3, 4, 5, 6, sono riportati i valori di anidride carbonica svolta dalle soluzioni fermentanti (nel tempo indicato nella colonna 1, se si considera uguale a 100 la quantità di anidride carbonica svolta nello stesso tempo da una soluzione fermentante di confronto) per addizione rispettivamente di alga fresca, alga seccata alla luce diffusa ed a temperatura ordinaria, alga seccata al sole, alga seccata in presenza dei raggi ultravioletti, alga seccata a 100°–105° in istufa (riportando per ogni esperienza la quantità di alga ad un grammo di alga secca) e dalla tabella n. II ove è riportato lo sviluppo di anidride carbonica da parte delle fermentazioni di ricerca, considerata l'anidride carbonica svolta dalle soluzioni fermentanti di controllo uguale a 100, per i diversi estratti preparati da un grammo di alga allo stato secco.

Tabella II.

Tempo in ore	Estratto acquoso			Estratto alcoolico			Estratto oleoso			Estratto etereo a temperatura ordinaria
	ottenuto a temperatura ordinaria	ottenuto a 100°	ottenuto a temperatura ordinaria ed irradiato	ottenuto a temperatura ordinaria	ottenuto a 78°	ottenuto a temperatura ordinaria ed irradiato	ottenuto a temperatura ordinaria	ottenuto a 100°	ottenuto a temperatura ordinaria ed irradiato	
1	106.80	108.21	125.36	97.81	89.72	125.00	94.13	110.23	108.10	119.56
2	107.10	107.51	125.31	96.93	91.94	118.46	91.06	113.67	110.14	119.01
3	106.87	107.67	124.45	96.85	90.15	113.33	91.30	113.22	112.12	118.92
4	106.77	108.02	123.74	96.33	88.60	110.11	91.73	112.40	112.75	118.72
5	106.49	107.63	121.20	96.47	89.20	108.59	93.35	112.08	116.02	118.82
6	105.98	107.33	119.11	97.92	91.43	107.73	95.41	111.55	118.32	118.13

Esaminando i risultati analitici forniti da diversi Autori sulla composizione chimica qualitativa e quantitativa delle alghe marine con la scorta dei dati ottenuti nelle esperienze eseguite, e di cui le più salienti e caratteristiche sono riportate nelle tabelle nn. I e II, si può pensare:

a) che il fenomeno dell'accelerazione dato dall'*Ulva Lactuca* sulla fermentazione alcoolica di una soluzione di glucosio, è dovuto a sostanze organiche, probabilmente ad una sola, solubili nell'acqua, nell'alcool, nell'etere già a temperatura ordinaria;

b) che allo stato attivo, e non addizionata a sostanze a potere inibitorio della fermentazione alcoolica questa, o queste sostanze, sono solubili nell'acqua a temperatura ordinaria ed a 100°, nell'olio a 100° e nell'etere;

c) che allo stato attivabile questa, o queste sostanze organiche, sono solubili già nell'acqua, nell'alcool e nell'olio anche a temperatura ordinaria.

Chimica. — *Azione dell' acqua marina sulla fermentazione alcoolica* [1]. Nota di L. Sanzo e F. Pirrone, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

R. de Fazi [3] seguendo il metodo descritto in un suo precedente lavoro [4] rilevò che la velocità di fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio, ottenute impiegando acqua distillata, sterilizzata e sottoposta alle radiazioni emesse da una lampada in quarzo a vapori di mercurio, è sensibilmente maggiore della velocità di fermentazione di soluzioni di glucosio, ottenute impiegando lo stesso campione di acqua distillata e sterilizzata, ma che non era stata sottoposta ad alcuna radiazione.

Movendo da cotali ricerche abbiamo ritenuto interessante indagare se ed in quale proporzione l'acqua marina, che costituisce l'ambiente naturale di gran parte del mondo organico, acquisti, per effetto delle radiazioni solari o delle radiazioni emesse da una lampada in quarzo a vapori di mercurio, proprietà differenti dall'acqua marina conservata a lungo e che abbia, con ogni probabilità, perdute le proprietà suddette; ed ancora per quanto tempo l'acqua del mare conservi queste proprietà e se sia possibile stabilire con quale velocità queste vadano degradando fino a scomparire.

Alle proposteci ricerche era necessario far precedere delle esperienze intese a saggiare se l'acqua di mare, appena prelevata, influisca sulla fer-

(1) Dal Laboratorio Chimico dell'istituto Centrale di Biologia marina in Messina.
(2) Nella seduta del 18 gennaio 1931.
(3) « Rend. Accad. dei Lincei », serie 6ª, vol. V, p. 901, anno 1927.
(4) « Rend. Accad. dei Lincei », serie 6ª, vol. V, p. 344, anno 1927.

mentazione alcoolica, e, nel caso positivo, se una tale azione vada degradando e se scompaia del tutto o si stabilizzi intorno ad un dato valore.

Avendo nei primi saggi accertato che l'acqua del mare filtrata e presente nella soluzione, fermentare in ragione del 10 °/₀, dava alla fermentazione un'accellerazione molto evidente, si è determinata l'azione che l'acqua di mare, in tale concentrazione, ha, a crescere distanza dal tempo di prelevamento, sulla fermentazione alcoolica. I risultati, sui quali verremo in dettaglio a riferire in un lavoro a parte sulla degradazione del potere accelerante dell'acqua marina, a partire sia dal momento di prelevamento dal mare, che da quello di irradiazione artificiale a mezzo di una lampada in quarzo a vapori di mercurio, hanno dimostrato, come da alcuni dati che ci limitiamo a riportare qui sotto:

1° che l'acqua di mare, subito dopo il prelevamento ha un'azione acceleratrice sulla fermentazione alcoolica;

2° che una tale azione va rapidamente degradando;

Tabella N. 1.

Anidride carbonica (in cc.) svolta dalle soluzioni fermentanti contenenti il 10 °/₀ di acqua marina, di fronte a quella svolta dalla soluzione fermentante testimone, posta = 100.

Tempo in ore	Distanza del prelevamento dell'acqua marina.					
	1 ora	24 ore	48 ore	10 giorni	15 giorni	20 giorni
3	121.18	119.80	118.30	118.45	118.35	118.75
4	119.70	116.12	116.76	116.56	116.21	116.41

3° che la degradazione non procede fino all'annullamento; ma fino a stabilizzarsi già quasi completamente dopo 24 ore e completamente dopo 48 ore, intorno ad un valore sempre elevato di fronte alla soluzione testimone non contenente acqua marina.

Cotali risultati sono stati a base delle ricerche a cui principalmente si riferisce la presente Nota, con le quali abbiamo rivolto la nostra attenzione all'azione accelerante già stabilizzatasi dall'acqua marina e fuori dell'influenza solare alla quale, con ogni probabilità va addebbitato il valore del potere accelerante perdutosi a partire dal tempo di prelevamento.

Riportiamo qui i risultati di 50 esperienze intese ad accertare se e come una tale azione già stabilizzatasi dell'acqua marina, varii col variare della concentrazione dell'acqua marina stessa nel mosto fermentante. Altre ricerche sono in corso nell'obbietto di stabilire se ed a quali dei costituent¡

chimici dell'acqua marina debba riferirsi l'azione che essa, fuori dall'influenza solare, ha sulla velocità di fermentazione alcoolica.

L'acqua usata in tutte le esperienze fu del medesimo lotto, prelevata il 25 agosto, ore 10, nello stretto di Messina, a 150 m. circa dalla spiaggia dell'Istituto di biologia marina. Fu conservata in bottiglie da 250 cc., scure, completamente piene, ben tappate e mantenute al buio. La serie di esperienze fu iniziata venti giorni dal prelevamento quando era già da tanto tempo avvenuta e, fu del resto confermata dalle nuove esperienze, la stabilizzazione del potere accelerante dell'acqua in uso.

Da cotali numerose esperienze abbiamo potuto stabilire:

1° che l'acqua del mare ha un'azione accelerante sulla velocità di fermentazione alcoolica se la sua concentrazione nel liquido fermentante è inferiore al 20 %; mentre già a questa concentrazione la sua azione sulla velocità di fermentazione è evidentemente inibitrice;

2° che l'acqua marina presente nelle soluzioni fermentanti dalla concentrazione al 5 % alla concentrazione al 13 % ha un potere accelerante evidente e quasi regolarmente crescente;

3° che l'acqua marina addizionata alle soluzioni di glucosio nella concentrazione del 13 %, conferisce alla fermentazione alcoolica di esse il massimo di accelerazione della velocità di fermentazione;

4° che ove l'acqua del mare è presente nelle soluzioni di glucosio in ragione di una concentrazione che va dal 14 % al 100 %, l'accelerazione di velocità della fermentazione subisce una diminuzione continua e quasi regolare.

Cotali risultati sono facilmente rilevabili dalla qui sotto riportata tabella n. 2, che riproduce i valori ottenuti in 16 differenti esperienze, dove accanto al tempo in ore è segnato nelle colonne successive la quantità di anidride carbonica in cc. svolta dalla fermentazione della soluzione di ricerca in confronto a quella svolta dalla fermentazione della soluzione di controllo posta uguale a 100, per concentrazioni di acqua marina nella soluzione fermentante, oscillanti dal 5 % al 100 %:

Tabella N. 2.

Tempo in ore	Concentrazione dell'acqua marina nel mosto.							
	5 %	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %	20 %
2	109.89	119.08	115.63	117.20	121.24	117.29	114.38	89.60
3	112.16	118.75	119.26	120.39	124.74	121.85	118.70	89.73
4	112.59	116.41	118.35	117.59	124.61	114.30	116.50	89.39

Segue TABELLA N. 2.

Tempo in ore	Concentrazione dell'acqua marina nel mosto.							
	25 %	30 %	35 %	40 %	45 %	50 %	75 %	100 %
2	88.65	86.66	86.13	84.25	84.48	82.16	80.81	74.76
3	90.20	87.74	87.97	87.34	85.96	79.68	85.42	74.81
4	91.14	88.29	91.81	90.47	84.99	86.19	88 —	79.81

Abbiamo riportati i valori complessivi alla 2ª, 3ª, 4ª ora, essendo in queste ore il fenomeno acceleratore od inibitore della fermentazione già reso abbastanza evidente.

Fisiologia. — *Modificazioni dei tassi alcoolemico e idremico in seguito a somministrazione di alcool e acqua*[1]. Nota di A. GALAMINI e G. LAMANNA, presentata[2] dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Ricerche precedenti[3] ci avevano mostrato che per l'alcool e per il glicosio era possibile fissare una dose diversa nei diversi soggetti, la quale somministrata più volte alla distanza di 10′ non faceva aumentare rispettivamente il tasso alcoolemico e il tasso glicemico. Ne risultava che con le somministrazioni frazionate si poteva stabilire il momento in cui all'organismo venisse meno la capacità di limitare la concentrazione delle sostanze del sangue; e si otteneva così un criterio discriminativo migliore che con le somministrazioni massive. Dette ricerche furono eseguite senza tenere conto delle eventuali modificazioni del tasso idremico, le quali avrebbero potuto, entro certi limiti, far variare la valutazione dei dati ottenuti. E pertanto con una nuova serie di esperimenti si è voluto tornare sull'argomento per studiare le variazioni, sia del tasso idremico che del tasso alcoolemico, in seguito a somministrazione di alcool.

Si sperimentò nelle ore del mattino a digiuno, su quattro adulti giovani, sani dal peso di kg. 60–70, ai quali si fece ingerire alcool sotto forma di marsala in proporzione di cc. 0.5 di alcool assoluto per kg. di peso. Esperienze di controllo furono eseguite senza far ingerire nulla, o

(1) La direzione e la interpetrazione delle ricerche appartengono ad A. Galamini.

(2) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(3) A. GALAMINI, « Boll. della Soc. It. di Biologia sperimentale », vol. III, fasc. IV, 1928.

somministrando una quantità d'acqua potabile corrispondente al marsala ingerito. Tre esperimenti furono eseguiti nei soggetti normali, facendo loro ingerire un kg. di uva, anzichè marsala: 2 nei diabetici, somministrando loro cc. 250 di acqua potabile. In questi 5 casi si dosarono i tassi idremico, alcoolemico e glicemico. I dosaggi furono sempre eseguiti prima delle ingestioni delle sostanze e dopo, a distanza di tempo, per più ore. L'alcool fu dosato con il metodo di Widmark modificato[1]: l'acqua e lo zucchero con i rispettivi metodi di Bang [2].

Per quanto concerne le variazioni note del tasso alcoolemico in seguito ad ingestione di marsala ci riferiamo a comunicazioni precedenti [1]. Circa il tasso idremico ricordiamo che Max Hellmut [3] ne fece la misura nell'uomo dosando l'emoglobina con il colorimetro di Brüker prima e dopo aver fatto ingerire un litro di acqua a digiuno. Dopo 20'–40' dall'ingestione in numerosi esperimenti, l'Autore osservò un breve periodo di diluizione del sangue seguito poco dopo da un'altra diluizione. Dopo 4, 5 ore i valori idremici tornavano al livello normale del digiuno. Cassinis e Bracaloni [4] nel riposo e allo stato di digiuno, per un periodo di 2, 3 ore nel mattino, non osservarono in militari variazioni apprezzabili del contenuto idrico del sangue. Le variazioni dei diversi soggetti oscillarono tra 0.20 e 0.90 % e le differenze tra quote successive si mantennero al disotto di questi valori. La ingestione di 10 cc. di acqua per kg. di peso provocò un aumento massimo della quota idremica di circa 0.5 %, dopo 20'–60' dall'ingestione; l'ingestione di 20 cc. per kg. di peso fece aumentare al massimo il tasso idremico di 0.67 %. Meyer Bisch Robert [5] ha studiato la variazioni della diluizione del sangue dipendenti dalla somministrazione per via orale di levulosio e destrosio nella proporzione di 100 gr. Secondo le osservazioni dell'A. il levulosio fa aumentare la concentrazione del sangue ed eleva il tasso dell'emoglobina e delle proteine del siero. Il destrosio o non agisce o provoca la diluizione del sangue. La diuresi, il bilancio di cloruro di sodio e il peso del corpo non subiscono variazioni nè con il destrosio nè con il levulosio. Gli epatici si comporterebbero come i soggetti normali. I diabetici avrebbero un comportamento anomalo. In essi si osserverebbe talvolta l'aumento della concentrazione del sangue, ma essa sarebbe dovuta a perdita di liquido del complessivo organismo, che diminuisce di peso. Nei cani e nei conigli il destrosio agirebbe come il levulosio.

(1) L. Bracaloni, «Arch. di Farmacologia sperimentale e Scienze affini», 1928.

(2) S. Baglioni, L. Bracaloni, A. Galamini, «Rendiconti Accademia Lincei», vol. IV, 1926; vol. V, 1927.

(3) Max Hellmut, «Klin. Wochenschr.», Jg. 4, N. 24, S. 2339–2342, 1925.

(4) U. Cassinis e L. Bracaloni, «Rendiconti Accademia Lincei», vol. IX, 1929; vol. XI, 1930.

(5) Meyer Bisch Robert, «Klin. Wochenschr.», Jg. 3, N. 2, S. 60–61, 1924; Idem., «Zeitschr. f. d. ges. Med.», Bd. 44, H. 3–4, S. 365–368, 1925.

I risultati delle presenti ricerche si possono riassumere brevemente nel modo seguente:

In una prima serie di esperienze si dosarono il contenuto idremico e alcoolemico ogni ora circa nel mattino a digiuno dalle 8.30′ alle 12.50′. Le sostanze riducenti volatili del sangue non subirono che piccole modificazioni e oscillarono tra 0.005 e 0.04 °/₀₀; invece il tasso idremico variò ed ebbe un comportamento diverso nei diversi soggetti. In due di essi, Se. e G. A. aumentò dalle ore 8 fino alle 10-11, poi diminuì dalle 11 alle 12 e precisamente, in Se. aumentò da 78.90 °/₀ fino a 79.23 °/₀, cioè = più 0.33 °/₀, quindi scese a 78.70 °/₀ cioè di 0.53 °/₀, in G. A. aumentò da 79.65 °/₀ a 80.69 °/₀ = più 1.04 °/₀, poi scese 79.69 °/₀ cioè di 1.0 °/₀.

Nel terzo soggetto, Sb. G. il tasso idremico aumentò progressivamente fino alle ore 12, da 78.88 °/₀ a 79.73 °/₀. Un comportamento completamente diverso si ebbe nel quarto soggetto, sul quale si eseguirono alcune ricerche complementari. In questi il tasso idremico diminuì dalle ore 8 alle 12 e sensibilmente, da 79 °/₀ a 75.17 °/₀. Quindi è molto verosimile che anche nelle variazioni giornaliere del tasso idremico si debbano distinguere diversi tipi individuali. Le variazioni del tasso glicemico a digiuno e a riposo furono molto lievi e non superiori a 0.1 °/₀. In La. Gr. e in Sb. e in G. A. i valori oscillarono intorno ai 0.70-0.75 °/₀.

Nella seconda serie di ricerche furono fatti ingerire a digiuno, cc 200 di acqua potabile, quantità corrispondente a quella del marsala usato nelle ricerche di alcoolemia provocata.

In La. G. nel quale il tasso idremico di solito diminuisce, come si è detto, si ebbe prima un aumento da 79.03 °/₀ a 79.68 °/₀ in 30′ poi, una diminuzione, a 79.19 °/₀ seguita da un ulteriore aumento fino a 79.69 °/₀. I valori rimasero sempre superiori a quelli dell'inizio dell'esperienza. In Sb. G., G. A. Se., si osservò piuttosto la tendenza alla diminuzione del tasso idremico, nel senso che, se anche inizialmente si ebbe un lieve aumento, in G. A. da 79.66 °/₀ a 80 °/₀; in Sb. G. da 78.48 °/₀ a 78.79 °/₀, in Se. da 78.40 °/₀ a 78.85 °/₀, esso fu seguito sempre da una diminuzione di maggior valore, rispettivamente da 80 °/₀ a 79.19 °/₀, da 78.89 °/₀ a 78.20 °/₀ e da 78.85 °/₀ a 78 °/₀, interrotta da aumenti secondari, ma tali però da non ricondurre mai il tasso al valore normale.

In complesso in un soggetto, l'ingestione di acqua aumentò il tasso idremico, in altri tre lo fece essenzialmente diminuire. Verosimilmente le diminuzioni, specie quando non furono precedute da aumenti, si ebbero per opera di un rifiesso, la cui origine si può ricercare o nel tubo gastroenterico o nel fegato.

Durante l'ingestione di acqua le sostanze riducenti, in La. G. e G. A. non si modificarono. In Se. in un'esperienza aumentarono da 0 a 0.15 °/₀ in tre ore, in un'altra no. In Sb. G. invece aumentarono col diminuire del tasso idremico ed una volta anche sensibilmente, cioè da 0.021 °/₀₀

a 0.147 °/₀₀. Si pensò allora che le sostanze volatili riducenti potessero essere in rapporto con ingestione precedente di bevande alcooliche e ciò perchè esse aumentarono solo nei due soggetti modici bevitori, mentre non variarono negli altri due da tempo astemi. Si pensò anche che, per effetto dell'ingestione di acqua, si potessero mobilizzare sostanze riducenti prodotte nell'organismo da alterazioni del metabolismo e si volle vedere se queste alterazioni si verificassero, facendo ingerire acqua a digiuno, a soggetti patologici.

Si scelsero due diabetici, uno di essi glicosurico con tasso glicemico di 2 °/₀₀, il quale da tempo non si sottoponeva a regime dietetico speciale, ed un secondo il quale aveva avuto in precedenza disturbi gravi da diabete, ma che presentemente, sottoposto a dieta ben regolata, si trovava in discrete condizioni di salute, non aveva glicosuria e possedeva un tasso glicemico dell'1.61 °/₀₀. La ingestione di 250 e 300 cc. di acqua, nel secondo di questi individui, provocò dapprima forte diminuzione del tasso idremico da 78.70 °/₀ a 77.51 °/₀ in 30′, seguito da lieve aumento da 77.51 °/₀ a 77.77 °/₀. I tassi, glicemico e alcoolemico non variarono. Nell'altro soggetto il contenuto dell'acqua del sangue subì variazioni pressochè simili e cioè diminuzione del tasso idremico da 77.71 °/₀ a 77.10 °/₀ in 10′ e poi aumento da 77.10 °/₀ a 78.12 °/₀; il tasso alcoolemico non variò, il tasso glicemico aumentò poco dapprima, da 1.9 °/₀₀ a 1.94 °/₀₀, poi diminuì, da 1.94 °/₀₀ a 1.73 °/₀₀, sebbene fosse anche diminuito il tasso idremico. In complesso quindi con ingestione di acqua non si misero in evidenza sostanze riducenti, depositate nei tessuti, ammessochè con la tecnica usata fosse possibile provocare la loro immissione in circolo: le variazioni del tasso idremico furono simili a quelle più costantemente osservate e cioè condussero piuttosto ad una diminuzione che ad un aumento dell'acqua del sangue.

Ricerche supplementari alle precedenti furono fatte, nei soggetti sani sopra citati, facendo loro ingerire a digiuno un kg. di uva e ciò allo scopo di vedere se, facendo pervenire in circolo una grande quantità di zucchero alimentare in individui normali, si fosse potuto provocare o no una modificazione del tasso alcoolemico.

Si utilizzò uva che conteneva il 13.33 °/₀ di zucchero riducente: sicchè con un kg. si ingerirono 133 gr. di zucchero. L'uva fu mangiata in 20–40′.

La ingestione non fu innocua per due soggetti; uno di essi, G. A., fu colto da forte cefalea, l'altro, Sb. G., da disturbi gastroenterici. Il tasso glicemico aumentò in tutti quasi del doppio abbastanza rapidamente. In G. A. da 0.89 °/₀ a 1.57 °/₀ in 15′ ca., in L. Gr. da 0.75 °/₀ a 1.5 °/₀ in 20′ ca., in Sb. G. da 0.92 °/₀ a 1.71 °/₀ in 15′, diminuì poi, senza che si osservassero mai degli aumenti successivi. In due soggetti le sostanze riducenti del sangue non si modificarono, nel terzo, L. Gr. aumentarono poco da 0 °/₀ a 0.04 °/₀, quando diminuì rapidamente il tasso glicemico. Il tasso idremico non

aumentò in nessuna delle ricerche, sebbene con l'uva fossero ingeriti circa 500 cc. di acqua. Al contrario, quando il tasso glicemico era maggiore, il contenuto dell'acqua nel sangue era diminuito rispetto al valore iniziale dell'esperienza, in G. A. da 79.43 °/₀ a 78.54 °/₀, in La Gr. da 77.78 °/₀ a 77.58 °/₀, in Sb. G. da 78.79 °/₀ a 78.55 °/₀. Non si osservò glicosuria nè azione diuretica. È da osservare che l'aumento iniziale del tasso glicemico non fu seguito d'aumenti successivi, come avviene quasi sempre quando si ingerisce una soluzione di glicosio in proporzione uguale a quella dell'uva. Perciò si può sospettare che il comportamento del tasso glicemico sia dipeso dalla forma speciale con la quale la sostanza fu somministrata in questi esperimenti (presenza di altri componenti alimentari dell'uva, ecc.).

Nell'ultima serie di ricerche si fece ingerire ai soggetti in esame del marsala di buona qualità, contenente il 16 °/₀ di glicosio e il 16 °/₀ di alcool. Ne furono ingeriti 200 cc., o in una volta, o in tre volte, o in sei volte, alla distanza di 10 in 10'.

I risultati furono i seguenti:

In Se. ingerendo marsala in una volta il tasso alcoolemico aumentò rapidamente da gr. 0 a gr. 0.53 per mille in 30'. Con altrettanta rapidità aumentò quando il marsala fu ingerito in tre volte successive. Si notò invece un rallentamento, sia pur lieve, quando l'ingestione ne fu fatta in sei volte. Il tasso alcoolemico più elevato corrispose, press'a poco, a quello degli esperimenti precedenti che fu di gr. 0.57 per mille.

In Sb. G. e G. A. l'ingestione di 200 cc. di marsala in una volta fece variare rispettivamente il tasso alcoolemico in ca. 30' da 0.05 °/₀₀ a 0.44 °/₀₀ e da 0.02 °/₀₀ a 0.51 °/₀₀: l'ingestione della stessa quantità di marsala in tre volte da 0.06 °/₀₀ a 0.37 °/₀₀ e da 0 °/₀₀ a 0.45 °/₀₀, 10' ca. dopo la terza ingestione.

Quando il marsala fu ingerito in sei volte in Sb. G. il tasso alcoolemico salì a 0.57 °/₀₀ dopo l'ultima ingestione. L'aumento però si fece in forma irregolare e fu interrotto da diminuzioni.

Se la quantità di alcool presente nel sangue aumenta, quando l'alcool è ingerito in una sola volta con lo stesso ritmo di quando l'alcool è ingerito in tre volte alla distanza di 10', ciò significa che il ritmo di assorbimento della sostanza non subisce modificazioni e che verosimilmente sono uguali anche le reazioni prodotte dalla immissione della sostanza nell'organismo. La diminuzione della concentrazione del tasso alcoolemico quando l'alcool fu ingerito in sei volte verosimilmente indica che in questo caso o diminuì nel tempo il passaggio di alcool nel sangue o aumentò proporzionatamente la quantità di alcool ceduta ai tessuti.

Con l'ingestione del marsala, sia a dosi massime sia a dosi frazionate, il tasso idremico generalmente diminuì. Spesso le diminuzioni si osservarono in proporzione maggiore di quando fu ingerita solo acqua. Gli aumenti successivi si ebbero, in linea generale, quando l'alcool nel sangue tendeva

rapidamente a diminuire. Il livello più elevato del tasso alcoolemico coincise sempre con il livello più basso del tasso idremico.

Le diminuzioni di questo tasso furono allora, nei diversi soggetti le seguenti: in G. A da 79.79 °/₀ a 79.58 °/₀ e da 80 °/₀₀ a 78.32 °/₀₀; in S. e E. da 80.27 °/₀₀ a 78.15 °/₀₀ e da 79.16 °/₀₀ a 77.28 °/₀₀ e da 78.25 °/₀₀ a 77.55 °/₀₀; in Sb. Gl. da 78.55 °/₀₀ a 78.42 °/₀₀, da 79.74 °/₀₀ a 78.98 °/₀₀ e da 80.08 °/₀₀ a 79.44 °/₀₀.

Circa l'azione diuretica dell'alcool, si è pensato da taluni, oltre che ad un'azione diretta di eccitamento dell'epitelio renale, anche ad una azione indiretta dovuta all'aumento del contenuto di acqua del sangue. Le presenti ricerche escludono questa seconda opinione, perche, se è vero che l'alcool esercita una maggiore azione diuretica quando si trova in quantità maggiore nel sangue, è anche vero che allora il tasso idremico è minore.

Concludendo:

I diversi soggetti hanno a digiuno tasso idremico diverso.

Le variazioni del tasso idremico osservate nelle ore del mattino consistono, per la maggior parte dei soggetti in un aumento fino alle ore 11 circa e in una diminuzione successiva; in un soggetto si osservò una progressiva diminuzione dalle 8 alle 13.

La somministrazione di piccole quantità di acqua, 200–300 cc. provocarono un abbassamento del tasso idremico preceduto o no da lieve aumento.

Un abbassamento dell'idremia si osservò anche nelle ingestioni di alcool e durante l'ingestione di forti quantità di glicosio, sotto forma di uva, sebbene la quantità di liquido introdotto in quest'ultimo caso fosse relativamente alta (circa 500 cc.).

La somministrazione di marsala a dosi frazionate, a distanza costante di tempo, consentì di misurare la quantità di alcool, con la quale l'aumento del tasso alcoolemico non si compie più secondo una linea rapidamente ascendente, ma secondo incrementi successivi interrotti talvolta da diminuzioni

Le variazioni di acqua nel sangue variarono in senso inverso a quelle del tasso alcoolemico.

Biologia (Fisiologia vegetale). — *Sui gas contenuti in « Valonia Utricularis (Roth) Ag. »*[1]. Nota di Silvia Colla, presentata[2] dal Socio A. Herlitzka.

Valonia Utricularis prospera nella zona situata tra l'alta e la bassa marea: si trova quindi in condizioni ambientali diverse durante le varie ore del giorno, e reagisce a queste variazioni con modificazioni caratteristiche del suo tallo.

Ad alta marea l'alga completamente sommersa si presenta sotto forma di un ammasso semisferico verde, sulla superficie del quale si notano circonvoluzioni abbastanza profonde.

Quando lo stesso individuo si trova già esposto all'aria, ma è ancora lambito dalle onde, e quindi è in un ambiente compatibile con la sua vitalità, perde ogni piega e si trasforma in una vescica gonfia, quasi sempre piriforme, di un colore verde molto pallido, tendente al giallastro: le pareti della vescica sono quasi trasparenti; a giudicare e dal colore e dalla trasparenza si direbbe che lo spessore del talloma sia diminuito durante la distensione. Se queste vesciche vengono punte, si ritorna alla forma primitiva dell'individuo sott'acqua, ma se il periodo di secca dura a lungo e se non intervengono altre cause, dànno invece luogo ad una massa crostosa verde oliva scuro, grinzosa, che riprende il suo habitus cerebriforme appena venga immersa nell'acqua.

Nelle alghe sommerse si trova una piccola quantità di gas raccolto nel loro interno; col progredire della formazione del gas, viene spostata l'acqua contenuta nell'interno dell'alga, che ne viene espulsa, indi anche una parte del gas ne esce, senza che avvenga una distensione delle pareti. Quando invece l'alga affiora, il gas non esce più dal suo interno, ma vi si accumula, distendendone le pareti nel modo indicato.

Poichè le condizioni più propizie allo sviluppo dell'alga paiono quelle date dalla vita sott'acqua, ho cercato di osservare la formazione del gas in queste condizioni.

Nelle prime ore del mattino, la quantità di gas contenuta nell'alga è minima e si trova raccolta nelle parti più alte delle circonvoluzioni: sotto di esso, racchiuso fra le pareti del talloma, si trova un liquido costituito probabilmente per la massima parte da acqua di mare.

(1) Dall'Ist. di Fisiologia della R. Università di Torino (Sezione marina di Muggia)
(2) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

Col progredire della giornata, la quantità di gas aumenta tanto da riempire completamente la vescica: in alcuni casi si nota esternamente ed aderente alla parete in prossimità della sua base o al centro della superficie superiore del talloma, la presenza di una bolla gassosa, dovuta all'uscita all'esterno di una parte dei gas prodotti nella vescica.

Esercitando sull'alga una leggera pressione, si provoca l'uscita di una serie di bolle da quel medesimo punto in cui si era notata la formazione spontanea di una bolla.

Si sono raccolti i gas mediante una siringa di Pravaz, con un metodo già descritto da me, e così pure l'analisi quantitativa e quella qualitativa vennero eseguite con le modalità descritte nei lavori precedenti [1].

Nel gas ottenuto da queste alghe, non si trovarono nè ossido di carbonio (con l'assorbimento per mezzo dell'emoglobina), nè altri gas riduttori (saggiati col cloruro di cobalto); si rinvenne in quantità variabile l'ossigeno (assorbito con il pirogallolo o l'idrosolfito di sodio in soluzione alcalina) e l'anidride carbonica (mercè l'idrossido di potassio).

Il residuo gassoso non venne analizzato. La determinazione quantitativa dell'ossigeno e dell'anidride carbonica fu eseguita con il microrespirometro di Krogh.

Le analisi, iniziate alle 8, si prolungarono fino alle 21.

L'anidride carbonica si trova solo nelle prime ore del mattino, in quantità variabile dal 2.5 al 7.1 %. Pare che la quantità di CO_2 sia in relazione con l'età degli individui.

Per la determinazione di quest'ultimo gas sono partita dall'osservazione che nello stesso individuo il colore va diventando di giorno sempre più chiaro, e dal verde vivo che presentava da principio, acquista una tinta sempre più tendente al verde giallo. Inoltre, nello stesso individuo, i solchi tra le circonvoluzioni vanno col tempo diminuendo di profondità, fenomeno che accompagna l'accrescimento dell'alga.

Per quanto riguarda la presenza dell'anidride carbonica, è da notare che nelle cavità appena formate la sua percentuale è maggiore che nelle cavità più antiche.

L'ossigeno invece subisce delle variazioni più grandi, come risulta dai protocolli seguenti.

1) 4 ottobre 1930: Gas estratti separatamente da vesciche giovani e da altre vecchie.

Le alghe vennero immerse, con la pietra che serviva loro da attacco, in ampie bacinelle contenenti acqua di mare ed esposte per tutto il giorno alla luce diretta del sole.

(1) S. Colla, *Variazioni del contenuto in O_2 nelle vesciche idrostatiche di alcune alghe brune.* « Rendiconti R. Acc. Naz. Lincei », XI, 615, 1930.

	Ore					
	8.20	10	12.30	13.30	16	18
T° acqua	16°	18°	26°	26°	22°	20°
Vesc. vecchie O_2 % .	16.1	16.5	24.8	25.6	49.1	49.7
Vesc. giovani O_2 % .	non esaminate	non esaminate	34.1	58.7	57.2	54

2) 5 ottobre 1930: Cielo molto coperto da strati uniformi. Pioggia tutto il giorno.

	Ore				
	8.40	10.40	12.30	14.30	17.30
T° acqua	15°	16°	16°8	26°	15°
Esempl. giovani O_2 %	5.35	32	47.9	52.6	50.4
Esempl. vecchi O_2 %	18.5	32	51.2 (?)	42	46.3

3) 7 ottobre 1930: Dalle 8.30 in poi cielo sereno. Giornata limpidissima con vento. Alga giovane.

	Ore					
	10.15	12	14.15	16	18	21.15
O_2 %	55.5	69.3	60.6	48	56.3	56.4

Da questi protocolli e dai grafici riportati nella fig. 1 vediamo che tanto nelle giornate perfettamente piovose come in quelle soleggiate, la quantità maggiore di ossigeno si ha nelle ore con intensità luminosa più forte, e quindi nelle giornate senza variazione dello stato del cielo tra le 12 e le 13.

I protocolli 1) e 2) ci dimostrano che i gas prelevati dagli individui giovani sono più ricchi in ossigeno di quelli estratti dagli esemplari molto evoluti.

La quantità °/₀ di ossigeno nei primi sale fino al 70 °/₀ circa, e questo

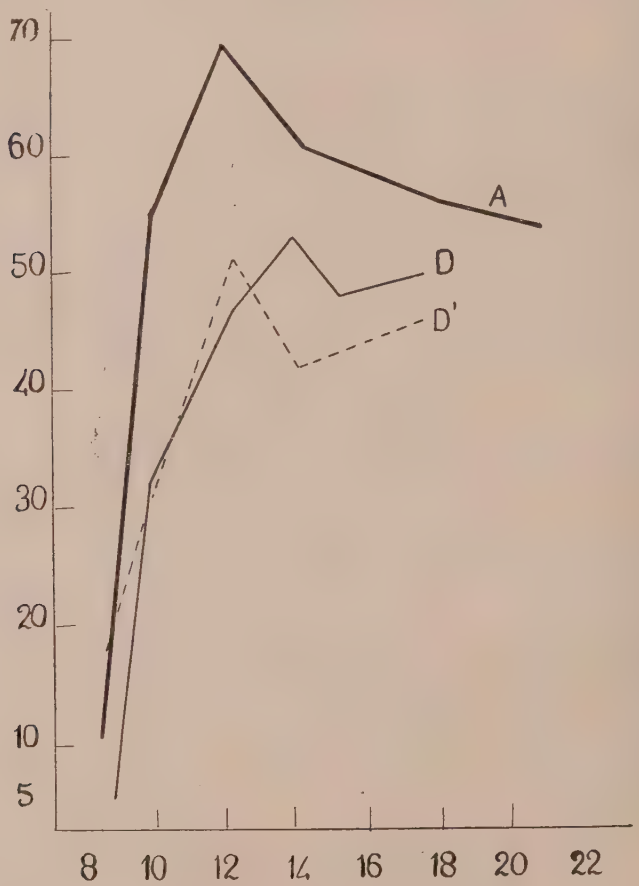


Fig. 1 — Curve delle variazioni °/₀ O_2 in tre alghe; A in un alga giovane e con un tempo radioso; D in un alga giovane; D' appena adulta durante una giornata coperta ma chiara.

valore lo si è trovato in un esperimento fatto in una giornata luminosissima.

Le variazioni percentuali di O_2 sono quindi in relazione con la luminosità e probabilmente con la quantità di energia radiante.

L'unico fenomeno che nei vegetali dipenda in modo diretto dalla luce è la fotosintesi; è ammissibile quindi che l'ossigeno che si raccoglie nelle vesciche sia dovuto all'attività del cloroplasto.

La presenza dell'anidride carbonica avrebbe poi un altro significato. Esso sarebbe il prodotto della respirazione dei tessuti; il suo contenuto percentuale è tanto maggiore quanto meno è diluito dalla produzione dell'ossigeno. Ecco la ragione per cui si trova l'anidride carbonica solo nelle primissime ore del mattino, quando la vescica contiene solo i gas della respirazione della notte ed i pochi residui dell'ossigeno sviluppati nella giornata antecedente. Parimenti un più attivo ricambio respiratorio delle vesciche giovani spiegherebbe la ragione per cui quest'ultime contengono, a parità delle altre condizioni, una maggior percentuale di anidride carbonica.

I risultati ottenuti in queste alghe collimano perfettamente con quelli avuti dallo studio dei gas delle vesciche di fucus e di altre alghe brune a cui si riferiscono altri miei lavori [1].

Biologia (Ecologia). — *Trattamento dei semi di grano nella pianta madre. Predeterminazione funzionale.* Nota di G. Tallarico presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Lo sviluppo di un individuo è dipendente non solo da fattori ereditari, ma anche da fattori ambientali [3], e, recentemente, l'embriologia sperimentale [4] ha dimostrato che profonde modificazioni si possono ottenere attraverso le influenze ambientali a patto che queste si esercitino nella fase più plastica e ricettiva dell'individuo; anche, quindi, lo sviluppo e la fruttificazione dell'individuo grano non solo è il risultato di fattori ereditari, e di condizioni climatiche che hanno accompagnato il suo intero ciclo di sviluppo, dalla germinazione al seme; ma è anche la risultante di fattori ambientali che hanno presenziato, nell'annata precedente, la sua prima fase di esistenza, la più sensibile e la più ricettiva. Ora, mentre il controllo dei fattori ereditari è entrato nel dominio della genetica e quello dei fattori ambientali operanti durante il ciclo di sviluppo della pianta, appartiene alle usuali pratiche agrarie; lo studio del terzo gruppo di fattori, che vanno sotto il nome di fattori di *predeterminazione funzionale*, ed i cui effetti non si rendono visibili che negli studi ulteriori e finali del ciclo di sviluppo della pianta stessa, formano, da un decennio, argomento delle nostre ricerche [5].

(1) Vedi nota a pag. 150 e S. Colla, *Sui gas contenuti in alcune alghe brune* «Rend. Acc. N. Lincei», vol. XIII, 1931.

(2) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(3) H. De Vries, *The mutation Theory*, 1910.

(4) E. G. Conklin, *L'hérédité et le milieu*, 1920.

(5) F. Kidd, C. West., *Physiological Pre-determination* («Review of Literature»), «Annals of Applied Biology», 1918.

Questa peculiare epoca della vita del grano più facilmente e sensibilmente influenzabile comprende il periodo della formazione dei gameti, quello della fecondazione, della formazione dell'embrione e della maturazione del seme; tutte fasi che avvengono nel grembo della pianta madre; quindi l'importanza del trattamento della pianta madre per influenzare la figliuolanza [1].

E poichè nel clima caldo-arido meridionale queste diverse fasi si compiono durante la stagione primaverile, o meglio dall'aprile alla prima decade di giugno, da ciò l'importanza di prendere in considerazione sperimentale proprio questo periodo. Inoltre poichè in questo clima il fattore limite della produzione granaria è l'acqua, e specialmente l'acqua che cade nei mesi di primavera, da ciò anche l'importanza a scopo pratico del trattamento idrico della pianta madre cercando di attenerci, nella condotta sperimentale, ai più frequenti tipi stagionali di precipitazione della zona [2].

Preparazione del materiale. – Da un'unica e vigorosa pianta di grano di varietà locale (Saragolla) si prelevano le migliori spighe e dalla parte centrale di esse si scelgono le cariossidi che abbiano lo stesso peso e le medesime dimensioni, che, poi, si seminano, alla medesima distanza e profondità, in vasi delle dimensioni di un mc. e della superficie di un mq., riempiti da terreno vegetale omogeneo e mantenuti per tutto il tempo dello sviluppo sotto tettoia. Ogni vaso riceve inizialmente quaranta cariossidi, che, appena germinati, si riducono a trenta piantine per ottenere in ciascun ambiente lo stesso numero di individui vegetanti. Per la dotazione idrica i vasi vengono divisi in quattro serie, corrispondenti ciascuna approssimativamente ad un tipico e frequente andamento pluviometrico ottenendosi così i seguenti quattro tipi: Serie *A*: andamento interamente umido. – Serie *B*: andamento arido con primavera umida. – Serie *C*: andamento interamente arido. – Serie *D*: andamento umido con primavera arida.

Le irrigazioni si iniziavano all'atto della semina e venivano ripetute in tutti i vasi tre volte al mese sospendendosi nella prima decade di giugno, epoca in cui si deve ritener compiuto l'intero ciclo di sviluppo della pianta in questo clima.

Riporto in specchietto riassuntivo i risultati riferendo alla produzione all'ettaro di terreno.

(1) P. A. Harris, «American Naturalist», 1912 (XLVI); Idem, «Biometrika», 1913 (IX), 1914 (X).

(2) G. Azzi, *Ecologia agraria*, 1928.

Anno 1925–1926.

	Quantità di acqua ricevuta da ciascun vaso calcolata in mm. durante:				Produzione in:	
	Autunno	Inverno	Primavera	Totale	Q. per ettaro per vaso	Q. Media
Serie *A*:	250	200	150	600	—	
Vaso *a'*	»	»	»	»	18.1	
Vaso *a''*	»	»	»	»	10.2	16.2
Vaso *a'''*	»	»	»	»	20.4	
Serie *B*:	90	70	120	280	—	
Vaso *b'*	»	»	»	»	10.1	
Vaso *b''*	»	»	»	»	16.4	14.7
Vaso *b'''*	»	»	»	»	18.3	
Serie *C*:	120	70	40	230	—	
Vaso *c'*	»	»	»	»	6.1	
Vaso *c''*	»	»	»	»	5.4	6.4
Vaso *c'''*	»	»	»	»	7.8	
Serie *D*:	250	210	40	500	—	
Vaso *d'*	»	»	»	»	8.3	
Vaso *d''*	»	»	»	»	5.9	7.0
Vaso *d'''*	»	»	»	»	6.9	

L'esame di questo specchietto comprova quello che la scienza ecologica da qualche anno sostiene dando grande importanza ai periodi critici del grano e quindi all'umidità primaverile come fattore precipuo di produzione; infatti i risultati della produzione della serie *A* e *B* quasi si eguagliano pur ricevendo i vasi della serie *A* un totale di acqua più che doppio dei vasi della serie *B*, ma ambedue godendo di una sufficiente umidità primaverile (150 e 120 mm.). E così anche si eguagliano gli scadenti prodotti della serie *C* e *D* pur ricevendo i vasi di quest'ultima un totale di acqua di irrigazione abbondante nella stagione autunno–vernina (430 mm.) ma insufficiente nel periodo critico primaverile.

E così si ottenne il materiale sperimentale corrispondente a quattro gruppi di individui differenti: Gruppo *A*: semi formatesi in piante madri trattate con sufficiente umidità totale sia autunno–invernale che primaverile. –

Gruppo *B*: semi formatisi in piante madri trattate con deficiente umidità (aridità) autunno-vernina e con sufficiente umidità primaverile. - Gruppo *C*: semi formatisi in piante madri trattate con aridità totale autunno–invernale e primaverile. - Gruppo *D*: semi formatisi in piante madri trattate con umidità autunno-vernina e con aridità primaverile.

Sperimentazione. – Questo materiale si impiegò come semente nel susseguente autunno 1926 con lo stesso metodo di semina in vaso, le stesse precauzioni ponderali e volumetriche per le cariossidi, col medesimo sistema di irrorazione qualitativo e quantitativo ed adoperando la stessa tettoia per la protezione dei vasi; allo scopo di seguire il comportamento vegetativo e di saggiare la capacità produttiva dei vari gruppi secondo il variare dell'andamento stagionale dell'umidità. Alla fine del ciclo di sviluppo fu eseguita contemporaneamente in tutti i saggi la falciatura in corrispondenza del colletto per ottenere la massima quantità di paglia cioè la massima parte somatica della pianta e fu tenuto conto in ciascun vaso del numero delle piante, del quantitativo in peso della granella e della paglia prodotta e del numero delle spighe emesse dalla pianta. In questa tabella compilata sinteticamente su tutte le medie appaiono i risultati riportati alla produzione media di quintale per ettaro e le cifre risultano esagerate in rapporto alla media produzione granaria locale perchè la cultura sperimentale in vaso riceve speciali cure ed attenzioni.

Dall'esame dello specchietto alle pp. 158–159 si ricava che tanto i semi del gruppo *A*, tanto quelli del gruppo *B*; cioè, tanto quelli che si sono formati nella pianta madre in condizioni di umidità assoluta di tutte le stagioni, tanto quelle che si sono formate in condizioni di umidità primaverile, hanno il medesimo comportamento produttivo nelle varie vicende idriche stagionali approntate dall'esperimento, e così anche l'identico comportamento dimostrano il gruppo *C* e quello *D*, il primo costituito da individui formatisi nella pianta madre in condizioni di assoluta aridità, ed il secondo in condizioni di aridità primaverile.

Si ricava sopratutto che i semi provenienti da piante madri trattate con umidità sufficiente e totale oppure con deficiente umidità autunno–invernale ma con sufficiente umidità primaverile, i *figli* insomma *dell'umidità* dànno sempre, qualunque sia l'andamento idrico dell'annata, una produzione meno alta dei semi *figli dell'aridità*, cioè, dei semi provenienti da piante madri trattate con insufficiente e totale umidità oppure con sufficiente umidità autunno-vernina, ma con deficiente umidità primaverile. Infatti mentre i primi dànno, secondo l'andamento stagionale, una media produttiva in granella di quintali 23.8 – 21.3 - 9.5 – 8.5 i secondi invece ne dànno rispettivamente una di 28.3 - 25.1 - 13.0 - 14.1. Mentre i semi figli dell'aridita dànno una produzione media di 26.7 quintali, in annata ad andamento umido, ed una produzione media di 13.6 in annata ad andamento primaverile arido, invece i semi figli dell'umidità riuscirebbero a dare 22.6

quintali nella buona annata e solo 9 nella cattiva. Una differenza quindi di più che quattro quintali e mezzo di maggior capacità produttiva per ettaro a favore dei semi che si sono formati in aridità.

Da che cosa dipende questa maggior capacità di produzione? O da un fenomeno di selezione naturale, spontaneo operato dalla siccità per cui vengono eliminati i meno resistenti alle condizioni xerofitiche o si tratta di una stimolazione dell'attività genetica dell'individuo grano operata dalla siccità nella fase più plastica e più sensibile della sua esistenza e quindi di un fenomeno di predeterminazione funzionale.

Lo studio dei dati raccolti inclina a fare accettare questa seconda ipotesi perchè dalla tabella si ricava che mentre il rapporto fra resa in granella e resa in paglia, tra germi, cioè, e soma nel caso della pianta proveniente dal seme foggiato dall'umidità è di 1 a 4.2, nel caso invece della pianta proveniente dai semi foggiati dall'aridità questo rapporto si riduce a 1 a 3.3 ciò starebbe per una più elevata capacità riproduttiva e quindi produttiva di questi semi. L'ipotesi è confortata anche dal fatto che tale maggiore capacità produttiva non si verifica solo in decorso stagionale arido, ma nel caso anche di andamento stagionale umido quando non sussisterebbero i bisogni di peculiari attitudini xerofitiche: infatti, nel primo caso la maggior capacità riproduttiva è di cinque quintali per ettaro, nel secondo è di poco inferiore, sostenendosi a quattro quintali per ettaro.

Inoltre il numero delle spighe di una pianta è anche indice della capacità riproduttiva, se non produttiva, di essa. Ora la media nei due casi mentre per la pianta proveniente da semi dell'umidità è di:

5.2 5.6 5.8 6.0 4.9 5.0 5.3 4.7

per l'altra è di:

6.7 6.4 6.9 7.1 6.9 7.0 6.6 5.9

dal che si ricava una media generale di 5.3 spighe per pianta nata da seme proveniente dall'umidità contro una media di 6.7 spighe per pianta nata da seme proveniente dall'aridità.

Data la grande importanza dell'argomento attualmente si stanno conducendo esperimenti culturali in proposito e si stanno raccogliendo per una lunga serie di anni i dati della produzione granaria media annuale delle regioni più aride d'Italia e di America con i corrispondenti dati pluviometrici stagionali allo scopo di verificare se il fatto dell'aridità: *stimulo genetico* sia anche confortato dalla statistica; perchè nel caso positivo a nessuno sfugge la grande importanza scientifica e pratica che avrebbe l'utilizzazione di questo fenomeno che darebbe all'agricoltura dei paesi aridi l'invidiato privilegio (destinando a funzione riproduttiva il prodotto di alcune peculiari annate siccitose) di diventare i facili approvvigionatori del grano « naturale » da semina e di domandare alla stessa aridità il più sicuro rimedio contro l'aridità.

Materiale da semina Semi procreati da piante madri trattate nel 1925-26 con umidità:	Media pro *Totalmente umida:* per acqua ricevuta da ciascun vaso: in Aut. 250 - Inv. 200 - Prim. 150 mm.			
	N. spighe per pianta (media)	Resa granella	Resa paglia	N. per (n
Sufficiente e totale.				
Gruppo *A*:				
Vasi N. 1, 2, 3, ...	5.2	24.2	101.4	
» » 4, 5, 6, ...	—	—	—	
» » 7, 8, 9, ...	—	—	—	
» » 10, 11, 12	—	—	—	
Deficiente autunno-vernina e sufficiente primaverile.				
Gruppo *B*:				
Vasi N. 13, 14, 15, ...	5.6	23.4	97.2	
» » 16, 17, 18, ...	—	—	—	
» » 19, 20, 21, ...	—	—	—	
» » 22, 23, 24	—	—	—	
Deficiente e totale.				
Gruppo *C*:				
Vasi N. 25, 26, 27, ...	6.7	28.7	94.6	
» » 28, 29, 30, ...	—	—	—	
» » 31, 32, 33, ...	—	—	—	
» » 34, 35, 36	—	—	—	
Sufficiente autunno-vernina e deficiente primaverile.				
Gruppo *D*:				
Vasi N. 37, 38, 39, ...	6.4	27.9	92.3	
» » 40, 41, 42, ...	—	—	—	
» » 43, 44, 45, ...	—	—	—	
» » 46, 47, 48	—	—	—	

O DELL'ANDAMENTO IDRICO DELL'ANNATA 1926-27

averile: ciascun vaso: m. 120 mm.		*Totalmente arida:* per acqua ricevuta da ciascun vaso: Aut. 120 - Inv. 70 - Prim. 40 mm.			*A sola aridità primaverile:* per acqua ricevuta da ciascun vaso: Aut. 250 - Inv. 210 - Prim. 40 cc.		
	Resa paglia	N. spighe per pianta (media)	Resa granella	Resa paglia	N. spighe per pianta (media)	Resa granella	Resa paglia
	—	—	—	—	—	—	—
	98.6	—	—	—	—	—	—
	—	4 9	8.7	34.6	—	—	—
	—	—	—	—	5.3	10.2	41.9
	—	—	—	—	—	—	—
	82.3	—	—	—	—	—	—
	—	5.0	10.4	49.2	—	—	—
	—	—	—	—	4.7	6 8	23.0
	—	—	—	—	—	—	—
	77.4	—	—	—	—	—	—
	—	6.9	14.5	42.1	—	—	—
	—	—	—	—	5.9	14.7	46.3
	—	—	—	—	—	—	—
	84.3	—	—	—	—	—	—
	—	7 —	11.5	38.0	—	—	—
	—	—	—	—	6.6	13.5	50.7

Biologia (Fisiologia vegetale). — *Sui gas contenuti in alcune alghe brune.* Nota di S. Colla, presentata dal Socio A. Herlitzka.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia (Ecologia). — *Il sovescio intercalare tempestivo in granicoltura.* Nota di G. Tallarico, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° febbraio 1931 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert, al teorema di Kutta–Joukowski e sulle azioni dinamiche sopra profili cuspidati.* Nota [1] del Corrisp. U. CISOTTI.

Leggo nel fascicolo 9, testè ricevuto, due Note riguardanti gli argomenti in titolo [2]. Esse mi danno occasione opportuna di mettere in rilievo qual'è il punto analitico fondamentale al quale si può far risalire in definitiva la cagione delle divergenze di risultati. Tutto si riduce in sostanza all'impiego della *formula del semiresiduo*:

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \pi i f(z_0),$$

l'integrale essendo esteso al contorno s di un'area piana limitata in cui $f(z)$ è regolare, indicando z_0 un punto di s [3].

Io, e coloro che mi hanno seguito, sia operando direttamente, sia per via indiretta, siamo giunti ai medesimi risultati che si ottengono sfruttando la formula suaccennata.

(1) Presentata nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) L. POGGI, *Estensione del paradosso di d'Alembert e del teorema di Kutta–Joukowski ai profili ad arco di cerchio*, p. 404; E. PISTOLESI, *Le azioni dinamiche di una corrente circolatoria su profili cuspidati*, p. 409.

(3) HURWITZ–COURANT, *Funktionentheorie*, III Auflage, Berlin, Springer, 1929, p. 335' formula (3); Cfr. anche: LÉVY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Paris, Gauthier–Villars, 1922, n. 51 e 52 a p. 66 e n. 14 a p. 172.

Quelli dell'altra sponda – e tra essi il Pistolesi – seguono delle vie che corrispondono in ultima analisi, o ad annullare il residuo, o a prenderlo completo, cioè il doppio del secondo membro della formula suscritta corrispondenti ai casi di z_0 esterno o interno a s: in ogni caso non applicano la formula in discorso.

Questo è il nodo delle divergenze nelle conclusioni.

A L. Poggi faccio rilevare che non è lecita la sua conclusione del quarto capoverso a p. 404 inquantochè (le parole virgolate sono dell'A.) nei casi in questione « il valore dell'integrale esteso a tutto il circuito » *non* « varia con continuità »; come invece asserisce l'A. [1].

Come già dissi [2], non io, ma il Bickley [3], fino dal 1918, fu il primo a trattare con calcolo diretto (e quindi senza preconcetti), ed equivalente del resto all'applicazione della formula del semiresiduo, il caso del profilo ad arco di cerchio, rilevando lui stesso il risultato contrario al paradosso di d'Alembert; e, sempre lui, mostra poi come si potrebbe ottenere la conferma del paradosso aggiungendo agli estremi dell'arco due opportune forze, aggiunta non suggerita da nessuna ragione meccanica, ma dettata unicamente dalla preoccupazione di *aggiustare* il paradosso.

Dunque anche in questo il Poggi è stato preceduto.

Per parte mia, applicando la formula del semiresiduo, non ho fatto altro che confermare i risultati del Bickley, dandone una più vasta interpretazione e aggiungendovi, ovvio complemento, l'eccezione del teorema di Kutta–Joukowski.

Quanto all'esempio di un profilo di Joukowski, presentato dal Pistolesi a p. 410, basta leggere la chiara ed esauriente trattazione dell'argomento nella Nota di Consiglio *Ancora una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, pubblicata in questi « Rendiconti » fino dal maggio dello scorso anno [4].

(1) Cfr. Cisotti e Finzi, *Osservazioni sulla Nota di P. Straneo:* « *Intorno al teorema di Kutta-Joukowski* ». Questi « Rendiconti », vol. VII (1° sem. 1928), p. 538 il n. 2 e la Nota (1) a p. 542; Cfr. anche Lévy, loc. cit.

(2) *Azioni dinamiche di correnti traslocircolatorie intorno ad una lastra arcuata.* Questi « Rendiconti », vol. XI (1° sem. 1930), p. 336.

(3) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc.* « Phil. Mag. », 1918, vol. XXXV, p. 396; vol. XXXVI, p. 273.

(4) Vol. XI (1° sem. 1930), pp. 813-818.

Matematica. — *Un teorema sulla derivazione delle serie.* Nota[1] del Corrisp. L. TONELLI.

Mi propongo di dimostrare il seguente teorema:

Sia, per ogni $n = 1, 2, 3, \cdots, f_n(x)$ *una funzione reale della variabile reale* x, *continua in tutto l'intervallo* (a, b), *ed avente, in ogni punto interno a tale intervallo, le derivate* $f_n'(x), f_n''(x), \cdots, f_n^{(k)}(x)$, *finite. Inoltre, le derivate* $f_n^{(k)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ *risultino, nell'interno di* (a, b), *tutte non decrescenti (oppure non crescenti). Allora, se la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

converge in almeno $k+2$ *punti distinti* $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+2}$ *di* (a, b):

a) *la serie* (1) *converge uniformemente in tutto* (x_1, x_{k+2});

b) *le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(r)}, \tag{2}$$

per ogni $r = 1, 2, 3, \cdots, k$, *convergono uniformemente in ogni intervallo* (a', b') *completamente interno ad* (x_1, x_{k+2}), $[x_1 < a' < b' < x_{k+2}]$;

c) *la somma* $F(x)$ *della serie* (1) *ammette, in ogni punto interno ad* (x_1, x_{k+2}), *le derivate* $F'(x), F''(x), \cdots, F^{(k)}(x)$, *finite, ed è*

$$F^{(r)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(r)}(x), \qquad r = 1, 2, 3, \cdots, k.$$

Da questa proposizione si ottiene, come caso particolare, un risultato recentemente stabilito da N. Obrechkoff[2], e cioè che «se valgono per le $f_n(x)$ le ipotesi sopra poste e se la serie (1) converge in $k+1$ punti distinti dell'intervallo $(a, a+\delta)$ e in $k+1$ altri punti dell'intervallo $(b-\delta_1, b)$, la serie $\Sigma f_n^{(k)}(x)$ converge uniformemente in $(a+\delta, b-\delta_1)$». Dalla stessa proposizione segue pure quanto ha provato A. Colucci nella sua Nota: *Un teorema sulle serie di funzioni*[3].

1. Premetterò un lemma.

(1) Presentata nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) *Sur les séries de fonctions*, «Comptes-Rendus», t. 191 (1930), pp. 373–375.

(3) «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 1930, pp. 278–280. Si vede anzi che le condizioni dell'enunciato dell'Obrechkoff sono sufficienti ad assicurare la validità di ciò che il Colucci ha dimostrato.

La funzione $g(x)$, *reale della variabile reale* x, *sia continua in tutto l'intervallo* (a, b), *ed in ogni punto interno a tale intervallo ammetta, finite, le derivate* $g'(x), g''(x), \cdots, g^{(k)}(x)$; *di più, la derivata* $g^{(k)}(x)$ *sia, nell'interno di* (a, b), *non decrescente (oppure non crescente). Se* $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+2}$ *sono* $k+2$ *punti distinti di* (a, b), *ed in essi la* $g(x)$ *non supera mai, in modulo, un numero positivo* M, *in tutto* (x_1, x_{k+2}) *risulta*

$$|g(x)| \leq \left(\frac{6}{\delta}\right)^k HM, \tag{3}$$

dove H *è un numero positivo (indipendente dalla* $g(x)$*) che dipende soltanto da* k *e dalla differenza* $x_{k+2} - x_1$, *e* δ *è la minore di quelle differenze* $x_{r+1} - x_r$ $(r = 1, 2, 3, \cdots, k+1)$ *per le quali è* $g(x_r) \neq g(x_{r+1})$, *intendendo che sia* $\delta = 6$ *se tale minima differenza non esiste oppure è* > 6.

Consideriamo due x_r consecutivi: x_r e x_{r+1}. Se è $x_{r+1} - x_r < \delta$, allora è pure $g(x_r) = g(x_{r+1})$, e quindi esiste, nell'interno di (x_r, x_{r+1}), almeno un punto in cui vale la $g'(x) = 0$; e noi indicheremo con x'_r precisamente uno (qualunque) di questi punti. Se è, invece, $x_{r+1} - x_r \geq \delta$, indichiamo con λ_r l'intervallo concentrico a (x_r, x_{r+1}) e di ampiezza $\lambda_r = (x_{r+1} - x_r) : 3$, intervallo che risulta $\geq \delta : 3$. Allora, se in λ_r non è sempre $|g'(x)| > 6M : \delta$, indicheremo con x'_r uno (qualunque) dei punti in cui è $|g'(x)| \leq 6M : \delta$. In caso contrario, la variazione della $g(x)$ in λ_r risulta maggiore di $6M\lambda_r : \delta \geq 2M$ e nell'interno di (x_r, x_{r+1}) vi è almeno o un massimo o un minimo, e cioè almeno un punto in cui è $g'(x) = 0$; e noi indicheremo con x'_r precisamente uno (qualunque) di questi punti. Dunque, in ogni caso, è sempre

$$|g'(x'_r)| \leq 6M : \delta;$$

e se le due differenze $x'_r - x_r$ e $x_{r+1} - x'_r$ non sono ambedue $\geq \delta : 3$, è $g'(x'_r) = 0$.

I punti x'_r, così fissati, sono $k+1$ ed è

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \cdots < x'_{k+1} < x_{k+2};$$

e se la distanza fra due x'_r consecutivi, x'_r e x'_{r+1} è $< \delta : 3$, risulta $g'(x'_r) = g'(x'_{r+1}) = 0$.

Ragionando su $g'(x)$ e sui punti $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{k+1}$ analogamente a quanto abbiamo fatto per $g(x)$ e $x_1, x_2, \cdots, x_{k+2}$, determineremo i punti $x''_1, x''_2, \cdots, x''_k$; e così proseguendo, arriveremo a determinare i punti $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \cdots, x_{k+2-s}^{(s)}$, per ogni s intero positivo $\leq k$, in modo che sia

$$x_1^{(s-1)} < x_1^{(s)} < x_2^{(s-1)} < x_2^{(s)} < \cdots < x_{k+2-s}^{(s)} < x_{k+3-s}^{(s-1)},$$

$$|g^{(s)}(x_r^{(s)})| \leq \left(\frac{6}{\delta}\right)^s 3^{s(s-1):2} M, \quad r = 1, 2, \cdots, k+2-s,$$

e che, quando la distanza fra $x_r^{(s)}$ e $x_{r+1}^{(s)}$ risulti $< \delta : 3^s$, si abbia $g^{(s)}\left(x_r^{(s)}\right) = g^{(s)}\left(x_{r-1}^{(s)}\right) = 0$.

Posto $\Delta = \left(\frac{6}{\delta}\right)^k \cdot 3^{k(k-1):2}$, se è $\delta \leq 6$, e $\Delta = 3^{k(k-1):2}$, in caso contrario, si ha sempre, per $s = 1, 2, \cdots, k$, $r = 1, 2, \cdots, k + 2 - s$,

$$|g^{(s)}\left(x_r^{(s)}\right)| \leq \Delta M . \tag{4}$$

Per $s = k$, abbiamo i punti $x_1^{(k)}$ e $x_2^{(k)}$, con

$$x_1^{(k-1)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k-1)} < x_2^{(k)} < x_3^{(k-1)} ;$$

e siccome la $g^{(k)}(x)$ è, per ipotesi, non decrescente, dalla (4) segue, in tutto l'intervallo $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$,

$$|g^{(k)}(x)| \leq \Delta M .$$

Inoltre, per il fatto di essere non decrescente, la $g^{(k)}(x)$ risulta continua in ogni intervallo interno a (x_1, x_{k+2}), e, per x interno a questo intervallo, è

$$g^{(k-1)}(x) = g^{(k-1)}(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} g^{(k)}(x)\, dx , \tag{5}$$

dove abbiamo posto, per semplicità di scrittura, $\bar{x} = x_2^{(k-1)}$.

Sia ξ_1 il maggiore degli x dell'intervallo $\left(\bar{x}, x_3^{(k-1)}\right)$ per i quali è $g^{(k)}(x) \leq \Delta M$. Posto $l = x_{k+2} - x_1$, abbiamo allora, tenendo conto della (4),

$$\int_{\bar{x}}^{x_3^{(k-1)}} g^{(k)}\, dx = \int_{x}^{\xi_1} \cdots + \int_{\xi_1}^{x_3^{(k-1)}} \cdots ,$$

$$\left| \int_{x}^{x_3^{(k-1)}} g^{(k)}\, dx \right| = |g^{(k-1)}\left(x_3^{(k-1)}\right) - g^{(k-1)}(\bar{x})| \leq 2\,\Delta M ,$$

onde

$$\int_{\xi_1}^{x_3^{(k-1)}} |g^{(k)}|\, dx = \left| \int_{\xi_1}^{x_3^{(k-1)}} g^{(k)}\, dx \right| \leq \Delta M (2 + l),$$

e perciò, per ogni x di $\left(\bar{x}, x_3^{(k-1)}\right)$,

$$\int_{x}^{x} |g^{(k)}|\, dx \leq \Delta M\, 2(1 + l) .$$

Dalla (5) segue dunque, nell'intervallo detto, ed anche in tutto $\left(x_1^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right)$,

$$|g^{(k-1)}(x)| \leq \Delta M (3 + 2l). \tag{6}$$

Abbiamo poi, per ogni x interno a (x_1, x_{k+2}),

$$g^{(k-2)}(x) = g^{(k-2)}(\bar{x}) + g^{(k-1)}(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{1!}\int_{\bar{x}}^{x} (x - t)\, g^{(k)}(t)\, dt . \tag{7}$$

Siccome $\bar{x}$ e $x_2^{(k-2)}$ sono interni a $\left(x_1^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right)$, risulta, da (6),

$$\left| g^{(k-2)}\left(x_2^{(k-2)}\right) - g^{(k-2)}(\bar{x}) \right| \leq \Delta M (3 + 2l)\, l,$$

onde, per (4),

$$|g^{(k-2)}(\bar{x})| \leq \Delta M (1 + 3l + 2l^2) . \tag{8}$$

Detto ξ_2 il maggiore degli x dell'intervallo $\left(\bar{x}, x_4^{(k-2)}\right)$ per i quali è $g^{(k)}(x) \leq \Delta M$, si ha

$$\int_{\bar{x}}^{x_4^{(k-2)}} \left(x_4^{(k-2)} - t\right) g^{(k)}(t)\, dt = \int_{\bar{x}}^{\xi_2} \cdots + \int_{\xi_2}^{x_4^{(k-2)}} \cdots .$$

Ora è per (7), e tenendo conto delle (4) e (8),

$$\left| \int_{\bar{x}}^{x_4^{(k-2)}} \left(x_4^{(k-2)} - t\right) g^{(k)}(t)\, dt \right| \leq \Delta M\, 2 (1 + l)^2$$

onde

$$\int_{\xi_2}^{x_4^{(k-2)}} \left| \left(x_4^{(k-2)} - t\right) g^{(k)}(t) \right| dt =$$

$$= \left| \int_{\xi_2}^{x_4^{(k-2)}} \left(x_4^{(k-2)} - t\right) g^{(k)}(t)\, dt \right| \leq \Delta M (2 + 4l + 3l^2),$$

e perciò, in tutto $\left(\bar{x}, x_4^{(k-2)}\right)$,

$$\int_{x}^{x} \left| \left(x_4^{(k-2)} - t\right) g^{(k)}(t) \right| dt \leq \Delta M (2 + 4l + 4l^2).$$

Dalla (7) segue dunque, nell'intervallo detto, ed anche in tutto $\left(x_1^{(k-2)}, x_4^{(k-2)}\right)$,

$$|g^{(k-2)}(x)| \leq \Delta M (3 + 8l + 6l^2).$$

Così proseguendo, si ha, in generale, che in tutto l'intervallo $\left(x_1^{(k-s)}, x_{s+2}^{(k-s)}\right)$, per $s = 0, 1, 2, \cdots, k$, è

$$|g^{(k-s)}(x)| \leq \Delta M P_s(x_{k+2} - x_1), \tag{9}$$

dove $P_s(\zeta)$ è un certo polinomio in ζ, a coefficienti numerici e positivi, di grado s. Per $s = k$ si ha la (3).

2. Utilizzando il lemma dimostrato, possiamo provare facilmente il teorema enunciato nell'introduzione.

Preso, infatti, un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, possiamo determinare un m_0 tale che, per ogni intero $m > m_0$, e per qualsiasi intero positivo p, sia

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} f_n(x_r) \right| < \varepsilon, \qquad r = 1, 2, \cdots, k+2.$$

Indicata con δ la minore delle differenze $x_{r+1} - x_r (r = 1, 2, \cdots, k+1)$, l'applicazione del lemma del n. 1 alla funzione

$$g(x) \equiv \sum_{n=m}^{m+p} f_n(x),$$

dà, in tutto (x_1, x_{k+2}),

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) \right| < \left\{ 1 + \left(\frac{6}{\delta}\right)^k \right\} H\varepsilon, \tag{10}$$

il che prova l'uniforme convergenza della serie (1) in tutto (x_1, x_{k+2}).

Se poi è $x_1 < a' < b' < x_{k+2}$, poniamo $x_1' = x_1$, $x_2' = a'$, $x_{k+1}' = b'$, $x_{k+2}' = x_{k+2}$, e indichiamo con $x_3', x_4', \cdots, x_k'$, $k-2$ punti qualsiasi interni ad (a', b'). Allora, dalle (9) e (10), deduciamo che è, in tutto (a', b'),

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} f_n'(x) \right| < R\varepsilon$$

con R costante, indipendente da ε, m e p; e ciò prova la convergenza uniforme della serie $\Sigma f_n'(x)$ in (a', b'), vale a dire in ogni intervallo completamente interno ad (x_1, x_{k+2}).

Analogamente, si ottiene la convergenza uniforme di tutte le serie (2) in ogni intervallo completamente interno a (x_1, x_{k+2}).

Infine, la proprietà c) segue immediatamente, in virtù di una nota proposizione sulla derivazione per serie, da quanto si è già provato.

3. *Osservazione.* – Se, ferme restando le altre ipotesi del teorema stabilito, la convergenza della serie (1) fosse assicurata soltanto in $k+1$ punti al più, le proprietà a), b), c) potrebbero non essere verificate. Ed invero, posto

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k+1}),$$

la derivata $f^{(k)}(x)$ (che è di 1° grado) è sempre crescente e la serie (1), quando, per ogni n, sia $f_n(x) \equiv f(x)$, converge nei punti $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$, ma diverge in ogni altro punto. Parimenti la serie $\Sigma f_n'(x)$ nel caso attuale converge in k punti e soltanto in essi. E così via.

Meccanica. — *Circolazione intorno a regioni di acqua morta limitate da una parete poligonale e da un pelo libero.* Nota del Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Suscettibilità magnetica, spettri d'assorbimento e costituzione dei nitrososolfuri del ferro* [1]. Nota [2] del Corrisp. L. Cambi e di L. Szegö.

Abbiamo esteso le ricerche già riferite [3], sulla suscettibilità magnetica dello xantogenato e del nitroso xantogenato ferrico, ai nitrososolfuri per le questioni tuttora dibattute su questi sali.

Ci siamo occupati, sopratutto, del tetrasale $KFeS(NO)_2$ e dell'eptasale $KFe_4S_3(NO)_7$. Studiammo anche i tetraeteri $(C_2H_5)_2S_2Fe_2(NO)_4$ e $(C_6H_5)_2S_2Fe_2(NO)_4$, che ci hanno fornito risultati analoghi al tetrasale potassico, ma su gli eteri riferiremo in seguito.

Inoltre, sottoponemmo alla misura anche il solfosale $KFeS_2$, considerato finora generalmente come ferrico.

Il metodo impiegato è lo stesso dei nostri precedenti lavori [4].

Le misure vennero compiute sui sali solidi. I risultati sono riportati nella tabella seguente:

Sostanza	$\chi^m \cdot 10$	$\chi^m_{Fe} \cdot 10$	Magnetoni Weiss osservati
$KFe_4S_3(NO)_7 \cdot H_2O$ . .	— 0.109	+ 5.9	0.6
$KFeS(NO)_2 \cdot 2H_2O$ . . .	— 0.201	+ 17.9	1.0
$KFeS_2$	+ 1.998	+ 370.1	4.63

Si deduce che entrambi i nitrososali presentano suscettibilità magnetica appena rilevabile, che il solfoferrito invece è sensibilmente paramagnetico.

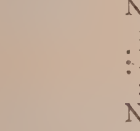
(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 18 gennaio 1931.

(3) Questi «Rendiconti», *13*, 6ª, p. 93.

(4) Cambi e Szegö, loc. cit.; Szegö e Ostinelli, «Gazz.», *60* (1930), 946.

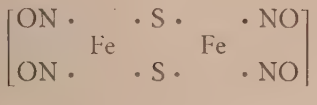
Abbiamo anzitutto confrontato i risultati delle misure predette con la struttura che W. Manchot [1] ha dedotta recentemente, con sue speculazioni dalla teoria di Sidgwick, per i tetrasali e i tetraeteri. Questo A. suppone come è noto il ferro quale monovalente e scrive:



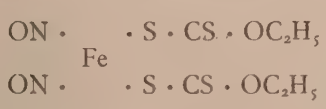
Cioè, i due gruppi NO ed il residuo del mercaptano apportano complessivamente *8* elettroni all'assetto dell'atomo di ferro ipoferroso (numero atomico eff. = 25). Risulta quindi il numero complessivo di *33* elettroni che corrisponde, in base alla curva di Cabrera e Weiss, ad uno stato paramagnetico con 19 magnetoni Weiss, in pieno disaccordo con la suscettibilità da noi determinata.

Per l'interpretazione dei nostri risultati abbiamo considerato un fatto da tempo bene assodato e trascurato dall'A. su citato: che i tetraeteri posseggono la formola dimera $R_2S_2Fe_2(NO)_4$.

A. Werner ha dato appunto ai tetrasali la struttura dimera [2], senza peraltro pronunciarsi sulla valenza del ferro e sulla funzione dei gruppi NO:



A tale struttura oggi ci riconduce anche il nitroso-xantogenato già da noi studiato:



La formola che discutiamo ci ha posto davanti ad un problema nuovo nel campo dei complessi, poichè finora non era stato considerato il comportamento magnetico di composti polinucleari analoghi.

Pervenimmo alla conclusione che la suscettibilità dovesse risultare dall'insieme della molecola, particolarmente in un caso come il nostro, in cui sono possibili compensazioni fra i due atomi di ferro, data la struttura sim-

(1) « Ann. », *470* (1929), 261.

(2) Werner e Pfeiffer, *Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie*, (1923) p. 291.

metrica, e gli aggruppamenti che possono trovarsi in stato di riduzione od ossidazione rispetto all'atomo centrale:

$$\diagdown\!\overset{III}{Fe}:\overset{I}{NO} \rightleftarrows \diagdown\!\overset{II}{Fe}:NO\ .$$

Non può nemmeno escludersi l'intervento di quelle valenze oscillanti (« pendelnder Valenzen ») che F. Ephraim ha discusso per le nitroso-cobalto–ammine [1].

In base a queste premesse, tenendo conto delle nostre osservazioni sui xantogenati, riconosciuto che anche per i tetrasali deve assumersi il numero di coordinazione *6*, siamo giunti alla struttura seguente:

$$\begin{array}{lccccc} & & & R & & \\ ON: & \overset{III}{Fe} & :S: & & \overset{II}{Fe} & :NO \\ ON: & & :S: & & & :NO\ . \\ & & & R & & \end{array}$$

Cioè, soltanto ammettendo un complesso ferroso–ferrico, con un gruppo NO di addizione (apporto di *3* elettroni) e tre a funzione alogenoidica (apporto di *2* elettroni), si perviene al numero complessivo di *72* elettroni per i due atomi di ferro – alla media di *36* per ciascuno di essi – condizione voluta per il comportamento diamagnetico in base alle attuali teorie sul magnetismo dei complessi.

Non vogliamo addentrarci ora nella discussione della struttura degli eptasali. È ovvio che, per gli stretti rapporti genetici delle due serie di nitrososolfuri, può ormai ammettersi l'aggruppamento costitutivo comune:

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & & \cdot S \cdot & & \cdot \\ & Fe & & Fe & \\ \cdot & & \cdot S \cdot & & \cdot \end{array}$$

È sempre possibile con formole diverse raggiungere per gli eptasali risultati analoghi al precedente. Dobbiamo osservare però a questo punto che le antiche strutture di Pavel, rinverdite con l'ipotesi del ferro monovalente, appaiono ora più che mai sempliciste ed insufficienti.

L'indagine della suscettibilità venne estesa per confronto al solfosale $KFeS_2$, per quanto questo appartenga ad una classe distinta dai nitrososolfuri, come l'attesta la stessa sua insolubilità in acqua e nei solventi vari.

Le misure portano a circa 10 magnetoni Weiss per ogni due atomi di ferro, il che corrisponderebbe ad un complesso polinucleare ferroro–ferrico, ad es.:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} S: & \overset{III}{Fe} & :S': & & \overset{II}{Fe} & :S_2: & \overset{II}{Fe} \\ & & :S': & & & & :S': \end{array}\right.\ \begin{array}{c} \overset{III}{Fe}:S \\ \\ \end{array}\ \left.\right] K_4\ .$$

(1) Ephraim, *Anorganische Chemie*. 4ª ed. 1929, p. 577.

Dovrebbe cioè introdursi per ogni quattro atomi di ferro un gruppo $-S_2-$ bivalente.

I solfosali polinucleari del ferro presenterebbero in generale il tipo forroso-ferrico. Ci riserviamo di ritornare su questo argomento.

Per le considerazioni da noi svolte per gli xantogenati del ferro [1] ed in diversi altri casi [2], abbiamo esteso all'ultravioletto le nostre precedenti indagini su gli spettri d'assorbimento dei nitrososolfuri nel campo del visibile.

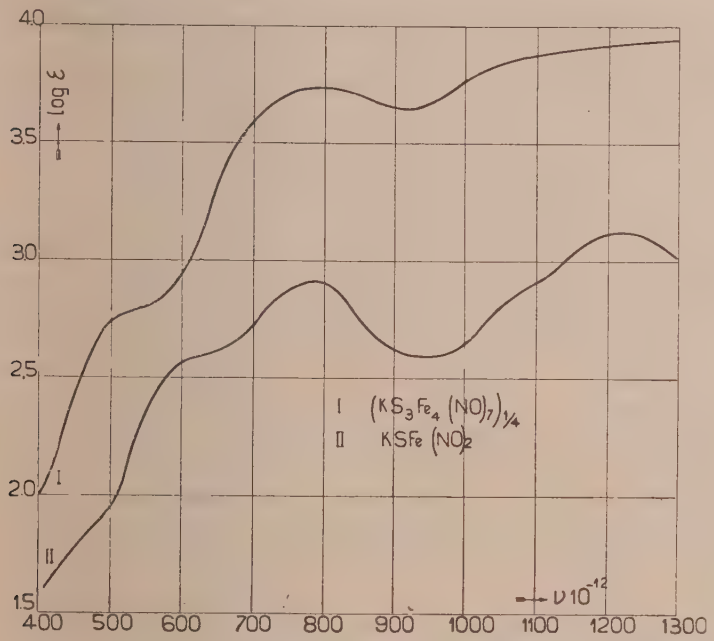


Fig. 2.

I diagrammi che riportiamo, nei quali mancano intense bande di assorbimento, indicano le strette analogie fra tetra- ed eptanitrososolfuri, in accordo con il loro identico comportamento magnetico.

Le nostre misure attuali pongono in ancor maggiore evidenza l'impossibilità di quelle deduzioni, sulla costituzione dei nitrososali del ferro, cui altri AA. credettero di poter pervenire dalla considerazione degli stessi spettri d'assorbimento.

A questo proposito aggiungiamo che ci ha sorpreso quanto recentemente ci ha attribuito W. Jander [3], dicendo che il confronto da noi isti-

(1) Cambi e Szegö, loc. cit.
(2) Cambi e Szegö, «Gazz.», *57* (1927), 536.
(3) Abegg, *Handbuch der anorganischen Chemie:* «*Eisen*». B. 115 (1930).

tuito, fra gli spettri dei nitrososolfuri, solfocianuro ferrico e sale ferrico del « cupferron », porta a deduzioni poco sicure sulla valenza del ferro, data la diversa natura dei sali predetti, e la poca concordanza della posizione dei *massimi di trasparenza*.

Noi abbiamo confrontato i sali predetti soltanto per mostrare l'impossibilità delle conclusioni di Manchot e Linkh [1], basate su osservazioni inesatte del comportamento ottico del $Fe(NO)SO_4$ e dei nitrososolfuri. Abbiamo bensì indicato la notevole vicinanza degli indici di estinzione dei diversi composti ferrici e dei nitrososali, ma nessun'altra deduzione abbiamo tratta, nè ci era lecito trarre.

È poi curioso che W. Jander confonda massimi di assorbimento con massimi di trasparenza, mentre noi abbiamo appunto dimostrato essere questi ultimi insignificanti per qualsiasi seria deduzione.

Concludendo, la suscettibilità magnetica dei tetranitrososolfuri corrisponde, in base alle odierne teorie sul magnetismo dei complessi, a composti ferroso-ferrici, aventi aggruppamenti (NO') a funzione alogenoidica; analoga costituzione può desumersi per gli eptasali; gli spettri d'assorbimento nel visibile e nell'ultravioletto delle due serie di sali sono in accordo con il loro identico comportamento magnetico.

Chimica. — *Su alcune proprietà della silice residuale dell'attacco della leucite con acidi.* Nota del Corrisp. G. A. Blanc.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Ber. », *59* (1926), 412.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Parallelismo negli spazi funzionali continui.* Nota di F. Conforto, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

§ 1. — Precedentemente [2] io mi sono occupato della geometria dello spazio funzionale, nel quale si era introdotto una metrica, mediante l'estensione dal caso di un numero finito al caso di un numero infinito di variabili, di una forma quadratica differenziale del tipo:

$$ds^2 = \int_0^1 \int_0^1 a\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\xi_1\,\xi_2\right]\delta q\,(\xi_1)\,\delta q\,(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\,.$$

Si era esteso in questa ipotesi allo spazio funzionale il concetto di parallelismo di Levi–Civita e si era visto come i coefficienti $a\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\xi_1\,\xi_2\right]$ della metrica determinassero completamente certe funzioni di linea, le quali erano legate alle funzioni $\Gamma\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right]$, che hanno il significato di coefficienti del parallelismo, attraverso a equazioni integrali non omogenee di Fredholm di prima specie. Non si poteva pertanto asserire che i coefficienti della metrica determinassero completamente i coefficienti del parallelismo, poichè non sempre un'equazione lineare di Fredholm di prima specie, ammette delle soluzioni.

Io mi propongo ora di dimostrare come si possa assegnare una forma tale dell'elemento lineare, che per essa i coefficienti del parallelismo siano sempre ed univocamente determinati e questo pur rispettando il carattere fondamentale di forma quadratica del ds^2.

Farò inoltre vedere come per il parallelismo di Levi–Civita generalizzato nello spazio funzionale valga ancora, in conseguenza della simmetria delle componenti, la proprietà che, dati due spostamenti $\delta_1 q\,(\sigma)$ e $\delta_2 q\,(\sigma)$, si arrivi allo stesso punto, ossia alla stessa funzione, sia spostando parallelamente a sè stesso $\delta_1 q\,(\sigma)$ lungo $\delta_2 q\,(\sigma)$ sia $\delta_2 q\,(\sigma)$ lungo $\delta_1 q\,(\sigma)$.

Infine io calcolo l'incremento subìto da un vettore, quando esso venga trasportato con la legge del parallelismo lungo un ciclo infinitesimo, giungendo ad una formula che si può riguardare come una estensione della for-

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) Vedi F. Conforto, *Metrica e fondamenti di Calcolo Differenziale Assoluto in uno spazio funzionale continuo.* « Rendiconti R. Accad. dei Lincei », vol. XII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 11, dicembre 1930.

mula di Pérès del Calcolo Differenziale Assoluto. Si viene così a mettere in evidenza una particolare funzione di linea a quattro parametri la quale non è altro che la generalizzazione del tensore di curvatura di Riemann, nel caso delle varietà ad un numero finito di dimensioni.

§ 2. — Introduciamo quindi una forma quadratica differenziale del tipo seguente:

$$(1) \qquad ds^2 = \int_0^1 [\delta q(\sigma)]^2 \, d\sigma + \int_0^1 \int_0^1 a\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_1 \, \xi_2\right] \delta q(\xi_1) \, \delta q(\xi_2) \, d\xi_1 \, d\xi_2 .$$

Il modulo di un vettore $\psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda\right]$, in corrispondenza ad una tale forma dell'elemento lineare, si definirà ovviamente, mediante la formula seguente:

$$M^2 = \int_0^1 \left\{\psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda\right]\right\}^2 a\lambda + \int_0^1 \int_0^1 a\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_1 \, \xi_2\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_1\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_2\right] d\xi_1 \, d\xi_2 .$$

Ponendo, come per l'altra forma del ds^2, uguale a:

$$\delta\psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda\right] = -\int_0^1 \int_0^1 \Gamma\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau\sigma\lambda\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau\right] \delta q(\sigma) \, d\tau \, d\sigma$$

l'incremento subìto dal vettore $\psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda\right]$ quando si passi dal punto $q(x)$ al punto $q(x) + \delta q(x)$ ed annullando allora la variazione subita dal modulo del vettore, viene, con facili calcoli:

$$\delta M^2 = 0 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 a'\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_1 \, \xi_2 \, \xi_3\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_1^*\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_2\right] \delta q(\xi_3) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau\right] \delta q(\sigma) \times$$

$$\times \left\{\Gamma\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau \, \sigma \, \lambda\right] + \int_0^1 \Gamma\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau \, \sigma \, \xi_2\right] a\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda \xi_2\right] d\xi_2 \right\} d\lambda \, d\tau \, d\sigma -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \lambda\right] \psi\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau\right] \delta q(\sigma) \times$$

$$\times \left\{\Gamma\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau \, \sigma \, \lambda\right] + \int_0^1 \Gamma\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \tau \, \sigma \, \xi_1\right] a\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right) \xi_1 \, \lambda\right] d\xi_1 \right\} d\lambda \, d\tau \, d\sigma .$$

Ponendo allora:

$$(2)\quad \begin{cases} \Gamma\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\lambda\right] + \int_{o}^{1} \Gamma\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\xi_{1}\right] a\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\,\lambda\right] d\xi_{1} = G\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\lambda\right], \\ \text{ossia} \\ \Gamma\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\lambda\right] + \int_{o}^{\text{I}} \Gamma\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\xi_{1}\right] a\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\lambda\,\xi_{1}\right] d\xi_{1} = G\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\lambda\right] \end{cases}$$

viene:

$$\int_{o}^{\text{I}}\int_{o}^{\text{I}}\int_{o}^{\text{I}} \left\{a'\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\,\xi_{2}\,\xi_{3}\right] - G\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{2}\,\xi_{3}\,\xi_{1}\right] - G\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\,\xi_{2}\,\xi_{3}\right]\right\} \times$$

$$\times\, \psi\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\right]\psi\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{2}\right]\delta q\left(\xi_{3}\right) d\xi_{1}\, d\xi_{2}\, d\xi_{3} = 0\,.$$

Ragionando allora come si è ragionato per l'elemento lineare dell'altra forma, tenendo cioè conto della arbitrarietà del vettore $\psi\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\lambda\right]$ e dello spostamento $\delta q\,(\sigma)$ e tenendo inoltre conto della simmetria delle componenti della metrica e del parallelismo, si vede come le funzioni $G\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\tau\,\sigma\,\lambda\right]$ sieno completamente determinate, data la metrica, mediante le formule:

$$G\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\,\xi_{2}\,\lambda\right] = \frac{\text{I}}{2}\left\{a'\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\,\lambda\,\xi_{2}\right] + a'\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{2}\,\lambda\,\xi_{1}\right] - a'\left[q\left(\overset{\text{I}}{x}_{o}\right)\xi_{1}\,\xi_{2}\,\lambda\right]\right\}.$$

In questo caso però, date le funzioni G contenenti tre parametri, le funzioni Γ si determinano attraverso le relazioni (2), le quali questa volta sono delle equazioni integrali lineari di Fredholm, ma di seconda specie e sotto larghissime condizioni si possono quindi determinare le funzioni Γ ed asserire che con la forma (1) dell'elemento lineare, i coefficienti del parallelismo sono sempre completamente determinati. Si può chiamare l'elemento lineare (1) « elemento lineare di seconda specie », mentre per analoghe ragioni si può chiamare « elemento lineare di prima specie » la forma dell'elemento lineare, adoperata precedentemente.

§ 3. – Sia con una forma dell'elemento lineare, che con l'altra forma, rimane la medesima la formula, che da l'incremento di un vettore per uno spostamento infinitesimo. Dimostriamo allora in generale, la proprietà che abbiamo enunziata, in principio. Sieno dati in un punto $q\,(x)$ due vettori

$\delta_1 q(x)$ e $\delta_2 q(x)$ infinitesimi. Spostando $\delta_1 q(x)$ parallelamente lungo $\delta_2 q(x)$ si arriva al punto:

$$q(x) + \delta_1 q(x) + \delta_2 [q(x) + \delta_1 q(x)] =$$

$$q(x) + \delta_1 q(x) + \delta_2 q(x) - \int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \xi_1 \xi_2 x] \delta_1 q(\xi_1) \delta_2 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 .$$

Spostando parallelamente $\delta_2 q(x)$ lungo $\delta_1 q(x)$ si arriva al punto:

$$q(x) + \delta_2 q(x) + \delta_1 q(x) - \int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \xi_1 \xi_2 x] \delta_2 q(\xi_1) \delta_1 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 .$$

Ma si ha, cambiando opportunamente le variabili di integrazione e per la simmetria delle componenti di parallelismo

$$\int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \xi_1 \xi_2 x] \delta_1 q(\xi_1) \delta_2 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \xi_1 \xi_2 x] \delta_2 q(\xi_1) \delta_1 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

e questo dimostra, quanto avevamo enunciato.

§ 4. - Noi veniamo ora all'ultima parte annunciata. Fissato un vettore $\psi[q(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \lambda]$ in un certo punto, calcoleremo il divario, che si ottiene, trasportando tale vettore parallelamente a sè stesso lungo un circuito infinitesimo. Siccome il ciclo è appunto infinitesimo, si potrà supporre che esso sia un parallelogrammo, giacchè la forma non può ovviamente portare conseguenze nel calcolo e d'altra parte abbiamo già visto, come si possa parlare di parallelogrammi infinitesimi.

Chiamiamo P il punto origine del ciclo e spicchiamo da esso i due vettori $\delta_1 q(x)$ e $\delta_2 q(x)$, che portino rispettivamente in P_1 e P_2. Q sia il quarto punto del parallelogrammo. Se $\psi(\lambda)$ è il vettore in P, esso sarà dopo il trasporto parallelo $\psi(\lambda) + \delta_1 \psi(\lambda)$ in P_1, essendo $\delta_1 \psi(\lambda)$ dato dalla solita formula. Il vettore così ottenuto si deve ora per parallelismo trasportare in Q. In Q avremo allora il vettore:

$$\psi(\lambda) + \delta_1 \psi(\lambda) + \delta_2 \psi(\lambda) + \delta_2 \delta_1 \psi(\lambda) .$$

L'incremento subito dal vettore sarà

$$\Delta_1 \psi(\lambda) = \delta_1 \psi(\lambda) + \delta_2 \psi(\lambda) + \delta_2 \delta_1 \psi(\lambda) . \tag{3}$$

Trasportando analogamente il vettore parallelamente a sè stesso lungo i tratti PP_2 e P_2Q esso subirà un incremento dato da:

$$(4) \qquad \Delta_2 \psi(\lambda) = \delta_2 \psi(\lambda) + \delta_1 \psi(\lambda) + \delta_1 \delta_2 \psi(\lambda).$$

Ciò posto si vede subito come l'incremento totale subito dal vettore ψ, a meno di quantità del secondo ordine rispetto a $\delta_1 q(\lambda)$ e a $\delta_2 q(\lambda)$ sia dato da:

$$(5) \qquad \Delta \psi(\lambda) = \Delta_1 \psi(\lambda) - \Delta_2 \psi(\lambda) = \delta_2 \delta_1 \psi(\lambda) - \delta_1 \delta_2 \psi(\lambda).$$

Basterà quindi esplicitare questa relazione. Ora si ha:

$$(6) \quad \delta_2 [\delta_1 \psi(\lambda)] = -\delta_2 \left[\int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda] \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_1 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] =$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Gamma' [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda \tau] \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_1 q(\xi_2) \delta_2 q(\tau) d\xi_1 d\xi_2 d\tau -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda] \delta_2 \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_1 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda] \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_2 \delta_1 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

che con qualche cambiamento di variabili e tenuto conto dell'espressione di $\delta_1 \psi(\lambda)$ e $\delta_2 \psi(\lambda)$ si può portare alla forma:

$$(7) \qquad \delta_2 \delta_1 \psi(\lambda) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_1 q(\xi_2) \delta_2 q(\tau) \times$$

$$\times \left\{ - \Gamma' [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda \tau] + \int_0^1 \Gamma [q(\overset{t}{x}_0) \mu \xi_2 \lambda] \Gamma [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \tau \mu] d\mu \right\} \times$$

$$\times d\xi_1 d\xi_2 d\tau - \int_0^1 \int_0^1 \Gamma [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda] \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_2 \delta_1 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 .$$

Per costruire $\delta_1 \delta_2 \psi(\lambda)$ basta nella (7) scambiare δ_1 e δ_2. Costruendo allora la (5) verrà:

$$(8) \quad \Delta \psi(\lambda) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 H [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \lambda \xi_3] \psi [q(\overset{t}{x}_0) \xi_1] \delta_1 q(\xi_3) \delta_2 q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

ove si è posto [1]

$$(9)\qquad H[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_1\,\xi_2\,\lambda\,\tau] = \Gamma'[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_1\,\xi_2\,\lambda\,\tau] - \Gamma'[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_1\,\tau\,\lambda\,\xi_2] +$$

$$+\int_0^1 \Gamma[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\mu\,\tau\,\lambda]\,\Gamma[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_1\,\xi_2\,\mu]\,d\mu - \int_0^1 \Gamma[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\mu\,\xi_2\,\lambda]\,\Gamma[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_1\,\tau\,\mu]\,d\mu\,.$$

La (8) con qualche cambiamento di variabili nell'integrale e introducendo i moduli $\delta_1 s$ e $\delta_2 s$ (supposti diversi da zero) dei vettori $\delta_1 q(x)$ e $\delta_2 q(x)$ e definendo come area ΔS del parallelogramma la quantità $\delta_1 s\,\delta_2 s \sin\alpha$ (α essendo l'angolo formato dai vettori $\delta_1 q(x)$ e $\delta_2 q(x)$) si può scrivere:

$$(10)\qquad \frac{\Delta\psi(\lambda)}{\Delta S} = \frac{1}{\sin\alpha}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 H[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_3\,\xi_2\,\lambda\,\xi_1]\,\psi[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi_3] \times$$

$$\times \frac{\delta_1 q(\xi_1)}{\delta_1 s}\,\frac{\delta_2 q(\xi_2)}{\delta_2 s}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,.$$

Si riconosce nella (10) l'estensione [2] della formula di Pérès del Calcolo Assoluto.

(1) Si noti che la funzione definita da (9) è l'estensione del tensore di curvatura di Riemann e precisamente al parametro λ corrisponde l'indice di controvarianza. Non abbiamo posto il parametro λ all'ultimo posto, per riservare tale posto al parametro che risulta dalla derivazione nelle Γ'.

(2) Cfr. Levi-Civita, *Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluto*, Roma, 1925, p. 219.

Matematica. — *Proprietà di alcune connessioni lineari.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Esponiamo alcune relazioni riguardanti certe connessioni lineari, che, pur non escludendo che possano essere già note, non c'è riuscito di veder mai menzionate.

Data una varietà X_n, rappresentiamo, nella maniera abituale, con $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$ i parametri che definiscono la connessione, con $C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, $S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, $S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$, $Q'_{\alpha\beta\gamma}$ gli elementi che la caratterizzano:

$$C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} + \Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha} = A^{\gamma}_{\beta/\alpha}$$

$$S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}\right)$$

$$S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha}\right)$$

$$Q_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} = g^{\beta\gamma}_{/\alpha}$$

$$Q'_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma/\alpha};$$

e con $\left(A^{\gamma}_{\beta}\right)$ l'affinore unità.

I tensori $(g_{\alpha\beta})$ e $(g^{\alpha\beta})$ sono simmetrici, di caratteristica (rango) n e soddisfano alla condizione

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = A^{\gamma}_{\alpha}.$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, $Q_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$ si riferiscono alla connessione controvariante; $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$, $Q'_{\alpha\beta\gamma}$ alla connessione covariante.

Rappresentiamo anche con $\left(R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}\right)$ e $\left(R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\right)$ i tensori di curvatura, rispettivamente controvariante e covariante e adottiamo per i tensori contratti le seguenti notazioni:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = R_{\beta\gamma} \quad ; \quad R'^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\alpha\beta\gamma} = R'_{\beta\gamma};$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = V_{\alpha\beta} \quad ; \quad R'^{\cdot\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\gamma} = V'_{\alpha\beta};$$

$$R_{[\alpha\beta]} = F_{\alpha\beta} \quad ; \quad R'_{[\alpha\beta]} = F'_{\alpha\beta} \ [2].$$

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) Sono le notazioni del prof. SCHOUTEN, nel suo trattato: *Der Ricci-Kalkül*, mutando $\Gamma'^{\nu}_{\alpha\beta}$ in $-\Gamma'^{\nu}_{\alpha\beta}$; inoltre non rispettiamo la distinzione fra affinore e tensore, usando sempre quest'ultima denominazione.

1. Supponiamo che i tensori alternanti $(S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma})$ e $(S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta})$ siano tutti e due nulli: $S = 0$, $S' = 0$. Siccome

$$C_{[\alpha\beta]}^{\cdot\cdot\gamma} = S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\gamma} + S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\beta\alpha}$$

il tensore $(C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma})$ sarà *simmetrico* rispetto ai due indici α e β.

La connessione sarà, in questo caso, *covariante simmetrica* e *controvariante simmetrica*, sulla nomenclatura di Schouten. Dimostriamo che *la connessione non può allora essere invariante per incidenza senza che lo sia, al tempo stesso per contrazione.*

Infatti, essendo invariante per incidenza [1] la connessione in cui $C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = C_\alpha A_\beta^\gamma$ (dove C_α è un vettore covariante qualunque), se è $S = S' = 0$ e perciò $C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ simmetrico rispetto ad α e β, sarà

$$C_\alpha A_\beta^\gamma = C_\beta A_\alpha^\gamma .$$

Facendo $\gamma = \alpha$ e sommando si ha

$$C_\beta = n C_\beta$$

cioè $C_\beta = 0$. Quindi la connessione è invariante per contrazione [2]. E siccome è $C = 0$, $S' = 0$, la connessione è *affine*. Ne segue che *ogni connessione lineare che è, al tempo stesso, invariante per incidenza, covariante simmetrica e controvariante simmetrica è una connessione affine.*

Perchè il tensore $(C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma})$ sia simmetrico in α e β, basta però che sia $S = -S'$, quindi *ogni connessione lineare in cui il tensore* $(C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma})$ *è simmetrico rispetto agli indici* α *e* β *è invariante per contrazione, se è invariante per incidenza.*

2. Supponiamo che la connessione sia invariante per incidenza, covariante simmetrica e conforme:

$$C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = C_\alpha A_\beta^\gamma \quad ; \quad S' = 0 \quad ; \quad Q'_{\alpha\beta\gamma} = Q'_\alpha g_{\beta\gamma}$$

(dove Q'_α è un vettore covariante qualunque).

In questo caso Schouten [3] ha dedotto la relazione seguente tra i due tensori di curvatura:

$$(1) \qquad R_{\rho\beta\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = R'^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\rho\beta\lambda} + 2 C_{[\rho/\beta]} A_\lambda^\alpha .$$

(1) Con ciò si vuol dire che, di fronte al trasporto ha carattere di invarianza l'incidenza di un vettore controvariante e di un vettore covariante, cioè ogni relazione del tipo $v^r w_r = 0$.

(2) « Invariante per contrazione » è la traduzione di « überschiebungsinvariant » secondo Schouten e sta a significare che si tratta di trasporti che conservano non soltanto le relazioni di incidenza $v^r w_r = 0$, ma addirittura i prodotti scalari $v_r w^r$.

(3) *Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung*, « Math. Zeitschrift. », Bd. 13, 1922.

Facendo $\lambda = \alpha$ e sommando in α, si ha la relazione che è anch'essa di Schouten:

$$V_{\rho\beta} = V'_{\rho\beta} + 2uC_{[\rho/\beta]}. \tag{2}$$

Possiamo anche fare $\alpha = p$ e sommare in α. Si ottiene

$$R_{\beta\lambda} = R'_{\beta\lambda} + 2\,C_{[\lambda/\beta]} \tag{3}$$

e quindi

$$V_{\rho\beta} - V'_{\rho\beta} = n\left(R_{\beta\rho} - R'_{\beta\rho}\right), \tag{4}$$

o, essendo $V_{\rho\beta}$ alternante,

$$V'_{\beta\rho} - V_{\beta\rho} = n\left(R_{\beta\rho} - R'_{\beta\rho}\right), \tag{4'}$$

a) Se è $Q'_\alpha = 0$ (connessione metrica) il tensore $\left(R'^{\cdots\alpha}_{\rho\beta\lambda}\right)$ di curvatura covariante è il tensore di Riemann–Christoffel, come si verifica facilmente; cioè

$$R'^{\cdots\alpha}_{\rho\beta\lambda} = K^{\cdots\alpha}_{\rho\beta\lambda} = \{\lambda\alpha\,,\,\rho\beta\}.$$

In tal caso, $R'_{\beta\lambda} = K_{\beta\lambda}$ e $R'_{[\beta\lambda]} = K_{[\beta\lambda]} = 0$, pel fatto che $K_{\beta\lambda}$ è simmetrico.

Quindi dalla (3) risulta

$$R_{[\beta\lambda]} = 2\,C_{[\lambda/\beta]}. \tag{5}$$

Questa formola valida pel caso

$$C^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = C_\alpha\,A^\gamma_\beta \quad , \quad S' = 0 \quad , \quad Q' = 0\,,$$

come s'è visto, rassomiglia alla formola di Eddington

$$R_{[\beta\lambda]} = R'_{[\beta\lambda]} = {}_{[\beta/}T^{\cdot\cdot\alpha}_{\lambda]\alpha} \tag{5'}$$

valida per la connessione affine ($C = 0$, $S' = 0$, Q' qualunque) dove

$$T^{\cdot\cdot\beta}_{\lambda\alpha} = \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \left\{\begin{matrix}\lambda & \alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}.$$

Difatti, nel caso nostro,

$$-\left\{\begin{matrix}\lambda & \alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \Gamma'^{\beta}_{\lambda\alpha}$$

e perciò

$$T^{\cdot\cdot\beta}_{\lambda\alpha} = C^{\cdot\cdot\beta}_{\alpha\lambda} = C_\alpha\,A^\beta_\lambda$$

onde

$$T^{\cdot\cdot\alpha}_{\lambda\alpha} = C_\lambda$$

e

$$T^{\cdot\cdot\alpha}_{[\beta/\lambda]\alpha} = C_{[\lambda/\beta]}\,.$$

Soltanto ora $R'_{[\beta\lambda]} = 0$ è differente da $R_{[\beta\lambda]}$, in generale.

Se (C_λ) è un vettore gradiente, sarà $C_{[\lambda/\beta]} = 0$, perchè la connessione è covariante simmetrica; allora $R_{[\beta\lambda]} = 0$. Ma in questo caso un mutamento della misura covariante trasforma la connessione in questione in una connessione di Riemann, e perciò affine.

b) Ancora nel nostro caso $\left(C^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = C_\alpha\, A^\gamma_\beta \;;\; S' = 0 \;,\; Q' = 0\right)$, visto che è $R'^{\cdot\cdot\cdot\cdot\alpha}_{[\rho\beta\lambda]} = 0$, sarà

$$V'_{\rho\beta} = -\,2\,R'_{[\rho\beta]} = 0$$

che dimostra essere la connessione covariante equiaffine (*inhaltstreu*). Da (4) poi risulta, per essere $V_{\rho\beta}$ alternante,

$$V_{\rho\beta} = nR_{[\beta\rho]} = 2\,nC_{[\rho/\beta]} \tag{6}$$

che è anche una conseguenza immediata della formola (2) di Schouten.

Se (C_ρ) è un vettore gradiente, sarà $V_{\rho\beta} = 0$ e la connessione sarà controvariante equiaffine. Del resto si sa che, in qualunque connessione invariante per incidenza, la condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia simultaneamente covariante e controvariante equiaffine è che il vettore (C_ρ) sia un gradiente.

3. Supponiamo ora che la connessione sia *invariante per incidenza* e *covariante emisimmetrica*:

$$C^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = C_\alpha\, A^\gamma_\beta \quad ; \quad S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = S'_{[\beta}\, A^\gamma_{\alpha]}\,,$$

essendo (C_α) e $\left(S'_\alpha\right)$ due vettori covarianti qualunque.

In tal caso, la connessione è anche *controvariante emisimmetrica*. Infatti, essendo

$$S^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = C^{\cdot\cdot\gamma}_{[\beta\alpha]} - S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = C_{[\beta}\, A^\gamma_{\alpha]} - S'_{[\beta}\, A^\gamma_{\alpha]}\,,$$

se facciamo $S_\beta = C_\beta - S'_\beta$, si avrà

$$S^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = S_{[\beta}\, A^\gamma_{\alpha]}\,.$$

Dalla formola generale [1]

$$R'^{\cdot\cdot\cdot\lambda}_{\gamma\beta\alpha} = R^{\cdot\cdot\cdot\lambda}_{\gamma\beta\alpha} + 2\,S'^{\cdot\cdot k}_{\gamma\beta}\, C^{\cdot\cdot\lambda}_{k\alpha} + C^{\cdot\cdot\lambda}_{\beta\alpha/\gamma} - C^{\cdot\cdot\lambda}_{\gamma\alpha/\beta}$$

(1) V. Schouten, *Der Ricci-Kalkül*, Springer, 1924, p. 88 (III).

è facile dedurre, in questo caso, la relazione

$$(7) \qquad R'^{\cdots\lambda}_{\gamma\beta\alpha} = R^{\cdots\lambda}_{\gamma\beta\alpha} + 2\left[C_{[\gamma}\, S'_{\beta]} + C_{[\beta/\gamma]}\right] A^{\lambda}_{\alpha}$$

tra i due tensori della curvatura. *Se è* (C_γ) *un vettore gradiente,*

$$C_{[\beta/\gamma]} = -\, C_{[\gamma}\, S'_{\beta]}$$

in tutta la connessione covariante emisimmetrica; quindi

$$R'^{\cdots\lambda}_{\gamma\beta\alpha} = R^{\cdots\lambda}_{\gamma\beta\alpha}.$$

I due tensori di curvatura sono eguali.

Una variazione della misura covariante trasforma la connessione data in una connessione affine, se $(S_\beta) = 0$.

Ancora nel nostro caso si ottiene

$$(8) \qquad R'_{\beta\alpha} = R_{\beta\alpha} + 2\left[C_{[\alpha}\, S'_{\beta]} + C_{[\beta/\alpha]}\right];$$

$$(9) \qquad V'_{\gamma\beta} = V_{\gamma\beta} + 2n\left[C_{[\gamma}\, S'_{\beta]} + C_{[\beta/\gamma]}\right];$$

$$(4') \qquad V'_{\beta\alpha} - V_{\beta\alpha} = n\left(R_{\beta\alpha} - R'_{\beta\alpha}\right).$$

Matematica (Geometria). — *Sui sistemi nulli osculatori alle asintotiche di una data superficie.* Nota di R. Calapso, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

In questa Nota l'autore dimostra, per via sintetica, i due seguenti teoremi:

I. Il complesso lineare osculatore ad una asintotica contiene tutto un sistema di generatrici della quadrica di Lie.

II. Il prodotto del sistema nullo osculatore ad un'asintotica per la polarità di Lie è una collineazione biassiale armonica, della quale gli assi sono: la tangente all'asintotica e la generatrice della quadrica di Lie che appoggia all'altra tangente asintotica ed alla prima direttrice di Wilczynski.

1. – Sulla data superficie S consideriamo un'asintotica L e su questa un punto A_1. Siano $A_2, A_3, \cdots$, punti consecutivi di A_1 su L ed introduciamo le rette $g_1 \equiv A_1 A_2$, $g_2 \equiv A_2 A_3, \cdots$, ed i piani $\omega_1 \equiv g_1 g_2$, $\omega_2 \equiv g_2 g_3, \cdots$; è chiaro che le quattro coppie

$$(A_1, \omega_1) \quad ; \quad (A_2, \omega_2) \quad ; \quad (A_3, \omega_3) \quad ; \quad (A_4, \omega_4)$$

si corrispondono nel sistema nullo osculatore in A_1 alla linea L.

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

2. - Per i punti A_1, A_2, A_3 conduciamo le tangenti t_1, t_2, t_3 alle asintotiche dell'altro sistema passanti per questi punti; la quadrica individuata da queste tre rette è (per definizione) la quadrica di Lie relativa al punto A_1 della superficie.

Poichè la linea L è asintotica di S, il piano ω_1 è tangente alla superficie e quindi contiene la retta t_1; ma allora questa retta appartiene ad un punto e ad un piano che si corrispondono nel sistema nullo anzidetto, epperò appartiene al complesso lineare osculatore all'asintotica L in A_1. Lo stesso avviene per t_2, t_3.

Si vede così che *il detto complesso lineare osculatore contiene tre generatrici (di uno stesso sistema) della quadrica di Lie, epperò contiene tutte le generatrici di questa quadrica appartenenti al detto sistema (cioè quelle che incontrano la tangente g_1 all'asintotica).*

Similmente, considerando per il punto A_1 l'altra asintotica L' si ha: *Il complesso lineare osculatore in A_1 alla linea L' contiene tutte le generatrici della quadrica di Lie che incontrano la tangente t_1 all'asintotica L'.*

3. - D'altra parte, il regolo formato dalle generatrici della quadrica appoggiantisi a t_1 ed il complesso osculatore ad L in A_1 hanno due rette comuni: una di queste è g_1; sia h l'altra. Allo stesso modo, il regolo delle generatrici della quadrica appoggiantisi a g_1 ed il complesso osculatore ad L' in A_1 hanno due rette comuni: una di queste è t_1; sia k l'altra.

Le rette h e k sono pertanto generatrici della quadrica di sistema diverso e quindi s'incontrano in un punto M; ma esse sono rette comuni ai due complessi epperò: *la retta A_1M è la prima direttrice.*

4. - Componendo il sistema nullo osculatore alla linea L con la polarità rispetto alla quadrica di Lie, si ottiene una collineazione; un punto della retta g_1 ha per piano corrispondente, nel sistema nullo, il piano per g_1 contenente l'altra generatrice della quadrica passante per il punto; lo stesso punto e lo stesso piano si corrispondono nella polarità di Lie dunque: *i punti della retta g_1 sono uniti della detta collineazione.*

Similmente, sia H un punto della generatrice h; il piano tangente in H alla quadrica di Lie taglia questa secondo due rette: una di queste è h; l'altra appoggia a g_1 e come tale appartiene al complesso. Risulta da ciò che il punto H ed il detto piano tangente si corrispondono anche nel sistema nullo, epperò *i punti della retta h sono uniti della collineazione.*

D'altra parte, in questa collineazione due punti corrispondenti sono *coniugati* rispetto alla quadrica di Lie e la loro congiungente si appoggia alle due rette g_1 ed h; ora, poichè g_1 ed h sono della quadrica, i punti corrispondenti nella collineazione e i punti di appoggio ad esse *formano gruppo armonico.*

Dunque: *Componendo il sistema nullo osculatore ad un'asintotica con la polarità di Lie si ottiene una collineazione biassiale armonica della quale gli assi*

sono: la tangente all'asintotica e la generatrice della quadrica di Lie che appoggia all'altra tangente asintotica ed alla direttrice di Wilczynski.

Osservazione. - Il complesso lineare osculatore ad L, oltre a contenere come abbiamo visto il sistema delle generatrici della quadrica di Lie che si appoggiano alla g_1, contiene due generatrici dell'altro sistema. Questo secondo regolo infatti è trasformato proiettivamente in se stesso dal sistema nullo osculatore ad L e la proiettività subordinata ammette due rette unite. Queste sono proprio, come è facile vedere, gli assi della suddetta omografia biassiale armonica.

I risultati sopra esposti saranno da me sviluppati analiticamente in lavori di prossima pubblicazione.

Matematica. — *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche.* Nota di R. Caccioppoli, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Un teorema sullo spigolo di Green.* Nota di R. Calapso, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac.* Nota di N. Théodoresco, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul comportamento delle forze di reazione nel moto di un qualsivoglia sistema materiale sollecitato da forze posizionali.* Nota di E. Gugino, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Le formule di Biot–Mollweide e di Pinto in confronto coi valori degli elementi magnetici della Somalia.* Nota di D. Di Filippo, presentata [1] dal Socio L. Palazzo.

Le formule di Biot-Mollweide e di Pinto. – Per spiegare l'azione magnetica della Terra il Biot (1804), riprendendo un'idea di Eulero, immaginò poste presso al centro della Terra e simmetricamente rispetto ad esso, due masse magnetiche, dei due opposti segni, a piccola distanza l'una dall'altra in maniera da formare un magnete di minima lunghezza ma potentissimo. Questa ipotesi *da lavoro* servì a Biot per dedurre alcune relazioni tra la latitudine magnetica Φ, l'inclinazione magnetica I e la forza totale magnetica F in un punto della superficie della Terra.

Il Biot pervenne a formule alquanto complicate, che poi verificò con i dati magnetici raccolti da Humboldt nei suoi viaggi dell'America centrale [2].

Poco più tardi il Mollweide (1808), mantenendo il medesimo *modello* del magnete centrale di Biot, pervenne alle seguenti formule molto più semplici [3]:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \Phi \qquad\qquad (2) \qquad F = F_e \sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \Phi}$$

dove F_e indica la forza totale all'equatore magnetico, definito come il luogo dei punti della superficie della Terra in cui l'inclinazione è nulla. Siccome dalle formule di Biot si perviene con facili trasformazioni trigonometriche a queste estremamente semplici del Mollweide, il prof. Palazzo, in una sua Memoria [4], ha convenuto giustamente di chiamarle formule di Biot–Mollweide.

Il Pinto, seguendo ancora la medesima ipotesi del Biot, volle spingere più a fondo la trattazione, cercando di ottenere formule più esatte, e anzichè considerare, come il Biot ed il Mollweide, l'azione del magnete centrale su di un polo unitario, considerò l'azione su entrambi i poli del

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) Humboldt e Biot, *Sur les variations du magnètisme terrestre à differentes latitudes.* « Journal de Physique », t. LIX, Paris 1804.

(3) Mollweide, *Theorie der Abweichung und Neigung der Magnetnadel.* « Gilberts–Annalen », vol. XXIX, Halle 1808.

(4) Palazzo Luigi, *Misure magnetiche in Eritrea.* « Annali R. Uff. Centr. Meteor. e Geodin. », serie 2ª, vol. XXXV, parte 1ª, Roma 1913, a p. 82.

magnete dell'apparato di misura di I e F posto sulla superficie terrestre, e giunse alle seguenti relazioni [1]:

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \Phi \qquad (3) \quad F = F_e \sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \Phi + \frac{\operatorname{sen}^2 \Phi \cos^2 \Phi}{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \Phi}}$$

la prima delle quali è ancora quella stessa di Biot–Mollweide, mentre la seconda differisce dalla (2) per l'aggiunta del termine correttivo sotto il radicale,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \Phi \cos^2 \Phi}{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \Phi}.$$

Confronto delle formole con i valori degli elementi magnetici in Somalia. – Il prof. Palazzo mi aveva proposto di saggiare la validità, o meno, delle formule di Biot-Mollweide e di Pinto, applicando alle formule i valori degli elementi magnetici I e F da lui determinati nella Somalia Italiana, in una esplorazione magnetica compiuta nel 1° trimestre 1926: valori che, ricondotti con piccoli ritocchi al 1° gennaio dello stesso anno, figurano in una tabella a pag. 52 della relativa Memoria [2].

Accingendomi a tale verifica, ho tenuto presente che gli archi di cerchi massimi su cui si contano rispettivamente la latitudine *geografica* φ e la latitudine *magnetica* Φ della stazione di misure presa in considerazione, fanno fra di loro l'angolo di declinazione D, cosicchè se Ψ denota la latitudine geografica del punto d'intersezione fra l'equatore magnetico ed il meridiano geografico passante per la stazione, esiste la relazione:

$$\operatorname{tg} (\varphi - \Psi) = \operatorname{tg} \Phi \cos D .$$

A tutto rigore dunque, pel calcolo di Φ, si dovrebbe tener conto della declinazione magnetica D, variabile da stazione a stazione, ma nel caso nostro, cioè nella zona della Somalia, ci troviamo nella favorevole circostanza che D è ovunque così piccolo, oggidì, da poter assumere, con esuberante approssimazione, $\cos D = 1$, e pertanto la relazione testè scritta si riduce a questa più semplice:

$$(4) \qquad \varphi - \Psi = \Phi .$$

Essendo φ il dato di latitudine che ci è noto per ciascuna stazione, al fine di ricavare i Φ, non resta che conoscere i Ψ corrispondenti. Questi

(1) Pinto Luigi, *Sull'azione reciproca fra due elementi magnetici e sul modo con cui dovrebbero variare la latitudine, la inclinazione e la intensità magnetica terrestre.* « Atti e Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », 1892-1893.

(2) Palazzo Luigi, *Misure magnetiche in Oltregiuba e Somalia nel 1926*, « Memorie dell'Uff. Centr. Meteor. e Geofis. », serie 3ª, vol. II, Roma 1929.

ultimi io li ho dedotti facendo uso della formola empirica stabilita dal Palazzo, in base al complesso delle sue osservazioni d'inclinazione in Somalia:

$$(5) \qquad I = 33°,22 - 2°,26\,\varphi - 0°,26\,\lambda\,,$$

con la quale si può calcolare l'inclinazione I per un qualsiasi punto della regione Somala, avente le coordinate geografiche φ e λ (da Green.). Venendo al caso dell'equatore magnetico, se nella (5) faccio $I = 0$, per ogni meridiano di longitudine λ passante per le stazioni di misura ottengo i valori φ corrispondenti, cioè quelle latitudini che chiamai Ψ, dei punti d'intersezione dell'equatore magnetico coi meridiani delle stazioni. Ricavati per tal modo i Ψ necessari, secondo la (4) ne faccio la differenza dalle latitudini φ delle stazioni, ed ottengo infine le latitudini magnetiche Φ che mi occorrono per saggiare le formole di Biot–Mollweide e di Pinto.

I risultati dei calcoli di Ψ e Φ sono riportati nella tabellina qui appresso.

Stazione	φ	Ψ	Φ	Stazione	φ	Ψ	Φ
Punta Sherwood.	— 1°28′,5	9°54′	— 11°22′,5	Bardera . . .	2°20′,5	9°50′	—7°29′5
Chisimaio . . .	— 0 21,8	9 48	— 10 09 ,8	Vil. Duca d. Abr.	2 46 ,3	9 28	— 6 41,7
Giumbo . . .	— 0 15	9 47	— 10 02	Buracaba . . .	2 49 ,1	9 47	— 6 57,9
Gelib	+ 0 26,5	9 46	— 9 19 ,5	Iscia Baidoa . .	3 07 ,5	9 41	— 6 33,5
Afmadù . . .	0 30	9 52	— 9 22	Lugh	3 47 ,7	9 49	— 6 01,3
Brava	1 06,4	9 38	— 8 31 ,6	Bulo Burti . .	3 51 ,3	9 27	— 5 35,7
Genale	1 48,4	9 33	— 7 44 ,6	Oddur	4 07 ,3	9 38	— 5 31,7
Mogadiscio . .	2 01,7	9 29	— 7 27 ,3	Belet Uen . .	4 44 ,3	9 28	— 4 43,7
Uarsceik . . .	2 17,7	9 25	— 7 07 ,3				

Ciò fatto, introduco nella formula (1) le latitudini magnetiche Φ delle singole stazioni ed ottengo i valori dell'inclinazione *teorici*, i quali figurano nella seconda colonna dello specchietto seguente, mentre nella terza e quarta colonna ho messo rispettivamente i valori di I *osservati* dal Palazzo e le differenze $\Delta = I\,\text{osser.} - I\,\text{calc.}$ (1). Poi conoscendo di ciascuna stazione il valore osservato della forza totale F (v. 5ª colonna) ed il valore della latitudine magnetica Φ, ho calcolato con le formole (2) e (3) la forza

(1) Avverto che le inclinazioni qui sono tutte australi, e tralascio di preporre ai numeri il segno —.

F_e all'equatore magnetico ed ho ottenute due serie di valori, uno dalla formula di Biot–Mollweide e l'altro dalla formula di Pinto, i quali valori sono inscritti nella sesta e settima colonna.

Stazione	I calcolat.	I osserv.	Δ	F osserv.	F_e (Biot.-Moll.)	F_e (Pinto)
Punta Sherwood.	21°55′	25°39′ S	3°44′	0Γ,3464	0Γ,3278	0Γ,3231
Chisimaio . . .	19 43,5	23 02	3 18,5	0 ,3461	0 ,3310	0 ,3269
Giumbo. . . .	19 29,5	22 44	3 14,5	0 ,3463	0 ,3315	0 ,3275
Gelib	18 10,8	20 58	2 47,2	0 ,3456	0 ,3328	0 ,3292
Afmadù. . . .	18 15	21 13	2 58	0 ,3457	0 ,3327	0 ,3291
Brava	16 41,5	19 16	2 34,5	0 ,3449	0 ,3341	0 ,3317
Genale	15 12,8	17 35	2 22,2	0 ,3463	0 ,3372	0 ,3346
Mogadiscio. . .	14 39,9	16 55	2 15,1	0 ,3468	0 ,3383	0 ,3359
Uarsceik	14 01,7	16 14	2 12,3	0 ,3469	0 ,3392	0, 3368
Bardera	14 44,1	17	2 15,9	0 ,3446	0 ,3362	0 ,3336
Vil. Duca d. Abr.	13 12,7	15 11	1 58,3	0 ,3467	0 ,3399	0 ,3378
Buracaba . . .	13 43,4	15 31	1 47,6	0 ,3466	0 ,3393	0 ,3370
Iscia Baidoa . .	12 57	15	2 03	0 ,3450	0 ,3384	0 ,3365
Lugh.	11 54,7	13 38	1 43,3	0, 3460	0 ,3404	0 ,3387
Bulo Burti. . .	11 05,1	12 40	1 34,9	0 ,3464	0 ,3415	0 ,3401
Oddur	10 55,4	12 23	1 27,6	0 ,3463	0 ,3416	0 ,3402
Belet Uen . . .	9 23,2	10 23	0 59,8	0 ,3457	0, 3422	0 ,3411

Qui devo ricordare che, in altri casi, la formula (1) di Biot–Mollweide per l'inclinazione si è trovata abbastanza bene soddisfatta per le basse latitudini, come ne dà esempio l'applicazione fattane da Palazzo alle misure d'inclinazione da lui eseguite nell'Eritrea nel 1913 [1]. Infatti a Palazzo, l'errore probabile del medio (latitudine media del tratto di equatore magnetico compreso nel fuso eritreo) dedotto dalla formola Biot–Mollweide per l'inclinazione, risultò molto piccolo, minore di 1′.

Invece non posso altrettanto concludere io per la zona da me considerata, cioè per la Somalia, perchè, come mostra la quarta colonna della tabella, le differenze Δ tra i valori di I calcolati e gli I osservati, risultano piuttosto forti.

(1) Vedi Memoria dell'Eritrea citata.

Osservando la colonna Δ, si vede peraltro che le differenze vanno gradatamente diminuendo man mano che ci si avvicina, colla stazione di osservazione, all'equatore magnetico, tanto da passare da un massimo di $\Delta = 3^{\circ}\,44'$ per Punta Sherwood, la più distante, ad un minimo di $0^{\circ}\,59',8$ per Belet Uen, che è la stazione più vicina all'equatore magnetico. Ciò confermerebbe che la formola Biot-Mollweide tende a fornire risultati migliori per le basse latitudini magnetiche.

Veniamo infine a considerare le formole (2) e (3), cioè quelle relative alla forza magnetica totale. È da esse che per ciascuna stazione in cui fu osservata F (5ª colonna) ho dedotto la corrispondente forza F_e all'equatore magnetico (6ª e 7ª colonna). Orbene, se le formule fossero buone, i valori F_e costituenti ciascuna serie dovrebbero ben poco differire fra di loro (trattandosi che il segmento di equatore magnetico compreso nel fuso della Somalia, è assai ristretto); invece si vede subito, scorrendo i numeri F_e delle colonne, che questa *quasi eguaglianza* dei valori all'equatore non si è verificata. Nella 1ª serie (dalla formula originale Biot-Mollweide) la differenza fra il massimo ed il minimo valore è $0^{\Gamma},0144$; la formula (3) la quale, essendo una formula *perfezionata* secondo il Pinto, si presumeva potesse dare valori più aderenti intorno al valore medio, porta invece ad una discrepanza tra gli estremi ancora maggiore, $0^{\Gamma},0180$; dunque la formula di Pinto non si mostra vantaggiosa.

Fisica (Fisica-matematica). — *Sulla teoria degli strati magnetici.* Nota di M. Manarini, presentata (1) dal Corrisp. P. Burgatti.

In questa Nota viene data una dimostrazione del teorema di Beltrami, dell'equipollenza della distribuzione polare di magnetismo sopra una superficie ad una distribuzione apolare somma di una distribuzione superficiale e di una lungo il contorno, usando la teoria degli operatori superficiali del Burgatti. Si ottiene per questa via una espressione del teorema del tutto analoga a quella del teorema di equipollenza di Poisson per una distribuzione polare di magnetismo entro uno spazio. Si completa ancora la teoria degli strati magnetici ricavandone, sempre con l'uso degli operatori superficiali, teoremi analogni a quelli di Lord Kelvin per il magnetismo libero di una distribuzione polare spaziale.

Quantunque queste questioni abbiano perduto della loro primitiva importanza nella fisica teoretica moderna, nondimeno il loro interesse analitico e applicativo permane anche oggi.

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

1. – Se $\boldsymbol{h}$ è il momento magnetico specifico [1] relativo al punto generico M di una certa distribuzione polare di magnetismo entro uno spazio (S), oppure sopra a una superficie (σ), la funzione potenziale del magnete in un punto P esterno ad esso si riduce rispettivamente a:

$$V = \int_{(S)} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \boldsymbol{h}\, dS \quad , \quad V = \int_{(\sigma)} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \boldsymbol{h}\, d\sigma ,$$

con $r = \operatorname{mod}(P - M)$.

Il teorema di equipollenza Poisson esprime [2] che la distribuzione polare $\boldsymbol{h}$ entro (S), equivale alla distribuzione apolare dovuta a masse magnetiche con la densità $\rho = -\operatorname{div}_M \boldsymbol{h}$ entro il magnete (S), ed a masse magnetiche di densità $\rho_1 = -\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n}$ distribuite sulla sua superficie limite, ove $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a questa superficie opportunamente diretto [3] (ρ e ρ_1 sono la densità di magnetismo libero).

Il caso della distribuzione polare $\boldsymbol{h}$ sopra una superficie (σ), fu, dopo il Thomson, particolarmente studiato dal Beltrami che ne diede, per lo strato magnetico tangenziale ($\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{h} = 0$ in ogni punto M di (σ)) un teorema di equipollenza ad una opportuna distribuzione apolare sopra (σ) e lungo il contorno (s) di questa [4]. Una trattazione vettoriale di questa teoria trovasi nel libro citato del prof. Maggi [5], ed io farò vedere come la teoria degli operatori superficiali del Burgatti si presti assai bene a dimostrare il teorema del Beltrami in modo semplicissimo, ed a darne un'espressione che presenta una perfetta analogia col teorema di Poisson suaccennato.

A tal uopo basta invocare il teorema della divergenza superficiale espresso dalla relazione

$$(I) \qquad \int_{(\sigma)} \operatorname{div}_{(\sigma)} \boldsymbol{u}\, d\sigma = \int_{(\sigma)} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{div} \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_{(s)} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\nu}\, ds \ [6],$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un vettore regolare, $\boldsymbol{n}$ il valore normale a (σ) e $\boldsymbol{\nu}$ il versore normale al contorno (s), tangenzialmente alla (σ) e rivolto verso l'interno di questa; la divergenza superficiale, $\operatorname{div}_{(\sigma)}$, va intesa nel senso del Burgatti [7].

(1) Da alcuni autori è chiamato anche *vettore magnetizzazione* o semplicemente *magnetizzazione*.

(2) Cfr. ad es.: G. A. Maggi, *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico*, ed. Hoepli, Milano, 1931, p. 56.

(3) Cfr. G. A. Maggi, loc. cit., p. 7.

(4) Cfr. Beltrami, *Sulla teoria degli strati magnetici*, « Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, t. VI, 1883, pp. 208–223, oppure *Opere Matematiche*, t. IV, pp. 1–16.

(5) Cfr. p. 61.

(6) Cfr. Burgatti, *Il teorema del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie, ecc....*, « Mem. d. R. Acc. d. Sc. dell'Ist. di Bologna », serie 7ª, t. IV, 1917.

(7) Nel libro citato del prof. Maggi (p. 14) trovasi una *divergenza superficiale* div^*, intesa in senso differente e definita per le superfici di discontinuità.

Posto nel nostro caso

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\boldsymbol{h},$$

essendo

$$\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n} = 0,$$

$$\operatorname{div}_{(\sigma)}\left(\frac{1}{r}\boldsymbol{h}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}_{(\sigma)}\boldsymbol{h} + \operatorname{grad}_{(\sigma)}\frac{1}{r} \times \boldsymbol{h}\ (1),$$

la (I) ci dà immediatamente

$$\text{(II)} \qquad \int_{(\sigma)} \operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int_{(\sigma)} \frac{\operatorname{div}_{(\sigma)}\boldsymbol{h}}{r}\, d\sigma - \int_{(s)} \frac{\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}}{r}\, ds\ (2),$$

la quale mette in evidenza che la distribuzione apolare, equipollente a quella polare definita da $\boldsymbol{h}$, si compone di una distribuzione superficiale di densità $\rho = -\operatorname{div}_{(\sigma)}\boldsymbol{h}$ e di una distribuzione lungo il contorno di densità $\rho_1 = -\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}$.

Così si ha una completa analogia con il teorema di Poisson: la divergenza ordinaria (o corporea) è sostituita dalla divergenza superficiale e la normale alla superficie limite, dalla normale al contorno.

Osserviamo con il Beltrami come per la distribuzione tangenziale può accadere che l'azione esterna sia rapresentabile da una sola distribuzione lineare lungo il contorno. Perchè ciò avvenga il vettore $\boldsymbol{h}$ deve avere nulla la divergenza superficiale, per il che occorre e basta che $\boldsymbol{h}$ oltre ad essere tangenziale sia solenoidale, ossia si abbia

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \qquad (\text{con } \operatorname{rot}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0)\ (3).$$

(1) Cfr. *Analisi Vettoriale Generale*, t. II: Burgatti, *Geometria differenziale*, ed. Zanichelli, Bologna, 1930, p. 29.

(2) Nel libro citato del prof. Maggi (p. 61) la (II) ha un'espressione un po' diversa, Per ottenerla basta porre, con l'Autore, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k}$ ed osservare che si ha

$$\operatorname{div}_{(\sigma)}\boldsymbol{h} = \operatorname{div}_{(\sigma)}(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \times \operatorname{rot}_{(\sigma)}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \times \operatorname{rot}_{(\sigma)}\boldsymbol{k} = -\operatorname{rot}_{(\sigma)}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}$$

essendo, per cose note,

$$\operatorname{rot}_{(\sigma)}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n} = \operatorname{rot}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n} \qquad , \qquad \operatorname{rot}_{(\sigma)}\boldsymbol{n} = 0.$$

(3) Infatti, essendo $\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n} = 0$ e $\operatorname{div}_{(\sigma)}\boldsymbol{h} = 0$ si ha per cose note (Burgatti, loc. cit.)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{h} = \operatorname{div}_{(\sigma)}\boldsymbol{h} + \frac{d\boldsymbol{h}}{d\mathrm{M}}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{h}}{d\mathrm{M}}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n})}{d\mathrm{M}}\boldsymbol{n} = 0 = \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{h}}{d\mathrm{M}}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} + \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{n}}{d\mathrm{M}}\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{h}}{d\mathrm{M}}\boldsymbol{n}$$

e quindi risulta

Se poi il contorno è ancora linea di magnetizzazione (linea di vettore per $\boldsymbol{h}$) allora $\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu} = 0$ e quindi $V = 0$ (1).

2. – Introduciamo ora le seguenti definizioni.

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore definito in un campo (S) contenente una superficie (σ), od anche definito semplicemente in ogni punto di (σ), se ds è un elemento lineare della superficie (σ), chiameremo *flusso elementare tangenziale di* $\boldsymbol{u}$ *attraverso* ds il prodotto $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\nu}\, ds$, essendo $\boldsymbol{\nu}$ il versore tangente a (σ) e normale a ds. Se (s_1), è una curva chiusa regolare tracciata sopra (σ) e $\boldsymbol{\nu}$ in ogni elemento ds_1 di s_1 è diretto verso l'interno della superficie (σ_1) racchiusa da (s_1), le espressioni

$$\int_{(s_1)} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\nu}\, ds_1 \qquad \text{e} \qquad -\int_{(s_1)} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\nu}\, ds_1$$

saranno chiamate rispettivamente *flusso tangenziale entrante* o *flusso tangenziale uscente* dalla linea chiusa (s_1) del vettore $\boldsymbol{u}$.

Chiameremo *magnetismo libero tangenziale*, corrispondente alla distribuzione polare qualunque $\boldsymbol{h}$ di magnetismo su (σ), le masse fittizie distribuite lungo (σ) e lungo (s) corrispondenti alla distribuzione polare tangenziale $\boldsymbol{h}_t$ e quindi con le rispettive densità

$$\rho = -\operatorname{div}_{(\sigma)} \boldsymbol{h}_t \qquad \text{e} \qquad \rho_1 = -\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}.$$

Ciò posto, essendo (σ_1) una porzione qualunque di superficie (σ) limitata dal contorno (s_1), si ha, dalle precedenti

$$\int_{(\sigma_1)} \rho\, d\sigma_1 = -\int_{(\sigma_1)} \operatorname{div}_{(\sigma_1)} \boldsymbol{h}_t\, d\sigma_1 \quad , \quad \int_{(s)} \rho_1\, ds = -\int_{(s)} \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}\, ds.$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0 \, , \qquad \text{ossia} \qquad \boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}.$$

Viceversa, se $\boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ si ha subito

$$\operatorname{div}_{(\sigma)} \boldsymbol{h} = \operatorname{div}_{(\sigma)} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\frac{d \operatorname{rot} \boldsymbol{v}}{dM}\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = 0,$$

in virtù della $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$, e del calcolo qui sopra eseguito.

(1) Se $\boldsymbol{h}$ è una qualunque distribuzione polare di magnetismo nella superficie (σ) ed $\boldsymbol{h}_t$ indica la sua componente tangenziale, $\boldsymbol{h} - (\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n}$, si ha:

$$V = \int_{\sigma} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \boldsymbol{h}\, d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn} (\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n})\, d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\operatorname{div}_{(\sigma)} \boldsymbol{h}_t}{r}\, d\sigma - \int_{s} \frac{\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}}{r}\, ds;$$

per le superficie d'area minima ($\operatorname{div} \boldsymbol{n} = 0$), $\boldsymbol{h}_t$ può essere sostituito senz'altro da $\boldsymbol{h}$.

La prima di queste, per il teorema della divergenza superficiale, essendo nel nostro caso $\boldsymbol{h}_1 \times \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{h}_1 \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}$, diviene

$$\int_{(\sigma_1)} \rho \, d\sigma = \int_{(s_1)} \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu} \, ds_1 .$$

Facendo in particolare $(\sigma_1) \equiv (\sigma)$ e conseguentemente $(s_1) \equiv (s)$, sommando poi con la seconda delle precedenti si ottiene

$$\int_{(\sigma)} \rho \, d\sigma + \int_{(s)} \rho_1 \, ds = 0 .$$

In queste formule sono contenute le seguenti proposizioni analoghe a quelle di Lord Kelvin per il magnetismo libero di una distribuzione polare spaziale:

Per uno strato magnetico qualunque:

1) La massa totale del magnetismo libero tangenziale è nulla (Beltrami [1]).

2) La quantità di magnetismo libero tangenziale lungo una superficie (σ) aperta è uguale al flusso tangenziale entrante dalla curva contorno (s), della magnetizzazione $\boldsymbol{h}$.

Se la superficie (σ) è chiusa la quantità totale di magnetismo libero tangenziale è sempre nulla.

3) La quantità di magnetismo libero tangenziale lungo un contorno chiuso tracciato su (σ) è uguale al flusso tangenziale uscente dal contorno, della magnetizzazione $\boldsymbol{h}$.

Fisica. — *Sulla tecnica degli spettrografi magnetici per elettroni lenti.* Nota di G. Bernardini, presentata da Socio A. Garbasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Intorno alla teoria unitaria di Einstein.* – I. *Base fisico-geometrica e conseguente deduzione delle equazioni di campo.* Nota di P. Straneo, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *La determinazione dell'angolo degli assi ottici di minerali biassici col piatto di Fedorow.* Nota di A. De Benedetti, presentata dal Corrisp. E. Repossi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. loc. cit.

Chimica. — *Prodotti di condensazione tra glucosio e o-fenitidina, o-anisidina, o-toluidina.* I. *Composti glucosidici*[1]. Nota di M. Amadori, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Nella condensazione del glucosio con basi organiche aromatiche che hanno un idrogeno legato al carbonio del nucleo sostituito (fenetidina, anisidina, toluidina) sono stati finora ottenuti prodotti ben definiti solo per i derivati di sostituzione in posizione para.

Le prove fatte per avere la condensazione con gli isomeri orto diedero qualche indizio di formazione di prodotti di condensazione, ma non portarono a prodotti ben definiti [3].

Proseguendo le ricerche che ho già riferito [4] sulla condensazione degli isomeri para, ho studiato la condensazione del glucosio anche con gli isomeri orto della fenetidina, della anisidina, della toluidina, facendo reagire il glucosio con la base, sia in soluzione alcoolica, sia a secco per fusione, secondo i metodi altre volte descritti, ed ho ottenuto derivati di natura glucosidica, e derivati del tipo delle basi di Schiff, come già prima derivati analoghi avevo ottenuto con i corrispondenti isomeri para.

Sono in questa Nota descritti i composti di natura glucosidica che si formano per condensazione in soluzione alcoolica.

Glucoside della o-fenetidina.

Furono fatti bollire glucosio gr. 12, o-fenetidina gr. 11, ed alcool etilico a 90° gr. 60 (cioè glucosio e fenetidina in rapporti molecolari, con lieve eccesso di fenetidina). L'ebollizione fu tenuta molto moderata e continuata fino a completa soluzione; fu poi allontanata per distillazione una metà dell'alcool; con raffreddamento si separano lentamente cristalli del prodotto; la separazione può venir completata con aggiunta di etere. Il prodotto separatosi venne poi purificato per ricristallizzazione da poco alcool etilico bollente; l'alcool fu poi allontanato lavando i cristalli con etere, e ponendoli nel vuoto.

Aghetti brillanti, di aspetto setaceo; leggermente solubili in acqua e in alcool freddo; molto più solubili in alcool caldo; insolubili in etere, in benzolo, anche a caldo. Punto di fusione 157°.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Sorokin, « Journ. f. prakt. Chemie », 37, p. 291 (1894).

(4) Questi « Rendiconti », II, 2° sem., p. 337 (1925); IX, 1° sem., pp. 68, 226 (1929); XIII, 1° sem., p. 72 (1931).

All'analisi risultò un contenuto di:

C = 55.91 % H = 7.27 % N = 4.45 %;

ed il peso molecolare determinato in soluzione in alcool etilico all'ebollizione risultò:

288 a conc. 2.98 % ; 301.8 a conc. 5.48 %.

Calcolato per $C_{14}H_{21}O_6N$:

C = 56.20 % H = 7.02 % N = 4.68 % pm. = 299.0.

La reazione avviene quindi molecolarmente con eliminazione di 1 molecola di acqua, ed il prodotto che si ottiene è $C_{14}H_{21}O_6N$.

Il potere rotatorio specifico della soluzione acquosa appena preparata è $[\alpha]_D^{20°} = -7°$; scende a — 62° in 5 ore, poi la negatività accenna a diminuire, ma è evidente che nel frattempo si inizia una scomposizione del prodotto.

Il potere rotatorio specifico della soluzione alcoolica appena preparata è $[\alpha]_D^{20°} = +31°$; dopo un giorno scende a — 15°, per poi mantenersi costante.

Glucoside della o-anisidina.

Furono fatti bollire fino a soluzione 12 gr. di glucosio, 11 gr. di o-anisidina (rapporti molecolari con lieve eccesso di anisidina) e 60 gr. di alcool etilico a 90°. Lasciando a sè anche per vario tempo la massa raffreddata non sempre si separa il cristallino composto; talora si rapprende in una massa gelatinosa che non si trasforma in cristallina. Per avere il composto cristallino si deve alla soluzione ancor liquida aggiungere etere fino a incipiente precipitazione; il liquido lasciato a sè separa allora lentamente un deposito cristallino voluminoso, che può venir raccolto e ricristallizzato dall'alcool; in questa seconda cristallizzazione non è necessaria l'aggiunta di etere per avere la cristallizzazione. I cristalli vengono raccolti eliminando l'alcool mediante lavaggio con etere, e tenendoli nel vuoto per più giorni.

Aghi setacei, voluminosi bianchi; leggermente solubili in acqua, un po' più solubili in alcool a freddo, solubili a caldo. Punto di fusione 146°.

L'analisi elementare diede un contenuto di:

C = 54.40 % H = 6.85 % N = 4.72 %

e la determinazione del peso molecolare in alcool etilico all'ebollizione:

278.8 a conc. 2.69 % 279.5 a conc. 5.59 %.

Calcolato per $C_{13}H_{19}O_6N$:

C = 54.70 % H = 6.72 % N = 4.90 % pm. = 285.0.

Il potere rotatorio specifico della soluzione acquosa appena preparata è $[\alpha]_D^{20°} = -15°$; scende a $-70°$ in 4 ore; poi la negatività accenna a diminuire, ma evidentemente si inizia la scomposizione del composto.

Il potere rotatorio specifico della soluzione alcoolica appena preparata è $+10°$; ma poi accenna a diminuire, e dopo più ore è $-12°$.

Glucoside della o-toluidina.

Furono fatti bollire gr. 10 di glucosio, gr. 8 di o-toluidina (rapporto molecolare con lieve eccesso in toluidina) e gr. 60 di alcool etilico a 90° fino a soluzione; venne eliminata una metà dell'alcool per distillazione; dopo vario tempo si separa cristallino il prodotto di condensazione; la separazione può venir facilitata mediante aggiunta di etere. Il prodotto viene purificato per ricristallizzazione da poco alcool, come i precedenti composti.

Aghi finissimi, bianchi, leggermente solubili in acqua; un po' più in alcool a freddo; solubili a caldo; insolubili in altri solventi organici.

All'analisi risultò un contenuto di:

C = 57.68 % H = 7.36 % N = 5.13 %;

il peso molecolare determinato in soluzione in alcool etilico all'ebolizione fu

279.4 a conc. 3.88 % ; 276.9 a conc. 4.24 %.

Calcolato per $C_{13}H_{19}O_5N$:

C = 57.99 % H = 7.06 % N = 5.20 % pm. = 269.0.

Il potere rotatorio specifico della soluzione acquosa appena preparata è $[\alpha]_D^{20°} = -96°$; poi va lentamente diminuendo, ma nello stesso tempo interviene una parziale scomposizione del prodotto.

Il potere rotatorio specifico della soluzione in alcool etilico è $[\alpha]_D^{20°} = -96°$ appena preparata; lentamente discende a $-75°$ dopo 6 ore; a $-50°$ dopo 2 giorni; a $-40°$ dopo 3 giorni; in seguito si mantiene costante.

I prodotti di condensazione con glucosio ottenuti in soluzione alcoolica dalle tre basi orto sono derivati glucosidici, come dimostrano la loro composizione, le prove di diazotazione, l'instabilità agli acidi, ed in generale gli stessi criteri che hanno determinato la costituzione glucosidica dei corrispondenti prodotti di condensazione degli isomeri para, e che ripetuti sui prodotti di condensazione degli isomeri orto hanno portato ad analoghi risultati. I glucosidi dei derivati orto e para hanno notevole sapore amaro.

Raffrontando i prodotti di condensazione dei derivati orto, e quelli corrispondenti dei derivati para, si osserva che il punto di fusione dei pro-

dotti di condensazione della o–fenetidina (157°) e della o-anisidina (146°) sono notevolmente più elevati di quelli dei prodotti di condensazione della p–fenetidina (114°) e della p-anisidina (86°); il prodotto di condensazione della o-toluidina (97°) invece ha un punto di fusione inferiore a quello del prodotto di condensazione della p–toluidina (115°).

Il potere rotatorio specifico in soluzione alcoolica dei glucosidi della o–fenetidina e della o–anisidina appena portati in soluzione è positivo, per mutarotazione passa a negativo (da + 31° e da + 10° a circa — 15°); il potere rotatorio in soluzione alcoolica dei glucosidi dei corrispondenti isomeri para è negativo appena portati in soluzione, per mutarotazione la negatività diminuisce (da — 90° passa a — 40°); cosicchè mentre nei glucosidi delle basi orto con la mutarotazione si ha un passaggio dalla forma α alla forma β, per quelli delle basi para si ha un passaggio inverso; per gli uni e gli altri si arriva ad un equilibrio rappresentato da valori del potere rotatorio specifico che si possono ritenere dello stesso ordine di grandezza, se si considera la diversa posizione del gruppo sostituente l'idrogeno del nucleo benzolico.

Anche il potere rotatorio specifico della soluzione acquosa dei derivati orto della fenetidina e della anisidina è diverso da quello dei prodotti para; infatti il potere rotatorio specifico dei derivati orto appena portati in soluzione è lievemente negativo, poi la negatività aumenta fino a — 70°, successivamente diminuisce, ma i valori che si osservano non possono esser presi in considerazione perchè almeno in parte interviene una scomposizione del glucoside; al contrario il potere rotatorio specifico dei derivati para è subito fortemente negativo, circa — 85°, e successivamente diminuisce.

Per i glucosidi della toluidina non si hanno diversità notevoli nel potere rotatorio specifico tra i derivati dei due isomeri orto e para; in soluzione alcoolica il potere rotatorio specifico iniziale è per entrambi negativo, con la mutarotazione diminuisce di valore, da — 90° a — 40°; in soluzione acquosa per entrambi i prodotti si ha un potere rotatorio iniziale di circa — 90°, che successivamente diminuisce, mentre interviene una parziale scomposizione del glucoside.

In presenza di acidi tutti i glucosidi degli isomeri orto si scindono, come è stato visto per gli isomeri para, in base libera e glucosio, per cui il potere rotatorio specifico in soluzione alcoolica e in soluzione acquosa da un valore negativo, o leggermente positivo, passa al valore + 32°; se l'acido è diluito si raggiunge dapprima come massimo un valore positivo anche superiore, per scendere poi a + 32°; il potere rotatorio che ne risulta corrisponde al glucosio che si libera per la scissione del composto in base libera e glucosio.

In presenza di alcali in soluzione alcoolica il potere rotatorio dei glucosidi della o-fenetidina e della o–anisidina si sposta verso sinistra, e si giunge ad un equilibrio di $[\alpha]_D^{20°} = -35°$, al contrario che per i glucosidi dei de-

rivati para, per i quali si arriva a quel valore partendo da un potere rotatorio negativo superiore; il potere rotatorio del glucoside della o-toluidina come quello dell'isomero para si sposta verso destra con un valore, all'equilibrio, di $[\alpha]_D^{20^\circ} = -60^\circ$; le variazioni del potere rotatorio in soluzione alcoolica in presenza di alcali non sono quindi molto diverse da quelle che si osservano nella soluzione alcoolica neutra.

In presenza di alcali in soluzione acquosa l'equilibrio si stabilisce a -70° per il glucoside della o-fenetidina e della o-anisidina, e a -90° per quello della o-toluidina; l'equilibrio che si raggiunge corrisponde a quello che si ottiene per i glucosidi dei derivati para in soluzione acquosa alcalina.

La differenza di comportamento nel potere rotatorio tra i prodotti orto e para della fenetidina e della anisidina è accompagnata da una notevole differenza nel punto di fusione; l'una e l'altra stanno ad indicare una eccedenza di isomero α nei derivati orto e di isomero β nei derivati para, rispetto all'equilibrio che si stabilisce in soluzione.

In altra Nota sarà riferito sui prodotti di condensazione con glucosio che per queste stesse basi (derivati orto) si possono ottenere per via secca mediante fusione, e che corrispondono ai composti tipo base di Schiff già da me descritti per i derivati isomeri para.

Chimica. — *Sulla reazione fra nitroprussiato sodico e solfuri* [1]. Nota III di G. Scagliarini e P. Pratesi, presentata [2] dal Corrisp. M. Betti.

In alcuni lavori precedenti [3], in base a determinazioni elettrometriche avevamo stabilito che il prodotto della reazione fra nitroprussiato sodico e un solfuro alcalino, è un sale complesso della formula generale $Me'_4[Fe(CN)_5NOS]$: infatti al punto di equivalenza stechiometrica di due soluzioni di nitroprussiato e di solfuro alcalino, si ha una fortissima diminuzione dell'attività degli ioni solfo. Essa passa da un valore dell'ordine di grandezza di 10^{-2} nelle soluzioni di Na_2S N/10 ad un valore dell'ordine di 10^{-14} in quelle del sale complesso solfonitroprussico N/10.

La reazione, dovuta allo ione S'' del solfuro alcalino, si può schematicamente rappresentare così:

$$[Fe(CN)_5NO]'' + S + 2\ominus = [Fe(CN)_5NOS]''''$$

Ora, avendosi in questa reazione una variazione di valenza di uno ione, e precisamente il salto di valenza dello ione nitroprussico bivalente a ione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Questi « Rendiconti », serie 6ª, vol. VIII, p. 75 (1928); serie 6ª, vol. XI, p. 193 (1930).

solfonitroprussico tetravalente a spese dei due elettroni ceduti da uno ione solfo, doveva essere possibile mettere in evidenza, mediante un elettrodo indifferente, il potenziale di ossidazione–riduzione che si origina da questo passaggio di elettroni. Abbiamo sperimentato dapprima con elettrodo di platino, ma con risultati poco soddisfacenti poichè si raggiungevano difficilmente valori costanti per il potenziale.

L'elettrodo di mercurio in corrente di azoto si mostrò invece assai adatto: in corrente di idrogeno il sale complesso rosso-violetto si altera rapidamente.

Misure eseguite con elettrodo di mercurio puro ed in atmosfera di azoto hanno dato per il potenziale di ossidazione-riduzione in parola il valore di 0,348 volt a 20°, per soluzioni N/10 dei due reagenti. Il valore relativamente basso di questo potenziale, assicura che non si può trattare del potenziale di un elettrodo di seconda specie del tipo Hg, HgS/Na_2S, poichè il valore di questo è di un ordine di grandezza notevolmente superiore (1).

Allo scopo di misurare il salto di valenza dello ione nitroprussico, abbiamo determinato i valori del potenziale di ossido–riduzione a diverse concentrazioni delle sostanze reagenti. Si usavano soluzioni N/10 delle due sostanze, e si versavano volumi misurati di solfuro sodico in volume noto di nitroprussiato. La temperatura si mantenne costante a 20°. I valori di queste differenze di potenziale sono dati dalla nota formula

$$\pi = \frac{RT}{\zeta F} \log \frac{[C_{sn}]}{[C_n]} + \pi_o$$

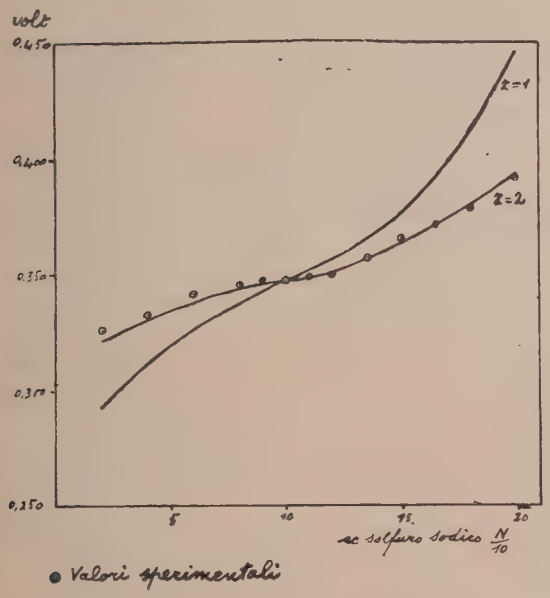
dove $[C_{sn}]$ e $[C_n]$ sono le concentrazioni ioniche del solfonitroprussiato e del nitroprussiato alcalino. Il valore di π_o viene ricavato sperimentalmente quando $[C_{sn}] = [C_n]$, cioè quando il volume del solfuro aggiunto al nitroprussiato raggiungeva la metà del volume di questo preso per l'esperienza. Dando a ζ valori successivi a partire dell'unità si sono costruite le diverse curve dei potenziali di ossidazione–riduzione corrispondenti al passaggio dell'ione nitroprussico dalla bivalenza a valenze successive.

Le curve mostrano naturalmente un flesso quando $[C_{sn}] = [C_n]$. I valori da noi trovati per π cadono con grande approssimazione (vedi diagramma) sulla curva calcolata in base alla assunzione di due elettroni, vale a dire al passaggio dalla bivalenza dello ione $[Fe(CN)_5NO]''$ alla tetravalenza dello $[Fe(CN)_5NOS]''''$; si discostano sensibilmente dalle altre curve calcolate in base al passaggio a valenze diverse (vedi diagramma).

Queste esperienze costituiscono un'ulteriore conferma alle conclusioni alle quali eravamo pervenuti nelle precedenti ricerche.

(1) Il potenziale della pila Hg/HgS, KSH 0,01 N, KNO_3 N/KNO_3 N/KNO_3N, KCl 0,01 N, Hg_2Cl_2, Hg. è di -0,8944 volt a 18°, 5. Bugarszky, *Landolt Tabellen*, Bd. II, 1023 (1923).

I solfonitroprussiati sono assai stabili allo stato puro cristallino, ma in soluzione come è noto si decompongono rapidamente con scomparsa del colore rosso–violetto caratteristico. Per approfondire la conoscenza di questi composti, abbiamo cercato di esaminare i prodotti della decomposizione. Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, nella decomposizione della soluzione acquosa del complesso puro non si formano tracce di acquo-pentacianuro ma grandissime quantità di ferrocianuro alcalino. La reazione è molto complessa: si deposita solfo in discreta quantità, si ha formazione



pure notevole di ossido ferroso e ferrico, di piccole quantità di bleu di Prussia, e si svolge una certa quantità di azoto e tracce di NO.

Si è fatta avvenire la decomposizione di una quantità nota di complesso appena preparato, entro un azotometro onde avere un'idea della quantità di azoto svolto. Da misure preliminari si è visto che la quantità di azoto svolto è circa 1/4 della quantità di azoto contenuto sotto forma di NO nella molecola del complesso; di NO si svolgono solo tracce. Nel liquido della decomposizione si sono riscontrate notevoli quantità di nitrito alcalino corrispondenti alla metà circa dell'azoto contenuto sempre come NO nella molecola del complesso. Pertanto, se nella preparazione del complesso vi è un forte eccesso di H_2S libero, questo reagisce col nitroprussiato con formazione da acquoferropentacianuro, solfo e svolgimento di azoto.

Chimica. — *Sulla presenza di alluminio nelle foglie e nei succhi intracellulari del gelso* [1]. Nota di D. Ongaro, presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni.

La fisiologia vegetale considera l'alluminio come un elemento non necessario alla vita delle piante e ne qualifica perciò accidentale la sua presenza nelle cellule.

Ragione di questa affermazione sarebbe il fatto che le piante si sono dimostrate insensibili alla mancanza di tale elemento nei terreni di coltura artificiali. È invece noto che l'alluminio si trova in quantità talvolta considerevoli nelle ceneri di molte piante.

Kratzamann [3] operando con metodo microscopico basato sulla formazione in seno alle cellule di solfato doppio di cesio ed alluminio, ha esaminato le varie parti, di centinaia di piante trovando in tutte tale ione in quantità variabile, ma sempre in quantità notevolmente maggiore nei fiori. Questa circostanza riveste uno speciale interesse data la delicatissima funzione cui è preposto il fiore e gli speciali componenti chimici che in esso si localizzano e la cui sintesi nell'organismo vegetale ci è attualmente del tutto oscura.

Stoklasa ha pure osservato che le piante che vivono nei terreni umidi contengono quantità rilevanti di alluminio. Egli opina che la funzione dell'alluminio sia quella di regolare lo scambio dei cationi e di ostacolare un assorbimento eccessivo di ferro che provocherebbe plasmolisi. Inoltre, secondo lo stesso autore, i colori dei fiori sarebbero modificati dalla presenza dell'alluminio ed i colori azzurri di molti coleotteri ed uccelli sarebbero dovuti all'alluminio assorbito col nutrimento dalle piante [4].

Nel gelso, come si vedrà più sotto, l'alluminio è contenuto costantemente ed il Quajat stesso ebbe a constatarne la presenza, mentre il Sobrero ne rilevava una notevole quantità nelle crisalidi del baco da seta che, naturalmente, non potevano averlo acquisito che dalla foglia [5].

D'altronde sarebbe da fare una obbiezione di carattere tecnico alla insensibilità constatata delle piante alla mancanza di sali d'alluminio, perchè i recipienti nei quali si opera normalmente non sono mai privi di questo elemento e non si può escludere che ne entri in soluzione una quantità suf-

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) E. Kratzmann, *The microchemical recognition and the distribution of Al in plants.* « Ex. St. Rec. », 1914, p. 129.

(4) Stoklasa, *L'alluminio nella vita degli organismi.* « Rass. Int. di Agr. », 3, 1925, p. 645.

(5) Quajat, *Le ceneri dei bozzoli e delle crisalidi.* « Ann. St. Bac. », a. VII, Padova, 1879.

ficiente ai bisogni più imponenti della pianta, senza dire che gli esperimenti nelle soluzioni nutritizie sono necessariamente limitati a periodi del ciclo vitale della pianta e perciò non bastevoli a dire se in una speciale circostanza della vita vegetale la presenza di una quantità più forte di alluminio, di quella che comporti la possibile e quasi imponderabile dissoluzione dai recipienti, si dimostri veramente necessaria alla pianta. Un interessante studio sull'argomento fatto da Anna L. Sommer con speciali accorgimenti atti ad evitare eventuale inquinazione di alluminio dall'esterno, ha portato a questo sorprendente risultato: che l'addizione di un milionesimo in peso di sali di alluminio alla soluzione nutritizia, esperimentando sopra alcune leguminose, porta ad un piccolo aumento nel peso totale secco della pianta e ad un grande aumento nel peso totale secco dei semi. E sperimentando sul miglio si ha un rapidissimo accrescimento specialmente nel seme tanto che questo elemento appare essenziale per tale coltura [1].

La marcata influenza dell'alluminio sui semi riscontrata dalla Sommer si ricollega egregiamente col reperto del Kratzamann che le quantità maggiori di alluminio si trovano nei fiori.

Una corrente recentissima di studi tende a dare grande importanza nella vita vegetale alla presenza di altri elementi che non si trovano nelle piante in quantità ponderabili con i comuni metodi analitici. Altri studi vertono sull'azione di elementi che difficilmente si trovano in organismi vegetali. Ciò è interessante perchè dimostra quanto sia azzardato negare una funzione all'alluminio quando si rilevano attivi anche elementi eccezionalmente somministrati alle piante. La stessa Sommer dà una lista di piante a cui sarebbero necessari lo Zinco e il Boro [2].

M. Arena, esperimentando con *Alternanthera spatulata* ha rilevato una azione stimolatrice e rigeneratrice di alcune terre rare. l'Uranio aggiunto ad una soluzione nutritizia avrebbe indotto nella pianta, preventivamente sfogliata, abbondanti radici e foglie in due giorni. Lo stesso effetto l'A. avrebbe conseguito con lo Zirconio e il Berillio mentre il Volframio, il Cesio e il Rubidio avrebbero impiegato da quattro a cinque giorni. Il Molibdeno si si sarebbe mostrato inattivo ed il Vanadio tossico. Il Potassio, il Magnesio, il Calcio e l'Ammonio avrebbero agito con moltissima lentezza [3].

Io non mi intrattengo su queste ricerche che prescindono dall'argomento del mio studio, ma metto in rilievo l'azione stimolatrice che risulterebbe avere il Boro tanto da renderlo necessario ad alcune piante, perchè si tratta di un elemento dello stesso gruppo dell'alluminio.

(1) A. L. Sommer, *Studies concerning the essential nature of aluminum and silicon for plant growt.* «Cal. Univ. pubs. Agr. Sc.», *5* (1926), 2 p. 57.

(2) A. L. Sommer, *The search for elements essential in only small amounts for plant growt.* «Science», *66* (1716), 1927, p. 482.

(3) M. Arena, *Dell'azione di elementi di terre rare sulle piante.* «Rend. Acc. Sc. Fis. Mat.», Napoli, *33* (1927), p. 37.

Molti studi sono stati fatti sull'azione fertilizzante dell'alluminio, curioso contrasto con l'opinione ancora in auge del carattere puramente accidentale di questo elemento nelle piante. I risultati sono molto spesso contraddittori e molti ritengono che i sali d'alluminio siano nocivi alla vegetazione. Stoklasa (op. già citata) afferma che ciò è vero soltanto quando si esperimenti con soluzioni nutritizie, mentre i sali d'alluminio somministrati entro certi limiti, alle piante attraverso il terreno, manifestano in molti casi un'azione stimolante. Egli emette l'ipotesi che questa virtù attenuante del terreno per la tossicità dei sali d'alluminio sia dovuta alla formazione di umati, che non sarebbero nocivi alle radici. Lo stesso autore ha constatato che l'alluminio associato al manganese dà buoni risultati nella coltivazione della barbabietola pur di non superare certe percentuali [1].

Anche Magistad portò un contributo alla risoluzione del complicato problema ricercando la solubilità dell'alluminio nel suolo ai vari Ph e l'influenza di questo elemento sulla vegetazione. I risultati indicano che il trifoglio e l'alfalfa sono sensibili solo all'acidità e non all'alluminio solubile. L'autore avrebbe inoltre osservato che le piante che crescono in terreni ricchi di alluminio aumenterebbero il loro tenore in questo elemento, ma diminuirebbero quello in ferro indicando con ciò la possibilità di uno spostamento di quest'ultimo [2]. Questo studio, a mio parere dimostrerebbe come in molti casi si sia confusa l'azione dell'ione alluminio con l'azione dell'acidità del mezzo.

Le mie ricerche sull'alluminio nel gelso furono originate dalla constatazione da me fatta che la linfa della stessa pianta contiene in notevole quantità l'elemento in parola [3].

In un primo tempo mi limitai a studiare il contenuto di alluminio nelle ceneri della foglia di diversa provenienza che io stesso raccolsi in occasione di un mio viaggio ad Ascoli Piceno.

Il metodo seguito fu il seguente: le foglie di ciascun campione erano preventivamente lavate in acqua corrente per circa due ore al fine di allontanare le traccie di pulviscolo che avrebbero potuto indurre in errore contenendo alluminio. Ho eseguito una prova di confronto lavando in acqua corrente per due ore un foglio di carta da filtro che era stato coperto di polvere di cemento; la cenere non conteneva alluminio.

Dopo il lavaggio, 5 grammi di foglia seccata fino a peso costante a 105° venivano inceneriti in capsula di platino e le ceneri erano sciolte in acido nitrico. La soluzione nitrica addizionata di nitrato ammonico e libe-

(1) J. Stoklasa, *Calalytic fertilizer for sugar beets.* «Ex. St. Rec.», *26* (1912), p. 225.

(2) O. C. Magistad, *The aluminum content of the soil solution and its relation to soil reaction and plant growt.* «Soil Sc.», *20* (1925), n. 3, p. 181.

(3) D. Ongaro, *Sulle proprietà e sulla composizione della linfa del gelso.* (In pubblicazione in «Ann. Tecn. Agr.», 1930).

rata dell'acido fosforico per precipitazione con molibdato potassico, veniva quindi alcalinizzata con ammoniaca, dopo filtrazione, per la separazione, dell'alluminio sotto forma di idrato che si dosava quindi come ossido dopo calcinazione. I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

N.	Provincia	Località	Natura del terreno	Stato della pianta	Al_2O_3
1	Ascoli	Ascoli	argilloso	ottimo	gr. 0.064
2	»	Campolungo	prev. calcareo	buono	0.037
3	»	Bivio Offida	argilloso	»	0.054
4	»	Spinetoli	sabbioso	mediocre	0.015
5	»	Ascoli	argilloso	ottimo	0.044
6	Ancona	Aspio	»	buono	0.037
7	»	Torrette	calcareo	mediocre	0 032
8	»	Crocette	»	buono	0.008
9	Pesaro	Monfelcino	argilloso	ottimo	0.061
10	»	Fossombrone	argilloso	ottimo	0.045
11	»	»	»	»	0.038
12	»	»	calcareo	buono	0.015
13	»	Fano	sabbioso	»	0.033
14	»	Mondolfo	argilloso	»	0.056
15	»	Pedaso	calcareo	»	0.009
16	»	Pesaro	argilloso	ottimo	0.023
17	»	S. Martino del Piano	prev. calcareo	buono	0.014
18	»	Calcinelli	argilloso	»	0.056
19	»	Rosciano	»	»	0.011
20	»	Forcolo	»	ottimo	0.027
21	»	»	»	»	0.044
22	Ferrara	Gaibanella	»	buono	0.022
23	Ravenna	Cervia	sabbioso	mediocre	0.038
24	»	»	»	»	0.018
25	»	Alfonsine	argilloso	buono	0.034
26	Padova	Padova	»	ottimo	0.026
27	»	»	»	»	0.032
28	»	»	»	»	0.054

Il fatto notevole che mi pare si possa dedurre da questi risultati è che l'alluminio si è trovato presente in tutti i campioni di foglia provenienti da località diverse e quindi appartenenti a gelsi coltivati su terreni essenzialmente diversi. Ciò farebbe ritenere che il gelso ha una tendenza speciale di appropriarsi dell'alluminio del terreno ed in ogni modo escluderebbe un'azione nociva di questo elemento, pur prescindendo dalla funzione che esso può avere nella pianta.

Che la quantità di alluminio presente incida in qualche modo sulla vegetazione, non appare affatto. D'altronde, se come è supponibile, l'azione di tale ione è prevalentemente catalitica, non sono variazioni di ordine ponderabile che possono influire in modo visibile.

Questa ricerca però non dice nulla sulla localizzazione dell'elemento che si potrebbe pensare completamente immagazzinato nella membrana cellulare. Per questo ho voluto estendere l'analisi ai vari succhi circolanti per stabilire se sali d'alluminio siano sciolti in essi. Ho eseguito determinazioni sui succhi della foglia, delle nervature più grosse, dei piccioli, della corteccia.

Le foglie, i piccioli e l'altro materiale, appena raccolti erano separati e quindi tagliati in fette sottili che, introdotte in vasi separati, venivano trattate per circa quattro ore con vapori di cloroformio e quindi pressate con un piccolo torchio a vite senza fine. Il cloroformio per questa pratica di estrazione dei succhi non presenta inconveniente alcuno, salvo quello comune agli altri anestetici, vale a dire che secondo l'affermazione di Dumont e Andrée non ferma l'azione degli enzimi che così possono modificare la composizione dell'estratto nel periodo postvitale che intercorre dalla spremitura alla determinazione [1].

Ma ciò non ostante il cloroformio è stato adoperato da Goldsmith e Smith per lo studio delle proprietà chimico–fisiche dei succhi, studio nel quale l'inconveniente suesposto avrebbe veramente potuto essere un grave ostacolo [2].

Il succo estratto veniva filtrato o su filtro semplice o sulla pompa a seconda della viscosità, al fine di eliminare gli eventuali frammenti cellulari che avrebbero potuto indurre in errore, quindi veniva portato a secco; il residuo secco era incenerito e trattato, come ho già detto, per le ceneri delle foglie.

In una tabella riassumo il risultato delle determinazioni eseguite sempre sopra 50 cc. di liquido. Per il succo delle nervature ho potuto farne tre soltanto data la difficoltà che presenta la raccolta del materiale.

La corteccia adoperata per l'estrazione del succo proveniva da rami di uno o due anni:

(1) Dumont, Andrèe, *Étude bibliographique et critique de la mesure de la concentration des liquides cellulaires végétaux.* « Ann. Phisiol. Phisichem. Biol. », 2 (1926), pp. 215–256.

(2) Goldsmith G. W. C. Smith, *Some phisico-chemical properties of spruce sap and their seasonal and altitudinal variation.*

Allumina in 50 cc. dei vari succhi.

N.	Succo della foglia senza nervature	Succo del picciuolo	Succo della corteccia	Succo delle nervature
1	gr. 0.0072	gr. 0.0212	gr. 0.0186	gr. 0.0114
2	0.0054	0.0152	0.0148	0.0098
3	0.0066	0.0176	0.0106	0.0122
4	0.0058	0.0128	0.0092	
5	0.0024	0.0164	0.0118	
6	0.0032			
7	0.0062			

Il contenuto in alluminio dei succhi si presenta dunque discretamente variabile, ma i fatti secondo me più notevoli sono i seguenti:

1° che in tutti i succhi circolanti del gelso esaminati, si trova alluminio;

2° che mentre nel succo della foglia senza grosse nervature l'alluminio è rappresentato da una cifra del terzo ordine, nei succhi delle nervature, dei piccioli e della corteccia, l'alluminio è rappresentato da cifre del secondo ordine;

3° che pur restando discretamente rispettati gli ordini decimali, ci sono divari notevoli di quantità fra campione e campione di succo proveniente dallo stesso genere di materiale;

4° che non c'è rapporto costante fra le quotazioni d'alluminio delle varie parti della stessa pianta.

Questi fatti non permettono di trarre conclusioni sicure sulla natura della funzionalità dell'alluminio perchè i dati numerici sono troppo variabili da pianta a pianta, però mi sembrerebbe che dessero consistenza all'ipotesi che una vera e propria funzionalità dell'alluminio esista, per quanto ancora incognita nel suo determinismo. Difatti è troppo forte la quantità di alluminio che si trova nei succhi circolanti perchè possa reggere l'ipotesi che questo elemento debba tutto depositarsi senza prendere parte al ricambio. Se così fosse ed in considerazione dell'enorme tasso di evaporazione delle piante, si dovrebbe pensare per il gelso alla formazione di una vera stratificazione dei sali d'alluminio, a meno di non ammettere intermittente l'assorbimento dell'elemento dal terreno, il che implicherebbe una regolazione specifica della pianta alla concentrazione di questo elemento e quindi un meccanismo funzionale che ne rivelerebbe la necessità.

Chimica (Chimica-fisica). — *Spettro Raman e costituzione chimica in alcuni cloroetileni.* Nota di G. B. Bonino e L. Brüll, presentata dal Corrisp. M. Betti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla presenza dell'Oligocene in Sirtica (Libia).* Nota di A. Desio, presentata [1] dal Socio G. Dainelli.

Durante un recente viaggio nell'interno della Sirtica (novembre e dicembre 1930), ho avuto occasione di visitare l'Oasi di Marada a 29°13′ di Lat. N. e a 19°12′ di Long. E. da Greenwich e a 140 km. dalla costa mediterranea. Nei dintorni dell'oasi affiorano dei calcari arenacei e delle arenarie calcaree gessiferi e fossiliferi appartenenti al Miocene, il quale presenta anche qui una facies del tutto simile a quella dei dintorni di Giarabùb, in Marmarica [2].

La serie è bene esposta lungo la scarpata dell'altipiano che delimita a nord la conca di Marada, mentre più a sud la roccia in posto è quasi dovunque coperta dalle sabbie silicee e dal terriccio argilloso salino delle sebche. Solo qua e là si elevano delle « gare » composte da argille sabbiose gessifere alternanti con calcari, assai poveri di resti organici.

Il 17 novembre, partendo da Marada con una carovana di cammelli, mi sono spinto sino alla Garet el-Lubàn, a una trentina di chilometri in direzione SE, ossia verso Abu Naim e quasi sul confine fra la Cirenaica e la Tripolitania. La regione che si attraversa per raggiungere la Garet è quasi completamente sabbiosa; solo di tanto in tanto affiorano delle placche di calcare bianco, spesso cosparse di frammenti di tronchi d'albero silicizzati, e dei crostoni di gesso.

Poco prima di arrivare alla Garet el-Lubàn si scende una bassa scarpata che fa da sponda a una depressione orientata E-O, e chiusa dal lato opposto da una scarpata poco più alta, di cui la Garet el-Lubàn rappresenta quasi un promontorio. Questa località è nota per la presenza di una specie di ambra alla quale viene attribuito dagli indigeni un valore che effettivamente non possiede, non foss'altro per la sua grande scarsità. Inoltre non si tratta nemmeno di vera resina fossile, ma di una sostanza di appa-

(1) Nella seduta del 1 febbraio 1931.

(2) Desio A., *Resultati Scientifici della Missione alla Oasi di Giarabùb.* Fasc. II, «La Geologia», R. Soc. Geogr. It., Roma 1928.

renza ambracea del tutto simile a quella già segnalata nei dintorni di Bengasi [1].

Molto maggiore interesse posseggono i dintorni della Garet el-Lubàn per la presenza di un orizzonte stratigrafico che finora non solo non era stato mai segnalato in Sirtica, ma che non era stato nemmeno supposto e cioè dell'Oligocene.

Sulle sabbie che rivestono il fondo della conca sono sparse in quantità sorprendente i gusci di Nummiliti completamente isolati nella sabbia. Si tratta per lo più di due forme, una maggiore, del diametro di 10-15 mm., l'altra minore, del diametro di 3-4 mm., piatte, liscie e spesso così corrose da lasciar vedere molto bene anche la struttura interna. Sono le forme megalosferica e microsferica della *Nummulites intermedia* d'Arch. – *Fichteli* Brug. Sulle sponde della conca ho poi trovato le stesse Nummuliti in posto, contenute in gran numero in un calcare argilloso friabile, giallo–verdastro, che ricopre delle arenarie argilloso–calcaree verdi, nelle quali sono contenuti i frammenti della pseudoambra e dei dentini di pesci appartenenti a *Hemipristis serra* Ag. e *Odontaspis cuspidata* (Ag.). Succedono superiormente delle argille sabbiose verdi con frequenti intercalazioni di gesso cristallino biancastro. La stratificazione è generalmente irregolare, con andamento incrociato, per quanto nel complesso gli strati appaiono orizzontali o assai poco inclinati sull'orizzonte.

Insieme con le Nummuliti sopra ricordate, sul fondo della conca ho pure trovato fra la sabbia dei molluschi riferibili a *Pecten vezzanensis* Opph. *Ostrea* cfr. *ventilabrum* Goldf., *O. ventilabrum* var. *crebricosta* Rov., *Monia* sp., *Lucina* cfr. *corpusculum* Opph., *L.* cfr. *perornata* Bay.

Alle Nummuliti, già ben caratteristiche dell'Oligocene, si aggiungono dunque altre forme oligoceniche di molluschi, come il *Pecten vezzanensis* segnalato nell'Oligocene d'Egitto e l'*Ostrea ventilabrum* var. *crebicosta* dell'Oligocene ligure.

Non sarà inopportuno ricordare che i fossili sono in parte gessificati e non solo i molluschi, ma anche una parte delle Nummuliti.

A NE della Garet el-Lubàn si erge un piccolo gruppo di bassi rilievi che porta il nome di Guerat el-Hèira, rilievi costituiti da arenarie calcaree rossastre, ricchissime di gesso. Queste arenarie appartengono ad un livello stratigraficamente più elevato di quelli menzionati sopra, ma non mi hanno fornito fossili determinabili. Sulla superficie del suolo, però, si osservano numerosissimi frammenti di legni silicizzati e sulla sabbia, ai piedi delle gare, raccolsi degli esemplari di Ostree che, per quanto un po' corrosi dalle azioni eoliche, mi sembrano riferibili all'*Ostrea Clot Beyi* Bell. e alla *Plicatula bovensis* De Greg. A questi molluschi va aggiunto un grosso dente

(1) Zanon V., *Diatomee rinvenute in una pretesa ambra di Bengasi.* « Atti Pont. Acc. Nuovi Lincei ». Anno LXXX, Sess. VI, Roma 1927, p. 251.

di squalo, conservatissimo e riferibile al *Carcharodon auriculatus* Ag. L'*O. Clot Beyi* è una forma dell'Eocene superiore d'Egitto, la *Pl. bovensis* una forma di Priabona; tutte le specie di pesci sopra menzionate sono vissute sia nell'Oligocene, sia nel Miocene. Comunque, la fauna fossile della zona di Garet el-Lubàn, presa nel suo complesso, non può lasciare dubbi sulla sua appartenenza all'Oligocene.

In tutte le altre regioni visitate della Sirtica non sono riuscito a trovare altri affioramenti oligocenici. Alla base della serie miocenica che affiora lungo la scarpata dell'altipiano a N. di Marada, si osservano delle arenarie giallastre e rosse con stratificazione incrociata e con denti di pesci (*Galeocerdo aduncus* Ag.) e, più in alto, qualche banco di argille sabbiose verdi, gessifere, simili per aspetto a quelle di Garet el-Lubàn e contenenti fra l'altro denti di *Carcharodon polygyrus* Ag. Mancano sempre, però, in questi livelli le Nummuliti, non solo, ma gli altri fossili contenuti rivelano un carattere miocenico. Argille sabbiose verdi gessifere con denti di pesci affiorano pure nei dintorni di Gasr el-Sahabi, lungo la carovaniera Agedabia-Àugila, ma anche qui sono prive di Nummuliti e corrispondono a quelle del ciglione a nord di Marada.

Gli affioramenti oligocenici più prossimi a quello descritto si trovano in Cirenaica sul Gebel el-Achdàr e distano circa 400 km., in linea d'aria, dalla Garet el-Lubàn. Nessuna traccia di tale piano è stata invece segnalata finora in Tripolitania, ma dopo la scoperta dell'Oligocene ai confini occidentali della Sirtica non sembra improbabile che anche sui margini orientali di quella nostra colonia possa affiorare più o meno estesamente e completamente la serie paleogenica.

Paleontologia. — *Florula quaternaria di Magliano de' Marsi sull'orlo della conca fucense.* Nota di P. Principi, presentata [1] dal Corrisp. G. Rovereto.

Sopra le più basse pendici del gruppo dei monti del Sirente, lungo la sponda NE del Fucino, si estende un importante deposito di origine lacustre. Esso è costituito essenzialmente da banchi più o meno potenti di un conglomerato ad elementi calcarei di varie dimensioni, per lo più poco cementato, i quali includono delle lenti di sabbia argillosa incoerente o di argilla sabbiosa micacea giallastra e bluastra, più o meno compatta e talvolta terrosa [2]. Una di queste lenti, che affiora presso Magliano de' Marsi a circa 750 metri s/m, ha offerto numerose impronte di foglie, che assumono notevole interesse per la determinazione cronologica dei sedimenti lacustri suddetti.

Secondo il Sordelli [3], che ebbe occasione di esaminare alcune di queste filliti, si tratterebbe di una flora del Neogene e precisamente del Pliocene, mentre il Clerici [4] ritenne che le impronte vegetali attestassero un'età più recente.

L'Ing. Crema, attendendo al rilevamento geologico dettagliato della regione, ha potuto raccogliere nelle argille di Magliano de' Marsi un'abbondante materiale fossilifero, che egli mi ha cortesemente comunicato in studio.

Le specie da me determinate sono le seguenti:

Carpinus betulus L.
Corylus avellana L.
Alnus glutinosa Gaertn.
Alnus sp.
Fagus sylvatica L.
Quercus robur L.
Quercus cerris L.
Castanea sativa Mill.
Salix alba L.
Ulmus campestris L.
Acer pseudoplatanus L.
Rhamnus cfr. *frangula* L.

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) M. Cassetti, *Da Avezzano a Sulmona. Osservazioni geologiche fatte nell'anno 1903 nell'Abruzzo aquilano*, «Boll. R. Comitato Geologico», V, 1904.

(3) I. Chelussi, *Alcune osservazioni preliminari sul gruppo del M. Velino e sulla conca del Fucino*, «Atti Soc. ital. Sc. Nat.», XLIII, 1904.

(4) M. Cassetti, Op. cit.

Esse non risultano molto numerose, ma permettono di stabilire con certezza che il deposito lacustre diffuso lungo la sponda NE del Fucino appartiene al Quaternario, anzichè al Terziario superiore. Infatti tutte le specie determinate sono viventi e fanno parte ancora oggi della flora abruzzese.

Attualmente il *Fagus sylvatica* costituisce sopratutto dei boschi, che si trovano dagli 800 ai 1200 m., come nei dintorni di Pietracamela, ma nel Gran Sasso arriva sino ai 1830 m. ed in altre montagne abruzzesi oltrepassa i 1740 m. Ad altezze superiori agli 800 m. nei boschi di Nerito, di Pietracamela e di Cortino abbondano il *Carpinus betulus* e il *Corylus avellana*, mentre ad altitudini inferiori nei boschi di Cortino, di Pietracamela, del Vomano, della Maiella ecc. si riscontrano la *Quercus robur*, la *Quercus cerris*, la *Castanea sativa*, l'*Alnus glutinosa*, l'*Ulmus campestris* e l'*Acer pseudoplatanus*. Lungo i corsi d'acqua, poi, è assai diffuso il *Salix alba*.

La specie, che comprende il maggior numero di esemplari nella florula studiata, è il *Fagus sylvatica*, il quale doveva formare degli estesi boschi sulle alture sovrastanti al lago, che allora esisteva. Alquanto più in basso, in una zona submontana, prosperavano i Castagni, le Quercie, il *Corylus avellana*, l'*Alnus glutinosa*, il *Carpinus betulus*, l'*Ulmus campestris*, l'*Acer pseudoplatanus*; infine lungo i margini del lago si estendeva una vegetazione, che subiva l'influenza delle acque e della quale faceva parte integrante il *Salix alba*. Le varie specie determinate, le quali appartengono a diverse zone altimetriche, si trovano riunite nello stesso sedimento, giacchè i corsi di acqua o il vento riuscirono a trasportare sul lago anche le foglie degli alberi, che si trovavano a notevole altezza. Queste, così, poterono fossilizzarsi insieme a quelle, che crescevano sulle rive o a breve distanza da esse.

L'insieme della florula delle argille di Magliano de' Marsi, caratterizzata dalla assenza delle Conifere, attesta un clima temperato, forse più umido dell'attuale, ma non più dolce, mancandovi alcune forme proprie dell'Europa meridionale e dell'Asia Minore, come il *Rhododendron ponticum*, l'*Acer neapolitanum*, l'*Acer obtusatum* ecc. La massima parte delle specie sono comuni ai giacimenti quaternari della Lombardia, del Lazio e dell'Ascolano, i quali appartengono alla 3ª Infraglaciale. Ma probabilmente, data l'assenza delle specie pontiche, molto diffuse in quest'ultimo periodo, il deposito lacustre di Magliano de' Marsi è alquanto più recente, cioè posteriore al Würmiense e corrisponde alla fase contraddistinta nell'Europa centrale dallo sviluppo del Querceto misto, accompagnato da un clima temperato–marittimo.

Mineralogia. — *Vesuviana del Monte Spinosa nel Campigliese* [1]. Nota di F. Rodolico, presentata [2] dal Corrisp. P. Aloisi.

Durante alcune escursioni nel Campigliese, fatte allo scopo di studiare le rocce eruttive della regione [3], ho avuto occasione di raccogliere campioni di tre minerali, vesuviana, tremolite e diopside, che non erano stati precedentemente osservati. Mi occupo in questa Nota della vesuviana, riservandomi di descrivere la tremolite ed il diopside in una prossima pubblicazione.

La vesuviana è stata già ricordata tra i minerali del Campigliese, ma credo che ciò sia derivato da una svista. Secondo von Rath, nella zona di contatto tra porfidi e marmi, rocce da lui descritte, non si osservano minerali di origine metamorfica come granato e vesuviana; anzi egli esclude senz'altro la possibilità della loro formazione, data la composizione chimica della roccia sedimentaria adiacente a quella eruttiva [4]. Senonchè nella traduzione del lavoro di von Rath, pubblicata dal Lotti, si legge questo passo: « Il limite tra il marmo e la roccia eruttiva è brusco; non si osservano speciali fenomeni di contatto, se pure non debbansi ritenere come tali la presenza del granato e della vesuviana » [5]. Il De Stefani ripete tale notizia attribuendola a von Rath ed aggiungendo che si tratta « evidentemente di metamorfismo di contatto per acque posteriori » [6], ma il Lotti più non la riferisce nelle successive sue pubblicazioni sul Campigliese.

Ho raccolto in posto i campioni di vesuviana sulle pendici settentrionali del Monte Spinosa; questo monte e l'adiacente Monte Rombolo sono prevalentemente costituiti da marmi che passano gradatamente nei tipici calcari liassici della regione. La conversione dei calcari in marmi è dovuta, secondo il Lotti, a fenomeni di metamorfismo di contatto giacchè tra i due monti, nella valle del Botro ai Marmi, affiora un piccolo lembo di granito [7];

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Il mio studio sulle rocce eruttive del Campigliese è di imminente pubblicazione.

(4) G. von Rath, *Geognostisch-mineralogische Fragmente aus Italien, VII Die Berge von Campiglia in der Toskanische Maremme*, « Zeitschr. der Deutsch. geolog. Gesellschaft », XX, 329 e 348 (1868).

(5) G. von Rath, op. cit. Traduzione di B. Lotti, « Boll. del R. Comitato geol. », VIII, 295 (1877).

(6) C. De Stefani, *I vulcani spenti dell'appennino settentrionale*, « Boll. della Soc. geol. ital. », X, 465 (1892).

(7) B. Lotti, *Le rocce feldspatiche dei dintorni di Campiglia Marittima (Toscana)*. « Boll. del R. Comitato geol. », II, VIII, 27 (1887).

la vesuviana si trova nella zona di contatto tra granito e calcari e la sua origine si deve certamente all'azione esercitata dalla roccia eruttiva su quella sedimentaria. La diffusione del minerale è molto limitata, ma nella località dove ho raccolto i campioni, il calcare è pieno zeppo di vesuviana cristallizzata.

I cristalli si possono facilmente isolare trattando con acido acetico la roccia che li racchiude; il loro abito è prismatico e la loro grandezza oscilla tra meno di un millimetro e quasi un centimetro nella direzione dell'asse quaternario. I cristalli più piccoli sono molto nitidi, mentre quelli di maggiori dimensioni sono sempre più o meno fortemente cariati. Al goniometro ho potuto constatare soltanto la presenza dei due prismi, {110} e {100}, giacchè i cristalli non sono quasi mai terminati; solo in due cristallini piccolissimi ho notata, per mezzo del microscopio, l'esistenza di una bipiramide non determinabile e della base. E sempre al microscopio ho potuto osservare che talvolta le facce dei prismi presentano una finissima striatura normale agli spigoli della zona [001].

Il colore dei cristalli dipende dalla loro grandezza e sfuma dal verdolino chiaro nei più piccoli che sono trasparenti, al marrone in quelli più grandi ed opachi. Nelle sezioni sottili il minerale è incoloro e non presenta tracce di struttura zonata.

Nella vesuviana di Campiglia mancano di solito quelle anomalie ottiche così frequenti nel minerale proveniente da altre località; infatti le sezioni perpendicolari all'asse principale, osservate a luce convergente, mostrano una figura d'interferenza uniassica negativa, normale tanto per la forma delle isogire, quanto per la successione dei colori nelle curve isocromatiche. Tutt'al più si può forse talvolta notare un leggero accenno di biassicità. Ho eseguito la determinazione degli indici di rifrazione su cristallini estremamente piccoli, mediante ripetuti confronti con liquidi a indice noto, ottenendo i seguenti risultati:

$$\omega = 1.702 \quad ; \quad \varepsilon = 1.700$$

$$\omega - \varepsilon = 0.002$$

Valori così bassi per gli indici di rifrazione non sono frequenti nella vesuviana, ma sono già stati qualche volta osservati; così lo Zambonini [1], in un cristallo giallastro del Vesuvio, ha misurato:

$$\omega_{Na} = 1.7032 \quad ; \quad \varepsilon_{Na} = 1.7004$$

$$\omega - \varepsilon = 0.0028$$

Il carattere negativo della birifrazione si accorda con la presenza del fluoro nel minerale; sembra infatti che i cristalli di vesuviana fluorifera

(1) F. Zambonini, *Mineralogia vesuviana*, Napoli 1910, p. 268.

siano sempre otticamente negativi, mentre quelli di vesuviana priva di fluoro sono ora positivi ora negativi [1].

L'analisi chimica, eseguita su materiale scelto con la massima cura, mi ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	36.30	0.602	0.623
TiO_2	1.65	0.021	
Al_2O_3	17.35	0.170	0.184
Fe_2O_3	2.27	0.014	
B_2O_3	ass.	—	
FeO	2.04	0.028	0.750
MnO	0.11	0.001	
CaO	35.14	0.627	
MgO	3.35	0.083	
K_2O	0.10	0.001	
Na_2O	0.61	0.010	
F_2	1.78	0.047	0.066
H_2O +	0.34	0.019	
H_2O —	0.06	—	
	101.10		
— O = 2F	0.73		
	100.37		

Peso specifico = 3.404

Se si ammettono le sostituzioni indicate accanto alle percentuali ottenute nella analisi, si possono calcolare i seguenti rapporti:

$$R^{IV}O_2 : R^{III}_2O_3 = 10 : 2.95$$

$$R^{IV}O_2 : R^{II}O = 10 : 12.04$$

$$R^{IV}O_2 : H_2O + F_2 = 10 : 1.05.$$

(1) F. Becke, *Ueber den Zusammenhang der physikalischen Eigenschaften mit der chemischen Zusammensetzung der Silicate*, in C. Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, Dresden 1914, II, 1, 26.

Questi risultati bene si accordano con la formula ottenuta per la prima volta dal Weibull [1] e che Groth e Mieleitner [2] così scrivono:

$$[SiO_4]_5\,[Al(OH,F)]\,Al_2Ca_6$$

È stato già osservato come talvolta nella vesuviana la quantità del calcio sia cinque volte maggiore della somma degli altri elementi bivalenti e di quelli monovalenti, questo fatto si verifica abbastanza bene anche per la vesuviana del Campigliese nella quale:

$$(Mg\,,\,Mn\,,\,Fe'')O + R'O\,:\,CaO = 1\,:\,5.09\,.$$

Secondo Groth e Mieleitner nella vesuviana una parte del titanio, come elemento trivalente, può sostituire l'alluminio. L'esistenza, nella vesuviana del Campigliese, di titanio trivalente sarebbe possibile, ma se ciò effettivamente si verificasse, cesserebbe l'accordo con la formula di Weibull. D'altra parte il Machatschki ha recentemente ottenuta per la vesuviana la seguente *Summenformel* [3]:

$$\mathbf{X}_{19}\mathbf{Y}_{13}\mathbf{z}_{18}\,[O\,,\,OH\,,\,F]_{76}$$

che preferisce di scrivere:

$$6\,(\mathbf{X}_3\mathbf{Y}_2\mathbf{z}_3\,[O\,,\,OH\,,\,F]_{12}) + \mathbf{X}\mathbf{Y}\,[OH\,,\,F]_4$$

dove:

$$\mathbf{z} = Si\ ,\ (Al)$$

$$\mathbf{Y} = Al\ ,\ Fe^{III}\ ,\ Fe^{II}\ ,\ Mg\ ,\ Ti\ ,\ (Mn)$$

$$\mathbf{X} = Mn\ ,\ Ca\ ,\ K\ ,\ Na\,.$$

In questa formula i cationi sono aggruppati secondo il loro raggio atomico, senza tenere conto della loro valenza; questo metodo deriva dai lavori di V. M. Goldschmidt ed è strettamente collegato con le ricerche strutturali. Uno studio completo sulla struttura della vesuviana non è stato ancora pubblicato, ma i primi risultati ottenuti da Gottfried e dello stesso Machatschki, secondo quest'ultimo autore, bene si accordano con la nuova formula. Ecco i risultati ai quali si perverrebbe applicando la formula di Machatschki alla vesuviana del Campigliese:

(1) M. Weibull, *Studien über Vesuvian*, «Zeitschr. fur Kryst.», XXV, 13 (1896).

(2) P. Groth e K. Mieleitner, *Mineralogische Tabellen*, München, 1921, p. 87.

(3) F. Machatschki, *Die Summenformel des Vesuvians etc.*, «Centralblatt f. Mineralogie etc. - Abt. A.» 284 (1930).

Si	602	$639 = \mathbf{z} = 18 \times 35.5$
Al	37	
	303	
Ti	21	$463 = \mathbf{Y} = 13 \times 35.6$
Fe^{III}	28	
Fe^{II}	28	
Mg	83	
Mn	1	$650 = \mathbf{X} = 19 \times 34.2$
Ca	627	
Na	20	
K	2	
OH	37	
F	94	

Il fattore relativo al gruppo **X** differirebbe di una unità da quello dei gruppi **z** e **Y** mentre teoricamente i tre numeri dovrebbero essere uguali, ma anche in uno degli esempi riportati dal Machatschki la differenza tra valori teorici e valori sperimentali è dello stesso ordine di grandezza.

Biologia (Idrobiologia). — *Osservazioni preliminari sulle modificazioni idrobiologiche avvenute nel Lago di Nemi durante e in seguito ai lavori di abbassamento eseguiti per il ricupero delle navi Romane* [1]. Nota di U. D'Ancona e Luisa Volterra-D'Ancona, presentata [2] dal Socio F. Silvestri.

Allo scopo di vedere se l'abbassamento del livello del lago di Nemi, eseguito per ricuperare le due navi Romane in esso sommerse, determinava delle modificazioni alle condizioni idrobiologiche del lago e anche allo scopo di meglio esplorarne la fauna litoranea, che poteva essere più facilmente esaminata lungo le rive che man mano venivano scoperte, furono da noi iniziate a cominciare dal 23 novembre 1928 delle regolari esplorazioni faunistiche lungo le rive del lago.

Veramente a indagare più dettagliatamente le conseguenze di questa esperienza in grande sulla biologia del lago sarebbe stato consigliabile di condurre parallelamente delle ricerche idrografiche sulle condizioni fisiche e chimiche del lago e di eseguire periodicamente prelevamenti di materiale tanto planctonico che bentonico litoraneo. Ragioni di residenza ci resero

(1) Dall'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Siena.
(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

impossibile l'eseguire tali ricerche parallele con una periodica regolarità, perciò, onde non lasciar sfuggire all'osservazione idrobiologica una esperienza fortuita di sì vasta portata, che certamente doveva offrire delle interessanti osservazioni, e poichè altri non si erano accinti a tali ricerche, abbiamo creduto conveniente di iniziare un programma di lavoro più ristretto limitandoci a ripetere, con una periodicità più o meno regolare, delle esplorazioni faunistiche e necessariamente anche in parte floristiche lungo tutte le rive del lago. Con minor frequenza abbiamo fatto anche delle pescate planctoniche, che si presentavano particolarmente interessanti per il fatto che il plancton del lago di Nemi era stato da uno di noi (L. Volterra-D'Ancona) abbondantemente esplorato in passato durante parecchi anni [1].

Il lago di Nemi presentava prima dei lavori una lunghezza di m. 1750, una larghezza massima di m. 1300, un perimetro di m. 5500, una superficie di 167 ettari. La profondità massima era di m. 34 [2]. Conformemente alla configurazione del terreno circostante, le rive del lago erano a pendio relativamente forte, coperto di pietrame incoerente, lungo tutto il margine orientale, meridionale e occidentale, specialmente lungo quello meridionale sotto il paese di Genzano. Invece lungo il margine settentrionale sotto Monte Cavo, di fronte alla distesa pianeggiante detta « il Giardino », si aveva una riva a pendio dolce, coperta di sabbia vulcanica. In corrispondenza a questo aspetto delle rive, anche il pendio subacqueo era più ripido lungo i margini meridionale, occidentale e orientale che degradano verso la maggior profondità del lago posta nella sua parte SO; invece il pendio subacqueo nel tratto settentrionale era poco inclinato, per cui una estesa porzione del lago presentava piccole profondità.

L'emissario artificiale, posto nella parte SO, sotto il convento dei Cappuccini, manteneva al lago, alimentato da un ristretto bacino imbrifero [3] e in cui si versano pochi miseri torrentelli, un livello quasi costante. Per questa ragione la vegetazione si spingeva fino al livello dell'acqua e fino a poca distanza dalle rive si estendevano le culture a vigna, a frutteto, a orto. Lungo tutte le rive a pendio forte fino al livello dell'acqua si trovavano abbondanti alberi, arbusti e vegetazione erbacea che conferivano al lago il suo caratteristico aspetto pittoresco. Sparsi lungo queste rive crescevano dei ciuffi di canne (*Phragmites communis* Trin.) emergenti dall'acqua. Molto esteso era poi il canneto lungo tutta la riva settentrionale pianeggiante.

(1) Volterra L., *Dafnie pelagiche di due laghi dell'Italia centrale.* « Int. Revue ges. Hydrobiol. », Bd. XV, 1926; Volterra-D'Ancona, *Ulteriori osservazioni sulla « Daphnia cucullata » del lago di Nemi.* « Ibid. », Bd. XVIII, 1927.

(2) Marinelli O., *Escursione ai laghi laziali.* « Riv. Geogr. Ital. », Firenze, Anno III, 1896; De Agostini G., *Esplorazioni idrografiche nei laghi vulcanici della provincia di Roma.* « Boll. Soc. Geogr. It. », Roma, vol. XI, Ser. III, n. 2, 1898; Riccardi R., *I laghi d'Italia.* « Boll. Soc. Geogr. It. », 1925, fasc. 10-12.

(3) Superficie del bacino imbrifero kmq. 10.54.

Onde vedere quali modificazioni intervenivano nelle condizioni faunistiche e floristiche delle rive del lago furono eseguite delle accurate ricerche lungo tutto il perimetro del lago, raccogliendo abbondanti saggi di materiale, sia galleggiante che di fondo, alle seguenti date, quando si avevano gli abbassamenti di livello a fianco indicati:

1)	23	novembre	1928	m.	1,25
2)	15	febbraio	1929	»	4,15
3)	8	maggio	1929	»	6,77
4)	19	luglio	1929	»	9,70–9,80
5)	4	novembre	1929	»	12
6)	10	gennaio	1930	»	13,60
7)	8	aprile	1930 circa	»	14
8)	25	luglio	1930 »	»	14
9)	16	ottobre	1930 »	»	14
10)	29	dicembre	1930	»	15,30

Raccolte planctoniche furono invece eseguite soltanto nelle esplorazioni più recenti e furono consigliate dal fatto di aver trovato il 10 gennaio 1930 lungo le rive S e SE del lago abbondanti efippi che all'esame risultarono di *Daphnia cucullata* [1]. Allo scopo di vedere il comportamento di questa e dell'altra dafnia di Nemi (*D. longispina*) furono perciò fatte pescate planctoniche:

1) il 15 gennaio 1930; 2) l'8 aprile 1930; 3) il 25 luglio 1930; 4) il 16 ottobre 1930; 5) il 29 dicembre 1930.

Nella prima esplorazione litoranea del 23 novembre 1928, quando il livello del lago era abbassato soltanto di poco, si vedevano scoperti i primi tratti della riva subacquea, formata come s'è detto lungo i margini E, S e O prevalentemente da pietrame incoerente: bombe vulcaniche, blocchi di lava e di peperino probabilmente franati nel corso del tempo lungo le pareti rocciose del cratere vulcanico. In mezzo a questo pietrame apparivano scoperte le radici degli alberi crescenti intorno all'acqua. Alternati ai tratti sassosi si notavano meno estesi dei tratti ricoperti da sabbia. Lungo queste rive apparivano dei ciuffi di canne, crescenti in parte in mezzo alle pietre, col piede già in gran parte emerso. La vegetazione acquatica era rappresentata ancora da una fascia litoranea di *Myriophyllum spicatum* L. [2].

A cominciare dalla « Casa dei Pescatori », dove press'a poco si trovava la prima nave romana, fino circa alla località detta « il Crocifisso »

(1) Volterra-D'Ancona L., *Ancora della « Daphnia cucullata » di Frederiksborg ambientata nel Lago di Nemi.* « Int. Revue ges. Hydrobiol. Hydrograph. » (in corso di pubblicazione).

(2) Dobbiamo la determinazione delle piante alla cortesia del prof. Cesare Sibilia, cui vanno i nostri vivi ringraziamenti.

la riva settentrionale, pianeggiante a abbondante canneto, presentava un tratto di fondo emerso molto più cospicuo che non lungo le altre rive a pendio ripido. In questo tratto la zona emersa appariva coperta da melma, formata in gran parte da materiali organici, le canne presentavano in gran parte la porzione inferiore del fusto e le radici emerse. Lungo la riva settentrionale a canneto mancavano invece i *Myriophyllum*.

Nelle esplorazioni successive gli aspetti del pendio emerso non appaiono essenzialmente diversi. Lungo le rive O, S ed E il pendio è in genere rilevante (30–40°). La vegetazione terrestre è già notevolmente lontana dal livello dell'acqua; le cannucce sono pure abbastanza lontane e vanno man mano seccandosi. La vegetazione acquatica a *Myriophyllum* è scarsa poichè gran parte di quella originaria è rimasta scoperta e si è seccata. Nei tratti a pendio più ripido, specialmente sotto Genzano, in vari punti il terreno incoerente, non più contenuto dalla pressione delle acque, è franato nel lago trascinando seco anche gli alberi più prossimi all'acqua. Nella parte settentrionale a canneto estesi tratti del terreno melmoso già abbondantemente impregnato di acqua, per il ritiro di questa si sono venuti man mano disidratando e per conseguenza hanno ceduto abbassandosi in alcuni punti anche di qualche metro.

Quando si cominciò ad arrivare sotto i 9 metri dal livello primitivo (luglio 1929), sotto i pendii ripidi sassosi delle rive E, S e O, cominciarono ad apparire in molti punti dei tratti a pendio meno inclinato formati da sabbia nera vulcanica frammista a melma di origine organica. In molti punti il pendio emerso presentava un profilo nettamente concavo, poichè man mano che si scendeva l'inclinazione della riva diminuiva, diventando più pianeggiante dove cessava il tratto coperto da pietre e cominciava il livello più basso sabbioso o melmoso. Le zone sassose emerse andavano man mano ricoprendosi di nuova vegetazione erbacea. Nella parte settentrionale del lago era estesamente scoperto il terreno melmoso che si era andato pure ricoprendo di vegetazione erbacea. La vegetazione acquatica lungo tutte le rive era molto scarsa; si notavano soltanto pochi ciuffi sparsi di *Myriophyllum*. Era invece abbondante il fitoplancton accumulato dal vento specialmente lungo il battente dell'acqua.

Il 4 novembre 1929, a 12 m. sotto il livello primitivo, le condizioni delle rive erano press'a poco simili a quelle già viste. Lungo le rive si vedeva frequente la *Lemna minor* L. I *Myriophyllum* erano diventati più abbondanti e sul fondo pianeggiante a poca distanza dalla riva formavano tutta una cintura, più larga lungo la riva settentrionale. Sul terreno molle scoperto nella parte settentrionale tornavano a germogliare le canne, però non lungo l'acqua.

Durante tutto l'anno 1930 il livello dell'acqua si è mantenuto quasi costantemente a circa 14 m. sotto quello primitivo, nel dicembre è sceso a circa 15,80 per poi risalire a 15,30. Le rive sono quasi tutte melmose

o sabbiose a pendio più dolce, soltanto sotto Genzano c'è ancora qualche tratto sassoso in cui il pendio scende ripidamente fino all'acqua. In genere il pendio diminuisce scendendo verso l'acqua e da sassoso che è in alto presso il livello primitivo, va diventando sabbioso e melmoso in basso.

Come nella primavera dell'anno precedente, anche nel 1930 si è notata una notevole abbondanza di filoplancton, specialmente accumulato in superficie verso la riva meridionale spintovi dal vento. La vegetazione acquatica a *Myriophyllum* come l'anno precedente si è sviluppata specialmente in estate-autunno. In confronto agli anni precedenti è diventata però molto più abbondante e a causa della maggior estensione dei bassi fondi litoranei, dovuta al più lieve pendio, ha invaso una zona molto più estesa. Nell'ottobre alla superficie emergevano i germogli fioriferi su una larga cintura circondante tutto il lago, particolarmente ampia lungo il margine settentrionale e chiaramente visibile anche dall'alto da notevole distanza; l'intrico della vegetazione alla superficie era tanto fitto da poter soltanto difficilmente esser attraversato dalla barca.

Unitamente ai *Myriophyllum* si notavano pure l' 8 aprile 1930 dei ciuffi di *Veronica anagallis* L. e il 16 ottobre 1930 degli esemplari di *Naias marina* L. In mezzo a questa vegetazione abbondava la *Lemna*. In dicembre lungo la riva settentrionale c'erano pure dei gruppi di *Thipha latifolia* L.

Nel complesso si osserva un notevole aumento della vegetazione acquatica; è quasi scomparsa lungo l'acqua la vegetazione a canne (vegetazione verticale) è invece straordinariamente aumentata la vegetazione propriamente acquatica data prevalentemente dal *Myriophyllum*; si ha così una vegetazione del tipo di quella che Sella indica col nome di vegetazione orizzontale [1].

Quali le conseguenze di questo cambiamento della vegetazione sulla fauna del lago? L'abbondante materiale raccolto nelle varie esplorazioni del lago attende ancora di essere completamente esaminato, perciò non è ancora possibile anticipare notizie dettagliate. Però fino da ora un fatto appare evidente. L'abbondante vegetazione subacquea litoranea ha aumentato il ricambio organico del lago aumentando sia la quantità di materia organica che viene formata, sia verosimilmente l'ossigenazione delle acque. Perciò, mentre prima le acque erano in genere limpide e povere di materiali organici, ora, specialmente alle rive, l'acqua stagnante in mezzo alla vegetazione si presenta ricca di materiali organici sospesi. Più abbondante si è formato anche, come si è detto, il fitoplancton. Da tutto ciò appare immediatamente che le condizioni trofiche del lago sono migliorate. Il lago in origine, se-

(1) Grassi B. e Sella M., *Seconda relazione della lotta antimalarica a Fiumicino (Roma).* Direz. Gen. Sanità pubblica. Roma 1920.

guendo la classificazione dei laghi introdotta dal Naumann [1], era di tipo prevalentemente oligotrofico, ora invece possiamo considerarlo prevalentemente eutrofico o per lo meno avviato a divenirlo.

Il ripercuotersi di tale circostanza sulla fauna del lago sarà una necessaria conseguenza, i cui effetti si vedranno forse meglio di qui ad alcuni anni. Gli effetti sullo zooplancton appaiono però ben evidenti già fin da questo anno e possono essere facilmente valutati da chi per parecchi anni lo ha seguito nelle varie stagioni.

Il 10 gennaio 1930, com'è già stato detto, fu rilevata lungo le rive S e SE del lago una enorme abbondanza di efippi galleggianti, facilmente osservabili a occhio nudo come un pulviscolo bruno che dal vento veniva respinto verso le rive. Questi efippi, che all'esame risultarono di *D. cucullata*, continuarono a osservarsi in minor quantità ancora nella pescata dell'8 aprile. Tale fatto ci apparve subito molto interessante perchè in tutto il periodo 1922–26, in cui il lago fu da noi estesamente esplorato, mai erano stati notati degli efippi galleggianti.

Forse ancora più sorprendente fu il fatto rilevato il 9 ottobre. Verso le ore 12,30 fu fatta con un comune retino una raccolta di plancton a profondità varie fino a 10 m. Dopo una pesca di circa 10 minuti il retino tirato alla superficie apparve talmente pieno di plancton da formare come una densa poltiglia che otturava completamente l'apertura inferiore del retino stesso. La quantità di plancton in tal modo rapidamente raccolta fu di gran lunga maggiore di quante erano state da noi mai notate neanche nelle più ricche pescate di plancton nel lago di Nemi o in alcun altro lago laziale. All'esame microscopico questo plancton risultò costituito per la grandissima parte di Dafnie, fra le quali prevalenti le *D. cucullata*, giovani e adulte con elmo molto lungo e maschi; meno abbondanti, ma sempre molto numerose le *D. longispina*, pure giovani e adulte. Inoltre erano presenti numerosi Copedodi, frequenti le *Leptodora*, qualche *Diaphanosoma*. Abbondava pure il fitoplancton.

Anche nella pescata del 29 dicembre si notò una straordinaria abbondanza di plancton. Particolarmente colpiva l'attenzione la enorme quantità di fitoplancton (*Melosira*, *Asterionella*), mai vista in precedenti pescate. Lo zooplancton era dato da dafnie delle due specie, fra cui *cucullata* giovani e adulte, *Leptodora* numerose. In confronto alle pescate compiute negli anni precedenti, si osservava una notevole diminuzione di *Diaphanosoma*, erano meno frequenti anche i Copepodi e i Rotiferi, non si notavano dei *Ceratium*. Come nell'inverno passato si rilevavano abbondanti efippi galleggianti in mezzo alla vegetazione litoranea dei *Myriophyllum*.

(1) Naumann E., *Einige Grundlinien der regionalen Limnologie.* « Lunds Universitets Arskrift. » N. F. Avd. 2, Bd. 17, n. 8, 1921; Thienemann, *Die Binnengewässer Mitteleuropas*. Stuttgart 1925.

Nel complesso è dunque possibile dire fin da ora che il plancton si è fatto molto più abbondante che in passato. È verosimile che tale fatto sia dovuto all'aumento della vegetazione litoranea, al miglioramento delle condizioni trofiche del lago [1].

L'aumento delle condizioni trofiche del lago potrà certamente avere anche delle conseguenze pratiche sulla pescosità del lago, che dovrà presumibilmente aumentare.

Il fatto che in questi ultimi tempi la *D. cucullata*, che come si è altrove detto, è stata nel 1914 immessa artificialmente nel lago, si è fatta più frequente che la *D. longispina* indigena può forse essere piuttosto ascritto alle mutate condizioni dell'ambiente lacustre, che non al solo fatto di concorrenza vitale tra le due specie per l'introduzione della prima nel nuovo ambiente. Tale idea sembra confermata dalle diverse proporzioni quantitative notate in genere per i vari planctonti.

Queste le principali osservazioni sulle modificazioni idrobiologiche del lago, osservazioni che naturalmente verranno da noi controllate negli anni venturi e completate coll'esame del materiale raccolto.

Biologia. — *Il valore biologico dei prodotti del suolo letamato o concimato.* Nota di G. Tallarico, presentata dal Socio F. Bottazzi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Si sarebbe anche potuto prevedere che la diminuzione di volume della massa acquea, addensando la fauna del lago, portasse come conseguenza una diminuzione di ossigenazione e di nutrimento. Ciò si sarebbe potuto verificare però soltanto nel caso di un abbassamento rapido del livello senza che ci fosse stato il tempo di compensi regolatori. Invece la lentezza della diminuzione complessiva della massa acquea ha nel caso nostro dato tutta la possibilità di stabilirsi dei compensi equilibratori tra la flora e la fauna del lago.

Botanica (Agraria). — *Il sovescio intercalare tempestivo in granicoltura.* Nota di G. Tallarico, presentata[1] dal Socio N. Parravano.

Nelle regioni caldo-aride la produzione agraria in genere e quella del grano in specie è modesta rispetto alla produzione delle zone freddo-umide. Questa modestia produttiva è specialmente causata da due fattori: l'acqua e la sostanza organica.

L'acqua mateorica per la sua scarsezza e più ancora per la irregolarità delle precipitazioni, la sostanza organica per la sua deficienza assoluta e relativa. Infatti, per limitarci alla sola Italia, in tutta la parte meridionale e nelle isole si ha una media annuale di precipitazione che non supera i 500 mm.; quindi è da considerarsi paese semi-arido, dove la tecnica agraria da applicarsi deve essere diretta ad ottenere da tali umidità la massima utilizzazione possibile specie, quando si pensi che ai danni della scarsezza idrica si aggiungono quelli più gravi della mal ripartizione delle pioggie, le quali, in media, in tre annate su dieci, vengono a difettare proprio nel periodo più sensibile e più critico dello sviluppo granario, durante cioè la fecondazione e la formazione embrionale, quando la pianta avrebbe bisogno della massima disponibilità idrica; invece, cadono in eccesso specie nel periodo autunnale, interferendo allora negativamente durante i lavori della semina e della germinazione.

Accanto a questo stato di cose, d'ordine meteorico, c'è poi la scarsezza della materia organica dipendente, nei paesi a clima arido, non solo da una minor produzione, ma anche da un maggior consumo: da una minor produzione, perchè, a causa della scarsezza di acqua, modesto è lo sviluppo della vegetazione sia spontanea che coltivata, e perchè a causa di peculiari condizioni ecologiche, speciali fattori luminosi di ordine chimico e radioattivo avrebbero creato un ambiente eminentemente adatto alla esagerazione dei processi riproduttivi ed alla attenuazione di quelli somatici e quindi vegetativi. Ma la scarsezza di *humus* dipende poi da un maggior consumo, perchè nei climi aridi abbonda l'aria nel suolo, anche nei terreni a grana fine, e quindi una più attiva ossigenazione e, di conseguenza, un consumo della materia organica più rapido ed intenso.

Per rimediare completamente alla deficienza idrica ben poco noi possiamo fare per il momento, salvo il giorno in cui la bonifica integrale e l'energia elettrica non metteranno l'agricoltore meridionale in condizioni di servirsi dell'acqua a sua volontà; per rimediarvi parzialmente poi c'è tutta

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

quella somma di pratiche agrarie che formano il sistema del Dry Farming e che consiste nell'applicare tutti i mezzi per ottenere la massima utilizzazione dell'acqua meteorica, immagazzinandola nel terreno per la maggior parte possibile, combattendone il disperdimento per quanto è possibile, sia quello causato dall'evaporazione o dal ristagno o dallo scorrimento.

Fra queste pratiche la più comune, la più estesa ed anche la più antica è certo quella del « maggese », cioe del riposo lavorato del terreno durante una intera annata. Il maggese effettivamente aumenta la riserva di acqua nel terreno, rendendolo soffice e permeabile e così elevandone il coefficiente di immagazzinamento per l'acqua meteorica, ma tutti riconoscono che se il maggese è un successo tecnico non lo è del pari dal lato economico, perchè lascia il terreno per una intera annata improduttivo e costituisce, oggi purtroppo, per l'agricoltura meridionale un male necessario.

Per rimediare invece alla deficienza della sostanza organica, anche qui parzialmente, non si può pensare al letame naturale (che sarebbe il mezzo ideale di arricchimento) perchè è appena sufficiente per le culture orticole; e nemmeno a quello artificiale, perchè il problema è ancora nella fase sperimentale; nè si può pensare all'incorporamento delle ristoppie, perchè è pratica di discussa utilità e le ristoppie nei paesi aridi costituiscono qualche volta la sola risorsa foraggera utilizzabile dalla magra popolazione zootecnica; quindi non ci sarebbe che la pratica della concimazione verde o sovescio che certamente è il mezzo più rapido e sicuro per aumentare le riserve organiche del terreno. Ma il sovescio, se è pratica utile e conveniente per i climi umidi non lo è per quelli aridi, dove il sovescio dal lato tecnico perde gran parte della sua importanza, a causa del fatto che la materia organica e l'azoto immessi nel terreno col sovescio primaverile vengono dispersi per effetto di denitrificazione, eremecausi estiva e dilavamento autunnale, e non utilizzate perchè le culture autunno–vernine hanno il massimo bisogno di azoto in primavera, e non in autunno, e cioè, ad un anno di distanza dal sovescio.

Dal lato economico poi non è conveniente perchè il terreno destinato a cultura del sovescio, resta per un intero anno in condizioni di improduttività assoluta e perchè la pianta da sovescio è quasi sempre una buona foraggera ed è peccato non farla utilizzare dall'animale. Ad ovviare la maggior parte di questi inconvenienti di natura idrica e di ordine organico si è ricorsi a questo nuovo metodo del *sovescio intercalare tempestivo* applicato alla granicoltura dei climi aridi. Metodo che non solo somma i benefici idrici del maggese a quelli organici del sovescio, ma ha prerogative sue proprie consistenti in speciali disposizioni favorevoli allo sviluppo ed alla fruttificazione della pianta grano.

La pratica del sovescio intercalare tempestivo consiste nel seminare a bande alterne il grano ed il seme della pianta da sovesciare e di sotterrare

poi nella precoce primavera (fine febbraio prima decade di marzo) la banda della pianta destinata al sovescio, residuando così nel campo culturale striscie di grano in vegetazione separate da striscie libere di terreno maggesato e sovesciato; salvo, nel prossimo autunno, a destinare a grano le striscie maggesate ed a lasciare a sovescio quelle investite a grano nell'annata precedente e così di seguito.

Le striscie sia del grano che quelle del sovescio hanno avuto, nelle parcelle sperimentali, un diametro variante dai 90 a 100 cm. però questo diametro sarà forse modificato e corretto da ulteriori esperienze d'ordine pratico, fino a trovare il giusto termine di misura; perchè se da una parte il diametro della striscia tende a conservare modeste proporzioni in modo che si abbia una più completa utilizzazione radicale da parte del grano sulle disponibilità prossimali idriche ed organiche immagazzinate nella striscia del sovescio e del maggese; d'altra parte il diametro tende ad aumentare e per adattarsi ai comuni strumenti e macchine agrarie, e per una più rapida e sicura individualizzazione delle striscie a lavorazione ultimata pre–semina.

Si è badato anche all'orientamento della striscia: facendo in modo che esso avvenisse secondo la direzione dei venti dominanti della zona (nel nostro caso Ovest–Est) e ciò allo scopo di favorire la circolazione aerea attraverso ai corridoi costituitisi, tanto utile alla salute ed allo sviluppo della pianta. Il materiale da sovescio, nella maggior parte dei casi, è stato fornito da un miscuglio di favette, lupini e senape; in altre è stato dato dalla stessa pianta del grano mediante vere e proprie striscie di scarificazione che venivano operate nella compagine della costituzione campale. La data di questi sovesci ha variato tra l'ultima decade di febbraio e la prima quindicina di marzo, a seconda rispettivamente della precocità o tardività stagionale. L'operazione del sovescio è stata eseguita per mezzo della zappa ed il sotterramento del materiale è avvenuto ad una profondità variabile tra i quindici e i venti centimetri.

Il metodo del sovescio intercalare tempestivo in granicoltura raggiunge i seguenti scopi:

1° mette nel terreno, a disposizione della pianta grano, un quantitativo di sostanza organica relativamente considerevole; data la grande rapidità di sviluppo delle piante adoperate per sovescio. La media di questo quantitativo ha variato da un minimo di 12 quintali per ettaro ad un massimo di 21 e quindi da un minimo di 30 kg. ad un un massimo di 53 kg. di azoto.

2° Fornisce un materiale organico di rapida e pronta trasformazione; perchè da una parte è costituito da tessuti teneri e giovani, e dall'altra, perchè il sovescio avviene in epoca in cui più attivi si iniziano e si svolgono i processi biochimici del suolo favoriti dalle condizioni idriche e termiche della stagione.

3° Provvede un materiale: *a*) ricco in sostanze azotate, non solo perchè formato in massima parte da piante appartenenti alla famiglia delle leguminose, ma da piante sopratutto giovani, quindi a prevalenza foliare e ad alto coefficiente proteinico; *b*) una peculiare qualità di sostanza organica: perchè, pare accertato, che la senape abbia una spiccata azione stimolatrice e di contiguità sul grano; e nel caso del sovescio operato con lo stesso grano si mette a disposizione della pianta un materiale organico proteinico più omogeneo al suo metabolismo e quindi di più facile e rapida assimilabilità.

4° E più che altro, mette questo materiale a disposizione del grano *tempestivamente:* cioè, durante il periodo del suo maggior bisogno nutritivo che va dall'epoca dell'accestimento a quella della fruttificazione; utilizzato, in gran parte, in questo periodo è sottratto alla denitrificazione ed alle eremecause estive, nonchè al dilavamento autunnale.

5° Apre nel campo del grano dei corridoi che, assicurando una più attiva areazione e una più intensa illuminazione, mentre da una parte modera i colpi di calore e quindi i danni della « stretta », dall'altra, conferendo una maggiore vigoria alla pianta e creando un habitat meno propizio allo sviluppo delle puccinie, attenua le perdite del prodotto per attacchi parassitari (ruggine).

6° Apre nel campo del grano dei « canaloni » i quali essendo orientati nel senso dell'orientazione dei venti che prevalgono nella zona, funzionano da smorzatoi della violenza eolica e quindi riducono al minimo le perdite del prodotto causate dall'allettamento.

7° Costituisce nel campo del grano delle striscie maggesate che hanno un più alto potere d'imbibizione, un minore coefficiente di evaporazione, e quindi un più squisito gioco di immagazzinamento e di conservazione idrica, del comune maggese. E ciò a causa della maggior quantità di sostanza organica infossata nelle striscie intercalari e dell'ombreggiatura e quindi della relativa freschezza che queste striscie godono; ombreggiatura operata dai contigui muri vegetali formati dal grano sempre più alti e fitti, a misura che la pianta cresce e che la stagione si avanza più calda. Ciò spiega il maggior contenuto idrico residuale trovato nelle striscie di maggese intercalare in confronto all'umidità rinvenuta nel maggese ordinario; nonostante che a quel magazzino attingessero, per contiguità, continuamente i bisogni idrici della pianta in piena vegetazione e fruttificazione. Infatti nel mese di giugno, a falciatura appena ultimata, mentre nella striscia sovesciata il terreno si mostrava umido alla profondità di 12 cm., nelle parcelle controllo maggesate l'umidità si rinveniva a 16 cm.

8° Il sovescio intercalare tempestivo contribuisce infine efficacemente alla lotta contro le malerbe che tanta parte hanno nel ridurre il rendimento del raccolto; e vi contribuisce perchè la semina fitta del materiale da sovesciare determina una pronta, fitta e rigogliosa vegetazione iniziale che

agendo come cultura soffocante ha la funzione di rinettare dalle malerbe la cultura granaria successiva.

Il sovescio intercalare tempestivo raggiungendo questi scopi aumenta notevolmente la media produttiva granaria nei climi caldo–aridi come risulta dall'esame della seguente tabella riassuntiva compilata in forma sintetica e che comprende i dati culturali ottenuti in un quadriennio sperimentale (1926–1930) nella Stazione Sperimentale Agraria privata di Montagnapiana in quel di Crotone a 400 m. sul livello del mare, adoperando come materiale granario da semina un ceppo locale (Cigna) e come metodo quello delle parcelle moltiplicate comparative. I saggi riguardano tre casi di rotazione quadriennale: una sperimentale e gli altri due funzionanti da controllo, rispecchiano le rotazioni più in uso della zona.

Caso *A* (sperimentale): 1°, 2°, 3°, 4° anno: cultura granaria e contemporaneo sovescio intercalare tempestivo;

Caso *B*: 1° anno: erba o riposo pascolativo. 2° anno: maggese. 3° anno: grano. 4° anno: ringrano (1° controllo);

Caso *C*: 1° e 2° anno: grano. 3° e 4° anno: riposo pascolativo (2° controllo).

Media delle produzioni in Q.li per ettaro di terreno.

Annata agraria	1926-27	1927–28	1928–29	1929-30	Quadriennio
Caso *A* (speriment.)	granella 15.3 (1)	8.2 (2)	18.2 (1)	7.4 (2)	49.1
	paglia 41 (1)	17.2 (2)	45.4 (1)	11.8 (2)	100.4
Caso *B* (rotazione a maggese)	granella	—	24.1	11.2	35.3
	paglia	maggese	58.6	26.3	84.9
	fieno 18.3	—	—	—	18.3
Caso *C* (rotazione semplice	granella 18.7	12.9	—	—	31.6
	paglia 42.2	29.3	—	—	71.5
	fieno	—	18.1	26.0	44.11

(1) Questa è la resa di 3/5 di ettaro perchè gli altri 2/5 sono stati sovesciati.
(2) Questa è la resa di 2/5 di ettaro perchè gli altri 3/5 sono stati sovesciati.

Questi risultati, comprovati da una più estesa sperimentazione che tenga conto anche dei fattori economici e che appiani alcune difficoltà tecniche, dànno all'agricoltura dei climi caldo–aridi col metodo del sovescio intercalare tempestivo un sistema per elevare il reddito della terra utilizzando al massimo il fattore idrico e quello organico che sono i fattori limitanti della produzione granaria.

Fisiologia. — *Sul consumo di glicosio da parte del sistema nervoso centrale isolato e sopravvivente di « Bufo v. »* [1]. Nota di M. Mitolo, presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni.

Si devono a Winterstein e Hirschberg (3) i primi studi sul consumo di glicosio, operato da midolli spinali di rana posti in soluzione fisiologica di NaCl, attraversata da ossigeno e contenente il monosaccaride: l'assenza della membrana piale faceva aumentare il consumo di glicosio; analogo aumento si ebbe per innalzamento della temperatura alla quale si eseguiva l'esperienza, e mediante stimolazione elettrica della sostanza centrale; al contrario, il consumo veniva ridotto se al posto dell'ossigeno si sostituiva una corrente di azoto, o se veniva aggiunto $CaCl_2$ alla sol. fisiologica, o se i midolli spinali erano narcotizzati con alcool etilico o uretano etilico. Nel fatto che mano mano che si prolungava l'esperimento diminuiva il consumo del glicosio da parte del nevrasse di rana, Winterstein vede la prova che il consumo non era dovuto a processi batterici. Lo sminuzzamento a poltiglia dei midolli spinali provocò un più forte consumo dell'esosio, dovuto, secondo l'A., o al realizzarsi di una più estesa superficie di contatto tra sostanza nervosa e zucchero, o ad una liberazione in gran quantità del fermento glicolitico, causata dallo sminuzzamento stesso.

Successive ricerche di Hirschberg (4) stabilirono che non solo il glicosio, ma anche il fruttosio, il galattosio e il lattosio possono essere consumati da midolli spinali di rana, in quantità differente a seconda della specie dello zucchero e delle varie condizioni sperimentali.

Recentemente Martino (5) si è occupato del potere glicolitico di poltiglie di cervello di ratto o di maiale, o di estratti acquosi di cervello di maiale; la scomparsa di glicosio, prodotta dalle poltiglie di sostanza cerebrale nel liquido glicosato in cui esse erano immerse, è stata maggiore per la sostanza grigia che per quella bianca, più forte coll'aumentare della temperatura, più marcata nelle prime 7 ore di esperimento che non nelle successive. Il massimo di glicolisi si è avuto a pH = 6.81; essa si è ridotta per l'azione dell'acido cianidrico; è stata agevolata da alcuni cationi, ed inibita da altri cationi e da tutti gli anioni sperimentati, ad eccezione del fosfatione.

Per avvicinarci sempre più alle condizioni normali in cui si trova il sistema nervoso centrale, abbiamo studiato l'eventuale consumo di glicosio, impiegando l'asse cerebro–spinale di *Bufo v.*, isolato dall'organismo e mantenuto in sopravvivenza (preparato centrale Baglioni): la conservazione del-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Universtà di Roma.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Hirschberg u. H. Winterstein, *Ueber den Zuckerstoffwechsel der nervösen Zentralorgane*, « Hoppe-Seyler's Zeitschr. f. physiol. Chemie », C, 185, 1917.

(4) Hirschberg, *Der Umsatz verschiedener Zuckerarten im Stoffwechsel der nervösen Zentralorgane*, « Hoppe-Seyler's Zeitschr. f. physiol. Chemie », C I, 248, 1918.

(5) Martino, *Sul potere glocolitico della sostanza cerebrale*, « Arch. di Farmac. Sperim. e Scienze Aff. », 1930.

l'attività riflessa è stata ritenuta un criterio di vitalità e quindi di funzionalità del nevrasse isolato. Infatti, ricerche affini, eseguite su sistema nervoso centrale di rospi morti alcune ore prima dell'esperienza, hanno dato, come si vedrà in seguito, risultati non paragonabili a quelli ottenuti con assi cerebro-spinali sopravviventi.

La sostanza nervosa centrale del preparato è stata immersa in 10 cc. di una sol. di NaCl al 0.7 %, in cui era stato disciolto glicosio nella proporzione del 0.1 %; le condizioni sperimentali sono state differenti; la durata dell'esperimento è stata sempre di 2 ore, per evitare da una parte processi fermentativi di natura batterica, e dall'altra che i prodotti acidi, che si formano in quantità notevole dopo tale periodo di tempo per effetto del metabolismo centrale, potessero alterare di molto la reazione neutra della soluzione salino-zuccherina posta a contatto col nevrasse. Su tre campioni di cc. 0.3 di detta soluzione si è eseguita la determinazione del glicosio mediante il secondo micrometodo di Bang; la differenza tra la quantità di glicosio posta a contatto con il tessuto nervoso centrale al principio dell'esperienza, e quella rinvenuta alla fine ha indicato la quantità di zucchero consumata dal nevrasse, a riposo oppure nelle diverse altre condizioni sperimentali. Il consumo di glicosio così ricavato si riferiva al peso dell'asse cerebro-spinale del preparato; con ulteriore calcolo si risaliva al valore in mgr. di glicosio consumato da 1 gr. di sostanza nervosa centrale, in 2 ore di esperimento. Sono state sempre eseguite più prove di controllo, e si è tenuta in considerazione solo la media dei risultati ottenuti per i tre campioni.

Il consumo di glicosio operato dall'asse cerebro-spinale di *Bufo v.* corrisponde a mgr. 3.8423 in condizioni di riposo, per 1 gr. di sostanza nervosa centrale e 2 ore di esperimento. Il sistema nervoso di animali morti induce nella soluzione zuccherina la scomparsa di una minore quantità di glicosio, il che sta ad indicare che la differenza in più di glicosio consumata dai nevrassi dei preparati centrali è legata alla vitalità degli stessi assi cerebro-spinali. Una corrente di ossigeno, che attraversa la soluzione ambiente, fa quasi raddoppiare il consumo, il quale con verosimiglianza è dipendente da processi ossidativi o connessi con questi. Anche l'aumento della eccitabilità riflessa indotto dal solfato neutro di stricnina è seguito da maggiore scomparsa di glicosio dalla soluzione che ne contiene. Al contrario, la narcosi mediante etere etilico porta il consumo dello zucchero a valori inferiori anche a quelli ottenuti con assi cerebro-spinali morti; e l'abbassamento di temperatura da una media di 15° a 7° C. riduce a mgr. 2.85 il consumo del monosaccaride operato dal sistema nervoso centrale di rospo.

Tabella.

mgr. di glicosio consumato da 1 gr. di sostanza nervosa centrale in 2 ore di esperimento.

Numero dell'esperimento	T. Celsius	Glicosio consumato mgr.	Condizioni sperimentali
1	15°	3.0400	a riposo.
2	15°	4.5220	
3	14.5°	3.0250	
4	14.5°	2.9625	
5	15°	4.1569	
6	15°	5.3379	
7	15°	3.8521	
media 1–7	14.5°–15°	3.8423	
8	15°	2.5990	asse cerebro-spinale morto.
9	16°	2.7117	
10	16°	2.9540	
media 8–10	15°–16°	2.7549	
11	15°	7.1360	azione dell'ossigeno (che gorgoglia nella sol. fisiol. e glicosio).
12	7°	2.9625	azione della temperatura.
13	7°	2.7558	
media 12–13	7°	2.8591	
14	15°	7.1830	azione del solfato neutro di stricnina (sol. al 2.5 : 10.000, in sol. fisiol. di NaCl contenente glicosio) (convulsioni tetaniche).
15	15°	8.3920	
16	15.5°	9.0180	
media 14–16	15°–15.5°	8.1976	
17	15.5°	2.5440	azione dell'etere etilico (miscela di etere etil. cc. 0.5 con sol. fisiol. di NaCl e glicosio cc. 9.5) (narcosi).
18	14.5°	1.0935	
19	16°	2.3800	
media 17–19	14.5°–16°	2.0038	

Fisiologia (Fisiologia Vegetale). — *Sui gas contenuti in alcune alghe brune*[1]. Nota di Silvia Colla, presentata[2] dal Socio A. Herlitzka.

Ho altrove comunicato che negli organi idrostatici di Fucus si rinviene un gas formato in gran parte da ossigeno, che varia quantitativamente nelle diverse ore della giornata. Ho voluto continuare le ricerche sulla provenienza e sulle variazioni di O_2 anche in altre alghe brune, che vegetavano nelle medesime località ove si trovavano i Fucus, ma ad un livello più basso sotto il pelo dell'acqua, cioè al di sotto del limite della bassa marea.

Le due specie osservate furono *Cystoseira abrotamifolia Ag* e *Sargassum linifolium* (*Ag*) *Turn*, raccolti a circa 1 m. di profondità sotto il livello della bassa marea.

Il gas venne estratto con modalità diverse a seconda del genere che si aveva in esame.

Per i sargassi si punse una vescica adulta sott'acqua con un ago da iniezione innestato su una siringa di Pravaz.

Per Cystoseira invece ciò non era possibile, infatti le vesciche idrostatiche disposte in catena sono molto piccole, il loro diametro trasversale raggiunge solo in qualche caso 2 mm, per modo che l'ago non può penetrare nella vescica senza determinarne la lacerazione. Perciò si presero delle vesciche di grandezza uniforme (in tal modo erano almeno approssimativamente della medesima età), e mediante un taglio netto ed una leggera pressione si svuotavano tenendole sott'acqua sotto la campanella che costituisce la parte inferiore dell'apparecchio di Krogh. Questa, si intende, era pur essa piena di liquido e immersa nell'acqua stessa.

L'acqua era leggermente acidulata, e ciò per impedire, almeno in parte, lo sciogliersi dell'anidride carbonica.

Per ogni esperimento si dovettero usare due o tre vesciche: i valori che diamo sono quindi la media di una miscela di gas provenienti da organi che però sono nel limite del possibile più eguali tra di loro.

Per i sargassi invece, eccetto qualche caso particolare, fu sufficiente il gas proveniente da una sola vescica.

Le analisi dei gas si fecero con le modalità descritte in Note precedenti.

(1) Dall'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino (Sezione marina di Muggia).

(2) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

Tanto le Cystoseire come i Sargassi vennero tenuti in vasche in cui si trovavano anche dei Fucus e delle Valonie.

Le determinazioni vennero eseguite in un giorno piovoso: diamo qui i risultati delle percentuali di O_2 nelle diverse ore della giornata.

	Ore				
	8	10.40	12.30	14.35	17.30
Sargassum linifolium O_2 %	21.8	30.4	33	27.2	22.6
Cystoseira abrotamifolia O_2 %	22.4	30	33.3	27.3	26

La quantità di CO_2 varia del 3 % all'1 % nelle prime ore del mattino e poi scompare quasi del tutto. Non mi è stato possibile eseguire una serie completa di determinazioni, in una giornata serena, in modo da poter

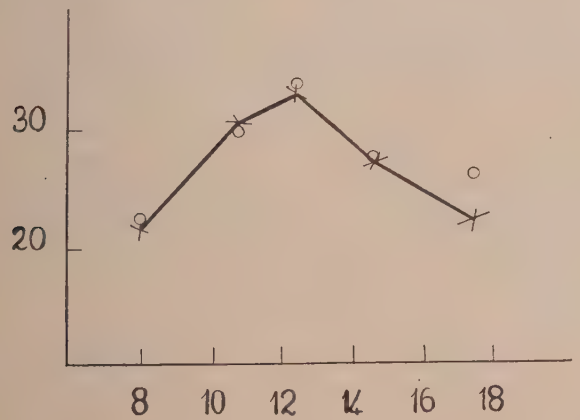


Fig. 1. – Curva della quantità % di O_2 durante la giornata.
I valori segnati con un circolo sono per Cystoseira, con una croce per Sargassum. – Sulle asciste le ore sulle ordinate i valori percentuali di ossigeno.

costruire una curva giornaliera di O_2. Da analisi isolate ho però raccolti i valori percentuali di O_2 che oltrepassano le cifre riportate più sopra.

Per S. *linifolium* la percentuale massima trovata sale fino a 37.8 %, per C. *abrotamifolia* al 38.2 %.

Questi valori sono stati ottenuti da gas prelevati alle ore 11.

Per i sargassi si cercò di rintracciare l'ossido di carbonio (trovato da Langdon in *Nereocystis*) mediante l'emoglobina, ma con esito negativo.

S'analizzò anche in questa specie se il contenuto percentuale in O_2 variasse nelle vesciche a stadii di sviluppo differenti, raccolte, si intende, alla medesima ora; ma si riscontrarono valori sempre corrispondenti. Tuttavia non si può affermare con sicurezza che la miscela del gas sia eguale nelle vesciche adulte giovani e vecchie, senza aver fatto la curva della variazione percentuale giornaliera.

Nel medesimo modo non si può dire che il limite dell'ossigeno nella miscela sia quello trovato nelle giornate di sole, e ciò perchè si potrebbero avere le medesime variazioni individuali che si osservarono nei Fucus.

Dalla curva delle variazioni di O_2 che noi abbiamo qui presentato, si vede che questo gas aumenta parallelamente all'aumento dell'illuminazione. Perciò, analogamente a quanto si è detto a proposito dello svolgimento di O_2 in altre alghe, si deve ammettere che anche per queste due specie le variazioni di O_2 sono da mettere in rapporto con l'attività fotosintetica delle alghe stesse.

È da osservare che i valori ottenuti per queste alghe che vivono a maggiore profondità, ma tenute superficialmente in bacini con dei Fucus, hanno dato valori più bassi di O_2 che non i Fucus o le Valonie, analizzate contemporaneamente, mentre alcuni esemplari di Sargasso e di Cystoseira direttamente raccolti in profondità e subito analizzati, hanno dato valori uguali a quelli degli esemplari delle stesse specie, tenuti alla superficie.

Fisiologia. — *Modificazioni nei tassi glicemico ed idremico in seguito a somministrazione di glicosio e acqua.* Nota di A. Galamini ed E. Serianni, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia (Patologia). — *Sostanze anatossigene e caratteri speciali delle anaesotubercoline* [1]. Nota di G. Finzi, presentata [2] dal Corrisp. A. Dionisi.

La capacità da parte di talune sostanze chimiche di trasformare tossine estremamente attive, in prodotti atossici tollerabili per via sottocutanea e per via endovenosa, anche se iniettati in quantità relativamente grandi, è nozione da tempo (1890) ben nota.

Nel 1917 Vallée e Bazy ottengono una immunità attiva nel coniglio e nell'uomo, mediante la tossina tetanica iodata, resa in tal modo atossica; e Okuda (1923), con identico procedimento, ottiene uguali risultati nella cavia, nella pecora, nella capra e nel cavallo.

A. Berthelot e G. Ramon [3] nel 1925, sulla base degli studi fatti sulle anatossine da quest'ultimo, apportano nuovi interessanti elementi sulla trasformazione delle diverse tossine in anatossine mediante l'azione esplicata da talune sostanze chimiche.

Ciò brevemente premesso abbiamo voluto esperimentare l'azione della soluzione iodoiodurata sulle esotubercoline provenienti da bacilli Koch tipo umano e tipo bovino.

I motivi che ci hanno indotto a tentare nel nostro caso lo studio delle proprietà anatossigene della soluzione iodoiodurata sono i seguenti: prima di tutto perchè questa soluzione ha un'azione meno irritante sui tessuti che non l'aldeide formica; secondariamente perchè il iodio e i ioduri provocano nei soggetti tubercolotici reazioni organiche stimolanti i processi generali di difesa specifica; in terzo luogo perchè il formolo del commercio è un prodotto instabile e mal definito dove l'aldeide formica varia sovente in proporzioni non indifferenti, col pericolo di risultati non sempre assolutamente costanti.

Tecnica di preparazione dell'anaesotubercolina iodata. – Identica a quella indicata nelle precedenti comunicazioni [4]. Il brodo di coltura una volta filtrato su carta, viene trattato con liquido di lugol nelle proporzioni del 1–2–10 %.

L'esotossina che poi chiamiamo ancora anaesotubercolina (A. E. T.) potrà essere impiegata 48–24 ore dopo. Appena immersa la soluzione iodo-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia Speciale Medica del R. Istituto Superiore di Medicina Veterinaria di Milano.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) A. Berthelot e G. Ramon, « C. R. Acc. des Sciences », 28 gennaio 1925, p. 340.

(4) G. Finzi, questi « Rendiconti », X, serie 6ª, 2° sem., fasc. 1–2, luglio 1929; XII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 11, dicembre 1930.

iodurata l'A. E. T. si presenta di un colore caffè scuro, ma dopo pochi minuti si rischiara fino ad assumere il colore e la trasparenza della A. E. T. formolata.

Esperimentata su bovini sani e tubercolotici di differente età e di differente razza, questa nuova anaesotubercolina induce a ripetere tutte le conclusioni esposte, a proposito dell'anaesotubercolina formolata, nelle nostre due prime Note [1], conclusioni che furono più tardi confermate attraverso le ricerche di Sarzi–Sartori [2], di Branchini [3], di Baboni [4], di Soldati [5], di Valcarenghi [6] e di H. R. Heguito, L. J. Murguia, H. Tortorella [7].

Natura della anaesotubercolina (*A. E. T.*). – Dall'epoca di Koch è noto come talune sostanze contenute nei terreni di cultura e solubili in glicerina, possono giustificare delle reazioni manifestantisi accanto all'azione esercitata dal principio attivo specifico della tubercolina.

E numerosi sono i lavori pubblicati, per cura di autorevoli esperimentatori, intesi a distinguere gli effetti veramente dovuti alla tubercolina da quelli derivanti da altre sostanze di natura secondaria.

Per quanto il responso completamente negativo ottenuto con forti dosi di A. E. T. su soggetti non tubercolotici, sani o colpiti da infezioni di altra natura, ci abbia informato sulla natura specifica delle reazioni ottenute, pure noi, a maggiore conferma, abbiamo voluto preparare l'A. E. T. partendo da culture di bacilli tubercolari in mezzi liquidi non improntati al brodo peptonato. Abbiamo perciò allestito delle culture sul mezzo minerale di Baudran [8], a base glicerofosfata, e sul mezzo sintetico di Sauton [9] entrambi capaci di assicurare rapido ed abbondante sviluppo dei germi. Inoltre abbiamo voluto preparare delle culture di bacilli tubercolari umani e bovini anche su terreno semplicemente costituito da acqua distillata glicerinata al 7.5 %.

In queste, dopo 1–2–3–4 mesi, si nota, specie osservando per trasparenza dal basso all'alto, come la superficie del mezzo sia più o meno ricoperta da un velo sottilissimo, liscio, che solo qua e là, in punti nettamente delimitati si ispessisce formando degli isolotti, degli agglomerati biancastri a bordi irregolari, di aspetto secco, rugoso, salienti sulla superficie del mezzo e, nel contempo, lievemente immersi nel terreno stesso.

(1) Loc. cit.

(2) E. Sarzi–Sartori, «Il Moderno Zooiatro», 1929.

(3) B. Branchini, «Profilassi», vol. III, fasc. IV, 1930.

(4) N. Baboni, «Deutsche Tierärztliche Wochenschrift», gennaio, 1931.

(5) R. Soldati, «Profilassi», vol. III, fasc. VI, 1930.

(6) E. Valcarenghi, «Il Moderno Zooiatro», 1931.

(7) H. R. Heguito, L. J. Murguia, A. Tortorella, «Primo Congresso Nazionale di Medicina Veterinaria, Montevideo», dicembre 1930.

(8) Baudran de Beauvais, «C. R. Académie des Sciences», 1910, *150*, p. 1200.

(9) B. Sauton, «C. R. Académie des Sciences», 1912, *155*, p. 1860.

Se si esamina al microscopio questo esilissimo velo in un qualsiasi periodo dello sviluppo della cultura, a colorazione avvenuta, si nota come i bacilli acidi resistenti siano ben rari di fronte al numero considerevole dei bacilli non acido resistenti.

L'A. E. T. ricavata dai mezzi di Baudran e Sauton, da culture di diversa età e a differente grado di sviluppo, è altrettanto attiva dell'A. E. T. ricavata da culture su brodo peptonato glicerinato.

La titolazione della attività di queste A. E. T. fu sempre saggiata e stabilita col mezzo più idoneo: vale a dire col bovino tubercolotico, dove, alla dose di 2 c.c., per via sottocutanea, provocano reazioni termiche e manifestazioni di ordine generale perfettamente identiche a quelle ottenute con A. E. T. proveniente da brodo peptonato glicerinato.

Per esempio: 9 c.c. di A. E. T. ottenuta da mezzo Sauton con un velo di 5–6 giorni, hanno provocato uno sbalzo termico di 3° 6, mentre 5–3-2 c.c. di A. E. T. di 11–15 giorni provocano reazioni termiche esattamente identiche a quelle che già abbiamo illustrato nelle nostre precedenti Note.

L'A. E. T. ottenuta da questi mezzi liquidi minerali e sintetici e da culture di 4–6 settimane è senza azione, anche a dosi di 10–20–30–50 c.c. sui bovini immuni da tubercolosi. L'A. E. T. prelevata o preparata, con la tecnica nota, dal mezzo: acqua distillata glicerinata sterile e da culture di quattro mesi di età, provata ancora su bovini tubercolotici, comparativamente alla A. E. T. mista–polivalente, ha dimostrato possedere proprietà identiche per quanto ad una attività quattro–cinque volte minore.

Ne consegue che sono necessari 4-10 c.c. di questa A. E. T. per ottenere, nei soggetti tubercolotici, reazioni evidenti e dimostrative ai fini della diagnosi. Ma a meglio chiarire la natura della A. E. T. valgono, noi crediamo, le seguenti esperienze:

Se da culture in brodo peptonato glicerinato di 4–6–12–20 settimane di bacilli tubercolari umani o bovini noi aspiriamo il brodo di cultura col quale, mediante il metodo noto, otteniamo l'A. E. T., il velo soprastante per quanto spesso, rugoso e pesante non si spezza, non si frantuma, ma si adagia sempre dolcemente, delicatamente sulla parete e sul fondo del matraccio a misura che il brodo viene aspirato. Una volta questo completamente raccolto, se noi, servendoci della stessa pipetta bolla, riportiamo, deponendolo lentamente sul fondo del matraccio, del brodo peptonato glicerinato sterile, o dell'acqua distillata glicerinata al 5-25 %, o della semplice soluzione fisiologica sterile oppure glicerinata (5-15 %) o dell'acqua distillata con formolo al 5‰, noi vediamo che il velo costituito dalla cultura di bacili tubercolari, si risolleva riportandosi allo stesso livello della cultura origine quando il liquido di sostituzione è introdotto in quantità presso a poco identica a quella del brodo peptonato glicerinato asportato in primo tempo per la preparazione dell'A. E. T. In quei matracci, nei quali al brodo peptonato

glicerinato si sostituisce nuovo brodo peptonato glicerinato, la cultura, se di giovane età, dopo breve arresto, riprende il suo sviluppo oppure non presenta modificazioni di sorta e quindi resta perfettamente identica alla cultura origine.

Se dopo 1-3-6 settimane di soggiorno a 38° noi, con la medesima tecnica preleviamo o il brodo peptonato glicerinato, o l'acqua distillata, o la soluzione fisiologica glicerinata o non, o l'acqua distillata con formolo e aggiungiamo, meno naturalmente che nell'ultimo caso, una soluzione di formolo nella proporzione del 5 °/₀₀; noi otteniamo ancora un liquido ricco di prodotti di ricambio del bacillo di Koch ed avente sempre tutte le proprietà dell'A. E. T.

Se a questo liquido così prelevato noi sostituiamo ancora una volta con la tecnica precedentemente indicata, e mantenendo integro il velo, dell'acqua distillata con formolo al 5 °/₀₀ e dopo altre 4-6 settimane di soggiorno al termostato a 38°, noi la preleviamo nuovamente, abbiamo a disposizione ancora un prodotto *talune volte* avente le proprietà dell'A. E. T. e quindi le proprietà diagnostiche delle tubercoline.

Che cosa contenga questo liquido di 2ª e 3ª decantazione noi non sappiamo precisamente. Albumine? Albumose? globuline in maggiore o minore quantità? francamente non sappiamo. Certamente però contiene delle tossine, dei prodotti di rifiuto, delle scorie, dei veleni solubili dei bacilli di Koch i quali conservano sempre immutate le loro caratteristiche morfologiche e di colorazione.

Per il secondo prelievo, abbiamo detto di aver ottenuto un prodotto avente *sempre* tutte le proprietà dell'A. E. T., mentre, per il terzo prelievo, abbiamo detto di aver ottenuto un prodotto avente *soltanto talune volte* le proprietà dell'A. E. T.

Infatti, eccezione fatta per la sostituzione del brodo peptonato glicerinato, il prodotto di terzo prelievo è inattivo se la sostituzione dell'acqua distillata, o della soluzione fisiologica glicerinata vien fatta dopo il 15° giorno della sua immissione nel matraccio, e se la sostituzione della soluzione con formolo al 5 °/₀₀ vien fatta dopo il 6-8 giorno della sua immissione.

In ogni caso però il prodotto di terzo prelievo è di circa due terzi meno attivo della A. E. T.

Il prodotto di secondo prelievo è invece sempre molto attivo qualunque sia il liquido che ha sostituito il mezzo originale (brodo peptonato glicerinato). Su bovini tubercolotici, dosi di 2-4-6-8-10 c.c. di A. E. T. di secondo prelievo, provocano sbalzi termici che variano da 1°.5 a 3°.5 non rispettivamente corrispondenti alle dosi sopra indicate. Il prodotto è inattivo su individui sani.

È dunque esatta l'affermazione di taluni, e fra questi Calmette, quando affermano, che non c'è alcun parallelismo fra l'attitudine a produrre della tubercolina e la virulenza del germe.

Conclusioni.

L'A. E. T. iodata da noi preparata, come l'A. E. T. formolata, può sostituire la tubercolina bruta nella diagnosi sperimentale della tubercolosi bovina. Anche questa A. E. T. è unicamente improntata ai prodotti di ricambio del bacillo di Koch.

Sulla tubercolina bruta l'A. E. T. iodata ha tutti i vantaggi già riconosciuti alla A. E. T. formolata:

1°: è di preparazione molto più semplice e molto più pratica;

2°: traduce in modo molto più evidente lo stato di ipersensibilità dell'organismo tubercolotico di fronte ai principi tossici del bacillo di Koch;

3°: in dosi proporzionatamente dieci volte più piccole (2 c.c.) della dose comunemente impiegata di tubercolina bruta, dà reazioni termiche più pronte e molto più intense, per quanto molto meno intensi sembrino i fenomeni a carico del focolaio tubercolare;

4°: la gravità dell'infezione tubercolare ed il grado di sensibilità individuale, sembrano intervenire in modo del tutto trascurabile nel provocare reazioni più o meno evidenti;

5°: negli animali non tubercolotici non provoca reazioni di sorta, neppure se sottoposti ad iniezioni di anaesotubercolina a dosi elevate;

6°: meglio della tubercolina bruta si presta a sventare uno stato di « abitudine » o di « adattamento ».

7°: in ogni caso, su animali non febbricitanti, informa con sicurezza sulla esistenza o meno di infezione tubercolare.

Anche questo prodotto diagnostico, in ambiente di allevamento certamente progredito, ha fornito una percentuale di reazioni positive, su bovini da latte, del 90 °/₀.

Questa specificità dell'anatossina tubercolare, indipendentemente dalle sostanze anatossigene, è contraria al concetto che le anatossine rappresentino delle tossine chimicamente modificate.

Le sostanze contenute nei terreni di cultura a base di brodo peptonato glicerinato malgrado ogni eventuale trasformazione, non entrano in azione accanto al principio attico specifico dell'A. E. T.

Infatti le proprietà dell'A. E. T. ottenuta da bacilli tubercolari coltivati su terreni minerali o sintetici, come quella ottenuta dai liquidi di prima e seconda sostituzione del mezzo nutritivo (dove è esclusa la presenza di sostanze capaci di modificare le proprierà patogene e fisiologiche delle esotuber-

coline) decidono chiaramente la questione in favore della attività specifica dei veleni solubili dei bacilli di Koch così bene differenziati dalle endotossine bacillari.

Commemorazioni. — *Commemorazione del Socio Giovanni Hagen*, di G. Armellini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il triste annuncio della morte del Socio Nazionale Filippo Angelitti, avvenuta il 25 gennaio, e pone in rilievo con brevi parole i meriti insigni dello Studioso anche nel campo, prevalentemente letterario, dell'astronomia Dantesca.

Annuncia anche la morte dei Soci Stranieri Appel e Gley, avvenuta verso la fine dell'ottobre dello scorso anno, ma comunicata solo pochi giorni fa agli uffici dell'Accademia.

Il Socio Levi-Civita commemora il Socio Straniero Paul Appel colle parole seguenti:

« Per accidentale sovrapposizione di involontari ritardi, oggi soltanto ci è ufficialmente annunciata la scomparsa dell'eminente Socio Straniero Paul Appell, che apparteneva alla nostra Accademia fin dal 1904. Egli mancò ai vivi già il 24 ottobre u. s., a 75 anni di età, essendo nato a Strasburgo il 27 settembre 1855.

« La Sua feconda opera scientifica ci appare in sintesi, lumeggiata con simpatica modestia e sobria semplicità, nella esposizione sommaria, che Egli stesso ne fece, per invito del Mittag-Leffler, nel Tomo 45 (1925) degli Acta Mathematica. L'elenco delle pubblicazioni segnala più di venti opere stampate a parte, fra trattati (dei quali alcuno in più volumi) e monografie di vario argomento, e 256 articoli, note o memorie, inserite in atti accademici e periodici scientifici.

« Le ricerche originali investono i più vitali indirizzi della matematica e della meccanica. Primeggiano fra i contributi all'analisi quelli concernenti gli sviluppi delle funzioni regolari entro un'area limitata da archi di cerchio, e quelli di maggior lena concernenti le funzioni uniformi sopra una superficie di Riemann, le funzioni periodiche e a moltiplicatore, e loro notevoli estensioni a funzioni di più variabili. A questo gruppo appartiene la memoria che riportò nel 1889 il secondo premio in un famoso concorso, indetto dal Re Oscar II di Svezia, nel quale il primo premio fu assegnato al Poincaré.

« Quasi contemporaneamente l'Appell rivolse la sua attenzione alla integrazione delle equazioni differenziali mediante funzioni di data specie, e di là fu condotto a studi sugli invarianti e sulle equazioni a derivate parziali, mentre d'altra parte affrontava, sempre impiegando i mezzi più adeguati, molte e disparate questioni di geometria algebrica e differenziale. Appunto alla geometria differenziale va in sostanza ascritto il problema detto dai Francesi dei *déblais* e *remblais*, che potrebbe chiamarsi dei movimenti

di terra di massima economia, problema posto dal MONGE fin dal 1781 e soltanto dall'APPELL rigorosamente ed esaurientemente risolto.

« Non ostante l'enorme mole di lavoro da Lui dedicata alla matematica pura, è lecito affermare che fu la meccanica razionale il Suo campo favorito di indagine; e ciò ben s'accorda con una mentalità che cercò di preferenza (come scrive Egli stesso in principio della ricordata esposizione sommaria dell'opera Sua) " le questioni precise e limitate suscettibili di schiudere nuove vie ".

« Interpretazione reale di un tempo immaginario; trasformazioni omografiche; risolvente nel moto piano dei fili; nuova forma delle equazioni della meccanica subito designata col Suo nome; tendenza dei sistemi materiali a sfuggire all'attrito; equazione funzionale per l'equilibrio di una massa fluida rotante; applicazioni originali, sempre istruttive, di concetti o formule generali a problemi concreti sono frutti cospicui di meditazioni, iniziate sui banchi della École Normale e protratte con intimo compiacimento sino al limite estremo della vita.

« Sul Suo grande trattato di meccanica in tre volumi, con due tomi supplementari concernenti la teoria delle masse fluide rotanti e la teoria della relatività, piacemi riportare il giudizio datone dal nostro illustre collega Senatore VOLTERRA, nel discorso da lui tenuto alla Sorbona il 12 giugno 1927, a nome di tutti gli scienziati stranieri convenuti a Parigi per festeggiare il cinquantesimo anniversario della laurea dell'APPELL:

« " Le Vostre opere si ricollegano ai grandi classici. Nelle attitudini del Vostro pensiero si ritrovano le più felici qualità dei grandi maestri della scienza. Il Vostro bel trattato di meccanica razionale completa e modernizza quanto ricevemmo in eredità da LAGRANGE, LAPLACE, POISSON... ".

« L'APPELL fu anche un mirabile docente, rivelatosi tale fin dagli anni giovanili; tenne corsi superiori in più scuole; insegnò per quasi mezzo secolo, sopratutto meccanica razionale, all'università di Parigi. Decano e rettore si rese benemerito come organizzatore e amministratore per iniziative illuminate. Per quanto anche nell'insegnamento prediligesse, come nella ricerca, la meccanica razionale, non esitò a lasciarne il corso, assumendosi quello più modesto e assai più gravoso, di matematiche generali (la nostra matematica per i chimici) per costituire una tradizione, tostochè si convinse che l'istituzione di tale insegnamento rispondeva, per le scienze chimiche e naturali, ad una assoluta esigenza dei tempi nuovi.

« Quanti Lo conobbero da vicino sono concordi nell'esaltarne, oltre alla altezza della mente e al fascino personale, dirittura, bontà e liberali sentimenti ».

Il Socio ARMELLINI legge la commemorazione del Socio Straniero G. HAGEN.

Il Presidente ringrazia ambedue gli oratori.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Sacco offre in omaggio all'Accademia la Nota del suo aiuto R. Peretti « Osservazioni glaciologiche in Val di Vizze » e ne parla.

Il Socio Volterra presenta in omaggio il suo volume « Leçons sur le Theorie mathématique de la lutte pour le vie ».

Ricorda inoltre come ebbe altra volta a comunicare all'Accademia che il Comitato che presiede alla edizione nazionale delle Opere di Alessandro Volta avesse deciso di pubblicare anche il Carteggio del Sommo Scienziato, ponendo l'impresa sotto la direzione di Michele Scherillo. Morto recentemente lo Scherillo, non per questo il Comitato ha abbandonato l'idea vagheggiata, ma, specialmente per iniziativa di Carlo Somigliana, si propone di porsi quanto prima al lavoro, fidando specialmente sulla collaborazione delle Accademie associate, per il grande compito, all'Istituto Lombardo.

Il Presidente ringrazia il Socio Volterra della comunicazione e assicura che anche in questa occasione l'Accademia dei Lincei saprà fare il suo dovere.

L'Accademico Segretario Parravano presenta i libri giunti in dono, segnalando gli « Atti del V Congresso Internazionale del Freddo », gli « Atti del XIV Congresso Internazionale d'Agricoltura », le « Lezioni su la Meccanica dei fluidi » di Henri Villat, gli « Esercizi di Meccanica » di H. Beghin e G. Julia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: Baglioni, Betti, Blanc, Bottazzi, Dionisi, Garbasso, Levi-Civita, Palazzo, Volterra.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° febbraio 1931

Actes du XIV^ème^ Congrès international d'Agriculture. Vol. I-IV. Bucarest 1920. 8°, pp. I-IX, 1-518, I-VIII, 1-716, I-VIII, 1-878, I-X, 1-770.

Actes du V^ème^ Congrès International du froid sous le haut Patronage de S. M. le Roi d'Italie. Vol. I, II, III, IV. (Comité italien, Institut international du Froid). Roma, 1929. 8°, pp. I-XLII, 1-319, 1-486, I-XIV, 1-972.

AGOSTINI ANGELA. — Dermatomicosi dovuta a Eurotium rubrum Bremer. (Estr. dagli « Atti dell' Istituto bot. dell' Università di Pavia ». Serie IV. Vol. II, 1930, pp. 65-79). Siena 1930. 4°.

ALDRICH J. M. — American two-winged flies of the genus Stylogaster Macquart (From the « Proceedings of the United States national Museum ». Volume 78). Washington, 1930. 8°, pages 1-27.

ALDRICH J. M. — New two winged flies of the family Calliphoridae from China. (From the « Proceedings of the United States national Museum ». Volume 78). Washington, 1930. 8°, pages 1-5.

ARRIGHI GINO — Orservazioni sul potenziale galattico. (Estr. dalle « Memorie della Società astronomica italiana ». Vol. V, n. II). Pavia, 1930. 8°, pp. 1-7.

BEGHIN H. et JULIA G. — Exercices de mécanique. Tome I°, fasc. I. Paris, 1930. 8°, pp. I-VII, 1-336.

BOSELLI F. B. — Studi sugli Psyllidi. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Volume XXIV, pp. 228-232). s. l. 1930. 8°.

CASARINI ARTURO. — La guerra di ogni giorno. (Biblioteca de « Le Forze armate ». N. 3). Roma, 1929. 8°, pp. 1-345.

DESPOTT G. — Echinological notes. (Extr. from the « Bulletin of the Museum ». Vol. I, n. II). Malta, 1930. 8°, pp. 1-5.

DESPOTT G. — Herpetological notes. (Extr. from the « Bulletin of the Museum ». Vol. I, n. II). Malta, 1930. 8°, pp. 1-5.

DESPOTT G. — Ichthyological notes. (Extr. from the « Bulletin of the Museum ». Vol. I, n. XI). Malta, 1930. 8°, pp. 1-7.

DESPOTT G. — Malacological and concological notes. (Extr. from the « Bulletin of the Museum ». Vol. I, n. II). Malta, 1930. 8°, pp. 1-6.

DESPOTT G. — Ornithological notes. (Extr. from the « Bulletin of the Museum ». Vol. I, n. II). Malta, 1930. 8°, pages 1-17.

EWING H. E. — The taxonomy and host relationships of the biting lice of the genera Dennyus and Eureum, including the descriptions of a new genus, subgenus, and four new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°. pp, 1-16.

FISHER W. S. — Notes on the rhinotragine beetles of the family Cerambycidae, with descriptions of new species. (From the « Proceedings of the United States national Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-20.

LEHMANN I. — The Earthquake of 22 III 1928. (Reprinted from « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Vol. XXVIII. 1930, pp. 151-164). Leipzig, 1930. 8°.

Marcet i Riba Jaume. — XIV Congres Geològic internacional. Espanya 1926. (Estr. de la Revista catalana de Ciència i Tecnología « Ciencia ». N. VIII, 1926). Barcelona, 1926. 8°, pp. 1–10.

Paoli G. — Relazione sull'attività del R. Osservatorio di fitopatologia per la Liguria in Chiavari nel primo decennio dalla sua fondazione. Genova, s. d. 8°, pp. 1–57.

Peretti R. — Osservazioni glaciologiche in Val di Vizze. (Estr. dal « Bollettino del Comitato nazionale geodetico-geofisico ». N. 21). Pisa, 1930. 4°, pp. 1–42.

Sarra Raffaele. — Due nuovi imenotteri italiani. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 224–227). Portici, 1930. 8°.

Serino Gaetano. — Scritti di economia marittima. Napoli, 1929. 8°, pp. 1–114.

Silvestri F. — Contributo alla conoscenza delle specie orientali del genere Prospaltella (Hym. Chalcididae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXV, pp. 49–68). Spoleto, 1930. 8°.

Silvestri F. — Contributions to a knowledge of the Indo–Malayan Japygidae (Thysanura). (Extr. from « Records of the Indian Museum ». Vol. XXXII. Part. IV, pp. 439–489). Calcutta, 1930. 8°.

Soler Emanuele. — Comunicazione sui lavori eseguiti dall'Istituto di geodesia di Padova nella regione dei soffioni boraciferi di Larderello con la bilancia di Eötvös. (Estr. dagli « Atti della Società italiana per il Progresso delle scienze». Riunione XVIII. Vol. II, 1929). Pavia, 1930. 8°, pp. 1–7).

Soler Emanuele. — Due campagne gravimetriche sul Carso compiute dall'Istituto di geodesia della R. Università di Padova nel 1923–1926. Venezia, 1930. 4°, pp. 1–45.

Soler Emanuele. — Su alcune formule ordinariamente adoperate per la riduzione della gravità osservata al geoide e sulla loro verifica sperimentale. (Extr. du « Bulletin géodésique organe de la Section de Géodésic de l'Union géodésique et géophysique internationale », 1929). Toulouse, 1929. 8°, pp. 1–7.

Soler Emanuele. — Sul coefficiente di rifrazione geodetica. (Estr. dalla Rivista « l'Universo ». Anno XI, n. 3). s. l., 1930. 8°, pp. 1–4.

Soler Emanuele. — Tavole provvisorie pel confronto fra le deviazioni della verticale e le anomalie gravimetriche. (Rapporto alla Commissione per la gravimetria). Padova, 1930. 4°, pp. 1–4.

Souvenir Cinchoma tercentenary celebration and exhibition at the Wellcome historical medical Museum, 1930. London, 1930. 8°, pp. 1–115.

Villat Henri. — Mécanique des fluides. Cours de l'École nat. Superieure d'aéronautique. Paris, edit. Gauthier–Villars et C.ie 1930. 8°, pp. I–III, 1–175.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 febbraio 1931 (anno IX)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica (Idromeccanica). — *Circolazioni intorno a regioni di acqua morta limitate da una parete poligonale e da un pelo libero.* Nota [1] del Corrisp. U. Cisotti.

Mi riferisco alla Nota precedente [2], proseguendo la numerazione dei paragrafi e delle figure.

6. La parete rigida $\tilde{\omega}$ è rettilinea. – Se si assume nella (1) del n. 4:

$$\Omega = \pi - i \log \frac{\zeta + i(\sqrt{2}+1)}{\zeta - i(\sqrt{2}+1)}, \tag{1}$$

con che la (1) stessa diviene:

$$\omega = \pi + i \log \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\zeta - 1}, \tag{2}$$

risulta ω reale per ζ reale; infatti in tal caso il secondo membro rimane immutato cambiando i in $-i$. Inoltre per $\zeta = e^{i\sigma}$ con $0 \leq \sigma \leq \pi$, si ha

$$\omega = i \log \frac{\sqrt{2} - \operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sigma};$$

(1) Presentata nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) *Correnti circolatorie locali intorno a regioni di acqua morta*, questi «Rendiconti», vol. XIII (1° sem., 1931), p. 85.

da questa risulta che ω è puramente immaginario sulla semicirconferenza $1, i, -1$ del piano ζ, cioè la parte reale ϑ di ω [n. 4] è nulla, e poichè ϑ rappresenta l'angolo della velocità coll'asse reale nel piano z, la parete $\tilde{\omega}$ è un segmento rettilineo (fig. 8) [1]. Per individuare la regione B di acqua

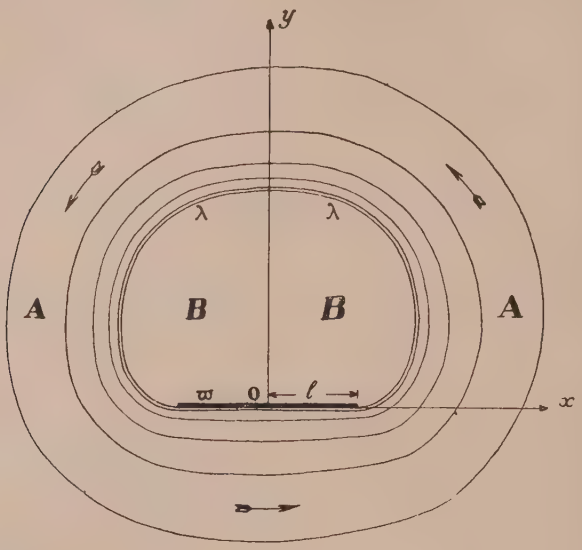


Fig. 8.

morta basta dunque, nel caso in discorso, introdurre la espressione (1) di Ω nella (3) del n. 4; si ottiene:

$$z - z_0 = \frac{2C}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(1-\zeta^2)\,d\zeta}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2}.$$

Ora è

$$\frac{1-\zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2} = \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{2\zeta - i\sqrt{2}}{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1} - \frac{i}{2}\log\frac{\zeta - i(\sqrt{2}+1)}{\zeta - i(\sqrt{2}-1)}\right],$$

per cui, integrando, facendo corrispondere al punto $\zeta = i$ il punto $z = 0$ e chiamando $2l$ la lunghezza della lamina, con che a $\zeta = 1$ e $\zeta = -1$ corrispondono rispettivamente $z = l$ e $z = -l$, si ottiene in definitiva:

$$(3) \qquad z = -\frac{4l}{4-\pi}\left[\frac{2(2\zeta - i\sqrt{2})}{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1} - i\log\frac{i(\sqrt{2}+1) - \zeta}{\zeta - i(\sqrt{2}-1)} + \right.$$
$$\left. + i\log(\sqrt{2}+1) - i\sqrt{2}\right].$$

(1) B. Hopkinson, *On Discontinuous Fluid Motion involving Sources and Vortices*, «Proc. The London Math. Soc.», XXIX, 1898, p. 155.

Questa è la relazione che definisce il campo del moto e, in particolare, la configurazione del pelo libero λ.

Parete rigida. – Facendo percorrere a ζ la semicirconferenza $1, i, -1$ il corrispondente punto z deve percorrere il profilo rigido $\tilde{\omega}$. Poniamo nella (3) $\zeta = e^{i\sigma}$, si ottiene:

$$(4)\quad x = \frac{4l}{4-\pi}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\sigma}{\sqrt{2}-\operatorname{sen}\sigma} + \operatorname{arctg}\frac{\cos\sigma}{\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\sigma - 1}\right],\quad y = 0,\qquad (0 \leq \sigma \leq \pi).$$

Resta confermato che il profilo rigido è il segmento dell'asse reale compreso tra i punti $z = -l$ e $z = l$.

Pelo libero. – Basta far percorrere a ζ il diametro $-1, 1$ perchè il corrispondente punto z descriva il pelo libero λ. Le equazioni parametriche si ottengono da (3):

$$(5)\quad \begin{cases} x = \dfrac{4l}{4-\pi}\left[\dfrac{4\zeta(\zeta^2+1)}{\zeta^4+6\zeta^2+1} - \operatorname{arctg}\dfrac{2\zeta}{\zeta^2+1}\right], \\ y = \dfrac{4l}{4-\pi}\left[2\sqrt{2}\,\dfrac{3\zeta^2+1}{\zeta^4+6\zeta^2+1} - \log\dfrac{\sqrt{\zeta^4+6\zeta^2+1}}{\zeta^2+3-2\sqrt{2}} + \right. \\ \qquad \left. + \log\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2}\right]. \end{cases} \qquad (-1 \leq \zeta \leq 1),$$

Velocità. – Se si indica con c il valore costante della velocità nei punti del pelo libero λ, si ha [n. 4], tenendo presente la (2):

$$(6)\qquad w = ce^{-i\omega} = -c\,\frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}.$$

Mediante la (3) w viene riferita al piano z: essa si mantiene ovunque regolare nel piano del moto perchè il secondo membro della precedente è regolare entro il semicerchio del piano ζ, w si annulla solo nel punto $\zeta = i\left(\sqrt{2}-1\right)$ che corrisponde [n. 1] al punto all'infinito del piano z.

Circolazione. – La circolazione è definita dall'integrale [1]

$$C = \int_{\tilde{\omega}+\lambda} w\,dz,$$

di senso antiorario.

Riferiamoci al semicerchio, tenendo presente che l'immagine della corrente circolatoria entro il semicerchio segue il senso inverso di quello della corrente stessa nel piano z [Cfr. le figg. 1 e 8]; si ha

$$(7)\qquad C = -\int w(\zeta)\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta,$$

(1) Cfr. ad es. la mia Nota, *Sui vortici spirali*, questi «Rendiconti», vol. VI (2° sem., 1927), p. 184.

l'integrazione andando estesa a tutto il contorno del semicerchio, sempre in senso antiorario. Per la (3) e la (6) si ottiene:

$$C = \frac{8cl}{4-\pi} \int \frac{1-\zeta^2}{\zeta^4 + 6\zeta^2 + 1}\, d\zeta,$$

ovvero, posto

$$F(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{\left[\zeta^2 + 3 + 2\sqrt{2}\right]\left[\zeta + i\left(\sqrt{2}-1\right)\right]},$$

si ha:

$$C = \frac{8cl}{4-\pi} \int F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - i\left(\sqrt{2}-1\right)},$$

$F(\zeta)$ mantendosi regolare in tutti i punti ζ del semicerchio; applicando il teorema del residuo, essendo il polo nel punto interno $\zeta = i\left(\sqrt{2}-1\right)$,

$$\int F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - i\left(\sqrt{2}-1\right)} = 2\pi i F\left[i\left(\sqrt{2}-1\right)\right] = \frac{\pi}{2},$$

per cui si ha la formula notevole

$$C = \frac{4\pi}{4-\pi} cl, \tag{8}$$

che lega tra di loro: la circolazione C, il valore c della velocità sul pelo libero e la lunghezza $2l$ della lamina.

Interpretazione elettrostatica. – Riferendoci alla interpretazione elettrostatica del n. 5 la densità di distribuzione lineare di elettricità sul contorno è, per la (3),

$$\mu = (4-\pi)\frac{q}{2l} \left| \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1} \right|,$$

designando q la quantità di elettricità. Essendo:

$$\left| \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1} \right| = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2} - \operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sigma}, & \text{per } \zeta = e^{i\sigma} \text{ e } 0 \leq \sigma \leq \pi, \\ 1 \quad \text{per} \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \end{cases}$$

si deduce che, sul pelo libero λ l'elettricità è distribuita con densità costante $\mu = (4-\pi)\frac{q}{2l}$ e sulla lamina $\tilde{\omega}$ colla densità

$$\mu = (4-\pi)\frac{q}{2l} \frac{\sqrt{2} - \operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sigma},$$

il parametro σ essendo legato a x dalla prima delle (4).

7. La parete $\tilde{\omega}$ è poligonale a lati rettilinei. – Dividiamo la semicirconferenza $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \pi$, in m parti, e sieno $\sigma_0 = 0, \sigma_1, \cdots, \sigma_m = \pi$ gli argomenti dei punti di divisione, in ordine crescente; la funzione [1]

$$(1) \qquad L(\zeta) = \vartheta_1 + \frac{i}{\pi} \sum_1^{m-1}{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \log \frac{\zeta - e^{i\sigma_h}}{1 - \zeta e^{i\sigma_h}},$$

è regolare nel semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$, reale sull'asse reale, e la sua parte reale assume sulla semicirconferenza, ove $\zeta = e^{i\sigma}$, i valori seguenti:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1 \quad \text{per} \quad 0 = \sigma_0 < \sigma < \sigma_1, \\ &\vartheta_2 \quad \text{»} \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\vartheta_m \quad \text{»} \quad \sigma_{m-1} < \sigma < \sigma_m = \pi. \end{aligned}$$

Si può dedurre che, se si assume nella (1) del n. 4,

$$(2) \qquad \Omega = \pi - i \log \frac{\zeta + i(\sqrt{2}+1)}{\zeta - i(\sqrt{2}+1)} + L,$$

per cui la (1) stessa diviene

$$(3) \qquad \omega = \pi + i \log \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1} + L,$$

la parete rigida $\tilde{\omega}$ è una poligonale a m lati rettilinei, inclinati sull'asse reale, nel senso del flusso, degli angoli $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_m$. La relazione tra ζ e ζ si ottiene introducendo l'espressione (2) di Ω nella (3) del n. 4; ponendo

$$(4) \qquad P(\zeta) = e^{iL} = e^{i\vartheta_1} \prod_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{1 - \zeta e^{i\sigma_h}}{\zeta - e^{i\sigma_h}} \right)^{\frac{\vartheta_{h+1} - \vartheta_h}{\pi}},$$

si ha, chiamando ora k la costante arbitraria,

$$(5) \qquad \zeta - \zeta_0 = \frac{2k}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} P(\zeta) \frac{1 - \zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2}\, d\zeta.$$

Chiamando l_j la lunghezza del lato della poligonale corrispondente all'arco compreso tra i punti $\zeta = e^{i\sigma_{j-1}}$ e $\zeta = e^{i\sigma_j}$, si ha, dalla precedente:

$$(6) \qquad l_j e^{i\vartheta_j} = \frac{2k}{\pi} \int_{e^{i\sigma_{j-1}}}^{e^{i\sigma_j}} P(\zeta) \frac{1 - \zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2}\, d\zeta, \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Queste m relazioni determinano la m costanti: $k, \sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1}$, finora indeterminate, permettendo di far intervenire nella relazione (5) tra ζ e ζ

(1) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*, p. 19, formula (IV).

gli elementi geometrici che interessano direttamente la questione, cioè le lunghezze l_j dei lati e le loro inclinazioni ϑ_j sull'asse reale.

Velocità: – Se si indica con c il valore costante della velocità sopra λ, si ha, per (3) e (4):

$$w = ce^{-i\omega} = -c\,\frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1}\,\mathrm{P}^{-1}. \tag{7}$$

Avuto riguardo a quanto si disse relativamente alla (6) del numero precedente possiamo concludere che w è regolare in tutti i punti del semicerchio, si annulla per $\zeta = i(\sqrt{2} - 1)$, corrispondente al punto all'infinito del piano z, inoltre per l'espressione (4) di P, si annulla o diviene infinita nei punti che corrispondono ai vertici della poligonale, secondochè si tratta di rientranti o di salienti [1].

Circolazione. – È definita dalla (7) del numero precedente. Nel caso attuale w è definito da (7); inoltre, per la (5),

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{2k}{\pi}\,\frac{1 - \zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2}\,\mathrm{P},$$

perciò la (7) del numero precedente dà

$$\mathrm{C} = \frac{2kc}{\pi}\int \frac{1 - \zeta^2}{\zeta^4 + 6\zeta^2 + 1}\,d\zeta,$$

ovvero [n. 6]

$$\mathrm{C} = kc\,. \tag{8}$$

8. La parete $\tilde{\omega}$ è bilatera. – Ponendo $m = 2$, $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, la (4) diviene

$$\mathrm{P}(\zeta) = -ie^{i\alpha}\left(\frac{1 - i\zeta}{\zeta - i}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Corrispondentemente (5), (6) e (7) divengono, coll'assumere $\zeta_0 = i$, $z_0 = 0$:

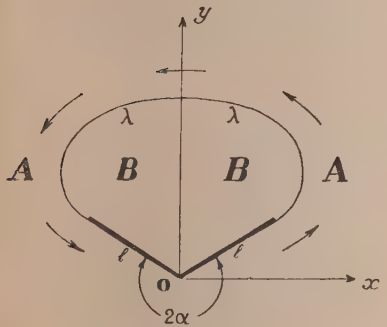
$$z = \frac{2e^{i\alpha}}{i\pi}\int_i^{\zeta} \frac{1 - \zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2}\left(\frac{1 - i\zeta}{\zeta - i}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} d\zeta,$$

$$l_1 = l_2 = l = \frac{2k}{\pi}\int_0^{i} \frac{1 - \zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\,\zeta - 1)^2}\left(\frac{1 - i\zeta}{\zeta - i}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} d\zeta,$$

$$w = -ice^{-i\alpha}\left(\frac{\zeta - i}{1 - i\zeta}\right)^{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \cdot \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2} - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2} - 1}.$$

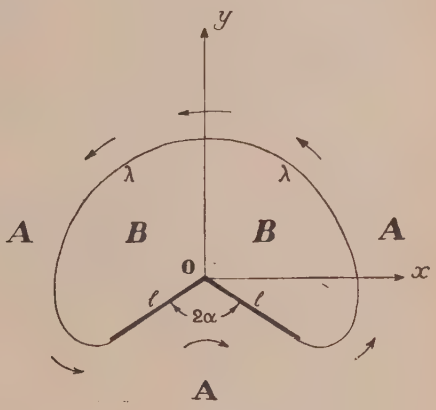
(1) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*, p. 118.

Si tratta in questo caso di una parete $\tilde{\omega}$ formata di due segmenti rettilinei di eguale lunghezza l e formanti tra di loro un angolo 2α, col vertice nel punto $\zeta = 0$ e simmetricamente disposti rispetto all'asse y: se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ il vertice è un rientrante (fig. 9), se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ il vertice è un saliente (fig. 10) nel caso di $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ci si ritrova nel problema già trattato al n. 6 (fig. 8).



$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Fig. 9.



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Fig. 10.

È manifesta la interpretazione elettrostatica che, per brevità, sono costretto a omettere.

Chimica. — *Nuova serie di nitrososolfosali di ferro: nitroso-ditiocarbammati* [1]. Nota del Corrisp. L. Cambi e A. Cagnasso [2].

Recentemente L. Cambi e L. Szegö [3] hanno indagato le reazioni di sintesi, il comportamento chimico e fisico degli xantogenati e dei nitroso-xantogenati ferrici.

Nella Nota succitata veniva osservato anche che il ferro offre la manifestazione generale di generare sali ferrici, più stabili dei corrispondenti ferrosi, con i ditioacidi recanti l'aggruppamento — CS·SH.

Esponiamo ora le ricerche compiute sui ditiocarbammati che derivano dalle ammine secondarie, poichè questi posseggono in generale maggiore stabilità, come è noto.

Dalle indagini di M. Délépine [4] era già noto che i sali ferrosi degli acidi ditiocarbammici sono autoossidabili a sali ferrici, ed analogamente si comportano i sali del cobalto bivalente. Questo A. ottenne anzi per questa via diversi sali cobaltici $(R_2N \cdot CS \cdot S)_3Co$ ed il sale ferrico $[i\text{–}(C_4H_9)_2N \cdot CS \cdot S]_3Fe$ [5].

Noi abbiamo anzitutto verificato il comportamento dei sali ferrosi e ferrici degli acidi N·N-dimetil– ed N–piperidil–ditiocarbammico. Osservammo che i sali ferrosi si autoossidano con rapidità a freddo, assorbendo l'ossigeno. La reazione, in eccesso di ditiocarbammato ammonico, corrisponde allo schema:

$$2\,(R_2N \cdot CS_2)_2Fe + 2\,R_2N \cdot CS_2' + H_2O + 0.5\,O_2 \rightarrow 2\,(R_2N \cdot CS_2)_3Fe + 2HO'$$

I sali ferrici, che preparammo anche per semplice doppio scambio con i ditiocarbammati ammonici e cloruro ferrico, presentano molteplici analogie con gli xantogenati ferrici, per la solubilità nei solventi a bassa costante dielettrica (solfuro di carbonio, cloroformio, benzolo ecc.), per il colore intenso nero–rossastro. Si differenziano però per la loro maggiore stabilità: resistono in soluzione all'ossigeno atmosferico, non reagiscono con l'NO.

Non offrono cioè quelle reazioni caratteristiche dell'etilxantogenato ferrico illustrate da L. Cambi e L. Szegö:

$$2\,(C_2H_5O \cdot CS_2)_3\,Fe + 1.5\,O_2 \rightarrow 3\,(C_2H_5O \cdot CS_2)_2 + Fe_2O_3$$

$$(C_2H_5O \cdot CS_2)_3\,Fe + 2\,NO \rightarrow (C_2H_5O \cdot CS_2)_2\,Fe\,(NO)_2 + 0.5\,(C_2H_5O \cdot CS_2)_2$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 15 febbraio 1931.

(3) Questi «Rendiconti», (6) *13*, 93, 1931.

(4) «Comptes Rendu», *146* 981, (1908).

(5) «Bull. Soc. Chim.» (4) *3* 643, (1908).

È opportuno rimarcare tale comportamento parallelo rispetto all'ossigeno ed all'NO. Nel caso dei ditiocarbammati si manifesta evidentemente una minore sensibilità a tali ossidanti dei residui $R_2N \cdot CS_2-$, rispetto a quelli $C_2H_5O \cdot CS_2-$, ed una maggiore stabilità del sale ferrico.

Per contro, la spiccata tendenza ad autoossidarsi dei ditiocarbammati ferrosi faceva presumere che questi dovevano manifestare un'elevata reattività con l'NO, in armonia al comportamento generale dei composti ferrosi con l'NO stesso illustrato da L. Cambi [1].

Infatti, facendo reagire la soluzione acquosa di ditiocarbammato ammonico su quella contenente $Fe(NO)SO_4$, si produce istantaneamente un nitrososale verde–smeraldo, insolubile in acqua, che corrisponde alla formula generale

$$(R_2N \cdot CS \cdot S)_2Fe \cdot NO .$$

Si verifica cioè, in modo praticamente quantitativo, la reazione:

$$[ON \cdot Fe]SO_4 + 2\ R_2N \cdot CS \cdot S' \rightarrow (R_2N \cdot CS \cdot S)_2\ Fe \cdot NO + SO_4'' .$$

La reazione venne da noi effettuata con N·N–dimetil–, N–piperidil–N·N–metilfenil–ditiocarbammato. Con il ditiocarbammato $[NH_2 \cdot CS_2]NH_4$ osservammo invece la formazione di un nitrososale appartenente ad altro tipo che descriveremo in seguito.

I termini della nuova e caratteristica serie di nitrososolfosali sono solubili in cloroformio, solfuro di carbonio ecc., con colore verde–giallo cupo, e non solo si differenziano per il colore dagli altri nitroso–solfosali del ferro nero o rosso–scuro, ma anche per l'alta stabilità, che è notevolmente superiore a quella degli stessi tetranitrososolfuri e di tutti i nitrosilderivati del ferro finora noti. Si conservano solidi all'aria, anche a lungo. Tra i nitrosilcomplessi sono confrontabili soltanto con le nitrosocobaltiammine rosse $[ON \cdot Co(NH_3)_5]X_3$. I nuovi sali hanno peso molecolare semplice. Si scindono con solfato di rame generando ossido d'azoto. Con soluzione di cianuro di potassio producono ferrocianuro e nitroprussiato.

Appare probabile da quanto abbiamo osservato che i nitroso–ditiocarbammati $(R_2N \cdot CS_2)_2Fe \cdot NO$ siano sali ferrici, ma sulla loro costituzione ritorneremo allorchè avremo compiuto l'esame che abbiamo in corso del comportamento magnetico e delle altre proprietà fisiche.

Per ora rileveremo soltanto le analogie con i sali verdi di addizione generati dagli alogenuri ferrosi ed NO in alcuni solventi non acquosi. I nitroso–ditiocarbammati portano a considerare nuovamente la dipendenza delle diverse colorazioni dei vari derivati nitrosilici del ferro, e la capacità di saturazione del ferro stesso rispetto all'NO, dagli altri radicali od aggruppamenti coordinati nel complesso.

(1) Questi «Rendiconti» (6) *9*, 519, 1929; (6) *11*, 133, 1930.

Aggiungeremo infine che i nitroso-ditiocarbammati non solo si differenziano nettamente dai nitrosoxantogenati, ma anche dai nitrososali che noi abbiamo ottenuti per azione dell'NO sul ditiobenzoato ed il ditioacetato ferroso e che pure descriveremo in seguito.

Parte sperimentale (con A. Tahara).

Riportiamo anche i dati riferentisi ai ditiocarbammati ferrici che abbiamo studiati per confronto con i nitroso-ditiocarbammati corrispondenti.

N·N-dimetil-ditiocarbammato ferrico. — Il sale $[(CH_3)_2N\cdot CS_2]_3Fe$ venne preparato dal ditiocarbammato ammonico e dallo stesso ditiocarbammato di dimetilammonio. Alla soluzione, circa 0.5 mol., di questi sali aggiungemmo cloruro ferrico in debole eccesso. Il sale nerastro precipitato venne essicato e purificato per cristallizzazione da soluzioni diluite in cloroformio che concentrammo nel vuoto.

Il sale si presenta in minuti cristalli neri-rossastri. All'analisi ha fornito i dati seguenti:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato . . .	13.42	10.09	46.21
trovato . . .	13.45	10.07	46.50

Il sale è molto solubile in cloroformio, solfuro di carbonio, benzolo. Il peso molecolare venne determinato in benzolo:

solvente gr. 14.80; sostanza gr. 0.2146; $\Delta t = 0.165$;
peso molecolare calcolato 416; trovato 430.

Il sale che descriviamo si genera anche per autoossidazione del corrispondente sale ferroso che è insolubile in acqua e di colore bianco-grigio.

N-piperidil-ditiocarbammato ferrico. — Il sale $(C_5H_{10}N\cdot CS_2)_3Fe$ venne preparato analogamente al precedente e purificato pure dal cloroformio. Presenta colorazione e caratteri analoghi al derivato della dimetilammina. L'analisi ha fornito i dati seguenti:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato . . .	10.38	7.79	35.67
trovato . . .	10.56	7.76	35.62

Il peso molecolare in benzolo è risultato:

solvente gr. 18.34; sostanza gr. 0.2082; $\Delta t = 0.095$;
peso molecolare calcolato 539; trovato 585.

Il sale ferroso si autoossida analogamente a quello precedentemente descritto.

Nitroso-N·N-dimetil-ditiocarbammato di ferro. — Il nitrosocomplesso $[(CH_3)_2N \cdot CS_2]_2Fe \cdot NO$ si precipita insolubile in forma di polvere verde-smeraldo aggiungendo, in atmosfera di NO, il dimetilditiocarbammato di ammonio o dimetilammonio in lieve eccesso alla soluzione acquosa all' 1 % di $FeSO_4$ saturata a 0° con NO.

L'assorbimento totale dell' NO corrisponde ai rapporti 1 Fe : 1 NO:

Il precipitato venne separato per filtrazione, essicato nel vuoto, ricristallizzato da cloroformio evaporando a freddo soluzioni diluite.

Il sale cristallizza in aghetti verdi-scuri lucenti.

È solubile in cloroformio, solfuro di carbonio, benzolo, insolubile in alcool ed in etere.

L'analisi ha dato i risultati:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato . . .	17.12	12.88	39.33
trovato. . . .	17.10	13.00	39.47

Il peso molecolare in benzolo risulta:

solvente gr. 16.25; sostanza gr. 0.2858; $\Delta t = 0.025$;
peso molecolare calcolato 326; trovato 345.

Trattato con $CuSO_4$, in eccesso, a circa 90°, in atmosfera di CO_2 sviluppa unicamente NO:

sostanza gr. 0.2012; NO cc. 18.4 (0°/760); risulta 1 Fe : 0.9 NO.

Nitroso-N-piperidil-ditiocarbammato di ferro. — Il nitrososale $(C_5H_{10}N \cdot CS_2)_2Fe \cdot NO$ venne preparato con il metodo descritto. Si purifica anch'esso dal cloroformio. Cristallizza in aghetti verdi-cupi. Possiede analoghe solubilità al precedente, ma è meno solubile in benzolo, è pure insolubile in alcool ed etere.

Dall'analisi è risultato:

	Fe	N (Dumas)	S
calcolato . . .	13.68	10.29	31.42
trovato. . . .	13.55	10.40	31.45

Il peso molecolare venne determinato in bromoformio:

solvente gr. 42.28; sostanza gr. 0.1168; $\Delta t = 0.090$;
peso molecolare calcolato 408; trovato 412.

Il nitrososale piperidilico presenta reazioni analoghe al precedente: con solfato di rame sviluppa NO, con cianuro di potassio genera nitroprussiato e ferrocianuro.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla definizione di integrale*[1]. Nota di G. Dantoni, presentata[2] dal Corrisp. L. Tonelli.

Cauchy, nella lezione XXI del suo *Calcul infinitésimal* (Paris 1823)[3] occupandosi della definizione di integrale definito per le funzioni continue, procede nel seguente modo: data una funzione reale e continua $f(x)$, per $x_0 \leq x \leq X$, sceglie dei nuovi valori x tali che

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = X,$$

e considera la somma

$$(1) \qquad S = \sum_0^{n-1} (x_{r+1} - x_r) f(x_r).$$

Ciò posto dimostra che, preso $\sigma > 0$ arbitrario, è sempre possibile determinare $\delta > 0$ in modo che, per qualunque coppia di somme (1), S' e S'', relative a due divisioni dell'intervallo (x_0, X) in parti tutte di ampiezza minore di δ, sia $|S' - S''| < \sigma$; dimostra cioè l'esistenza di un numero finito I tale che, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, si può sempre determinare un $\delta > 0$ in modo che qualunque somma S corrispondente ad una divisione di (x_0, X) in parti tutte minori di δ, verifichi la disuguaglianza:

$$|I - S| < \sigma.$$

Questo numero I – che risulta perciò il limite della somma S, quando si faccia tendere a zero la massima delle parti della suddivisione di (x_0, X) a cui S corrisponde – è per Cauchy l'*integrale definito* della funzione $f(x)$ nell'intervallo (x_0, X).

All'inizio della successiva lezione XXII, Cauchy osserva che dai principî su cui Egli ha fondata la dimostrazione dell'esistenza del limite delle somme S risulta che si arriverebbe allo stesso limite se, invece delle somme S definite dall'uguaglianza (1), si considerassero le nuove somme

$$(2) \qquad S_1 = \sum_0^{n-1} (x_{r+1} - x_r) f[x_r + \vartheta_r (x_{r+1} - x_r)]$$

con ϑ_r numero qualunque compreso fra zero ed uno.

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 15 febbraio 1931.

(3) Cauchy, *Oeuvres complètes*. II^e série, tome IV, Paris (1899).

Riemann [1], una trentina d'anni dopo, riprendendo la considerazione delle somme (2) e portandola nel campo più generale delle funzioni reali qualunque, diede la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e la finitezza del limite delle somme S_1, vale a dire diede la condizione necessaria e sufficiente di integrabilità quando l'integrale sia definito come limite delle somme (2).

Nella presente Nota, *ci proponiamo di dimostrare che la definizione di integrale definito, considerato come limite delle somme* (2), *e quella in cui l'integrale è considerato come limite delle somme* (1), *mentre risultano distinte nel campo delle funzioni (reali) qualunque, illimitate, sono invece perfettamente equivalenti nel campo delle funzioni (reali) limitate.*

Così, l'equivalenza delle due definizioni, già affermata da Cauchy per le funzioni continue, viene estesa a quelle che sono semplicemente limitate, nel senso che, se per una qualunque di queste funzioni, una delle due somme (1), (2) ha limite determinato (e finito), lo stesso avviene anche per l'altra, ed i due limiti sono fra loro uguali.

1. Osserviamo, in primo luogo, che, se la $f(x)$ non è limitata in (x_0, X), il limite delle somme (2), al tendere a zero della massima ampiezza delle parti della suddivisione considerata, non può essere determinato e finito.

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che la $f(x)$ non sia limitata superiormente, e consideriamo un punto W di Weierstrass relativo al limite superiore. Se $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = X$ sono i punti che determinano una qualunque suddivisione di (x_0, X) in parti, quello degli intervalli $x_{r+1} - x_r$ che contiene nel suo interno W, oppure uno almeno di quegli intervallini che contengono W come estremo, è tale che in esso il limite superiore della $f(x)$ risulta $+\infty$. Sia $x_{s+1} - x_s$ tale intervallino e scriviamo una delle somme (2) corrispondenti nel seguente modo:

$$S_1 = \sum{}' (x_{r+1} - x_r) f[x_r + \vartheta_r (x_{r+1} - x_r)] + (x_{s+1} - x_s) f[x_s + \vartheta_s (x_{s+1} - x_s)]$$

dove la scrittura $\sum'$ indica che dalla sommatoria è tolto il termine corrispondente ad $r = s$.

Posto $\sum' (x_{r+1} - x_r) f[x_r + \vartheta_r (x_{r+1} - x_r)] = R$ e preso ad arbitrio un numero $M > 0$, scegliamo ϑ_s in modo che sia

$$f[x_s + \vartheta_s (x_{s+1} - x_s)] > \frac{M + |R|}{x_{s+1} - x_s} .$$

Ne viene allora

$$S_1 > -|R| + M + |R| = M ,$$

(1) *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.* « Oeuvres mathématiques de Riemann » traduites par Langel, Paris, 1898.

e questa disuguaglianza mostra che, per qualunque suddivisione di (x_0, X) in parti, esiste almeno una somma (2) (e ne esisteranno anzi infinite) che supera un qualunque numero arbitrariamente prefissato.

Dunque, se la funzione $f(x)$ non è limitata in (x_0, X), le somme (2) non possono avere un limite determinato e *finito*, al tendere a zero di tutte le parti delle suddivisioni.

Prendiamo ora in esame la funzione definita dalla uguaglianza

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

per $0 \leq x < 1$, e $y = 0$ per $x = 1$.

Considerata una qualunque somma (1) si ha

$$S < \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2,$$

e si vede facilmente che al tendere a zero di tutte le differenze $x_{r+1} - x_r$, S tende precisamente a 2.

Dunque, per la funzione qui studiata l'integrale definito, quando esso sia preso come limite delle somme (1), esiste sull'intervallo (0, 1) ed ha il valore 2, e ciò contrariamente a quanto accade se alle somme (1) si sostituiscono le (2).

2. Passiamo a dimostrare che, se la funzione $f(x)$ è *limitata*, l'esistenza del limite per una delle due somme (1) e (2) trae con se l'esistenza del limite anche per l'altra, ed i due limiti risultano uguali.

Poichè le (1) sono particolari somme (2), è evidente che, se esiste il limite di queste ultime, esiste pure quello delle prime ed i due limiti sono uguali.

Viceversa se per una data funzione limitata $f(x)$ *non esiste* il limite delle somme (2), non esiste neppure quello delle 1: è quanto ci resta da dimostrare.

Basterà far vedere che, preso $\delta > 0$, qualunque, esistono sempre due somme (1), S' ed S'', relative a divisioni in intervalli δ'_i, δ''_j, tutti minori di δ, le quali abbiano una differenza in valore assoluto maggiore di un numero *positivo* fisso, indipendente da δ.

Nella nostra ipotesi, cioè della non esistenza del limite delle somme (2), dalla condizione di integrabilità data da Du Bois-Reymond, segue che esiste almeno un $\varepsilon > 0$ tale che i punti $\bar{x}$ in cui l'oscillazione della $f(x)$ è maggiore o uguale ad ε formano un gruppo non rinchiudibile in un numero finito di intervalli di lunghezza complessiva arbitrariamente piccola. Considerato uno di questi ε, si può pertanto fissare un $\lambda > 0$ in modo che,

rinchiudendo comunque i punti $\bar{x}$ in un numero *finito* di intervalli δ_s risulterà sempre:

$$\sum \delta_s \geqq \lambda . \tag{3}$$

Preso δ positivo ad arbitrio, spezziamo l'intervallo (x_0, X) in parti uguali e minori di δ, mediante i punti

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = X$$

e fissiamo in ogni intervallo (x_r, x_{r+1}) il punto $x_r^{(0)}$ in modo che $x_r^{(0)} - x_r$ risulti uguale al minore dei due numeri $\dfrac{X - x_0}{2n}, \dfrac{\lambda}{4n}$.

Ciò fatto, dividiamo gli intervalli (x_r, x_{r+1}) in due categorie; nella prima porremo quelli per i quali la parte $(x_r^{(0)}, x_{r+1})$ non contiene nel suo *interno* punti in cui l'oscillazione della $f(x)$ è $\geqq \varepsilon$; nella seconda porremo i rimanenti. Gli intervalli della prima categoria li indicheremo con (x_j, x_{j+1}); quelli della seconda con (x_i, x_{i+1}).

Per ciascuno di questi ultimi, indicheremo con $\bar{x}_i$ il primo punto di $(x_i^{(0)}, x_{i+1})$ in cui l'oscillazione della $f(x)$ è $\geqq \varepsilon$: tale *primo* punto esiste perchè l'insieme dei punti di (x_0, X) in cui l'oscillazione della $f(x)$ è $\geqq \varepsilon$ risulta *chiuso*. È inoltre, $x_i^{(0)} \leqq \bar{x}_i < x_{i+1}$.

Detta D l'oscillazione della $f(x)$ in tutto (x_0, X), scegliamo in (x_i, x_{i+1}) due punti x_i' e x_i'', tali che sia:

$$|\bar{x}_i - x_i'| < \frac{\lambda}{4n} \quad , \quad |\bar{x}_i - x_i''| < \frac{\lambda}{4n} ,$$

$$|x_i' - x_i''| < \frac{\lambda\varepsilon}{8nD} \quad , \quad f(x_i') - f(x_i'') > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Prima di proseguire, osserviamo che i punti in cui l'oscillazione della $f(x)$ è $\geqq \varepsilon$ sono tutti contenuti negli intervalli $(x_j, x_j^{(0)})$, $(x_i, x_i^{(0)})$ e $(\bar{x}_i, x_{i+1})$, e che per la costruzione fatta è

$$\sum (x_j^{(0)} - x_j) + \sum (x_i^{(0)} - x_i) \leqq \frac{\lambda}{4} .$$

È dunque, tenendo conto della (3),

$$\sum (x_{i+1} - \bar{x}_i) \geqq \lambda - \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{4}\lambda ,$$

e perciò

$$\sum (x_{i+1} - x_i'') \geqq \frac{3}{4}\lambda - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} .$$

Dopo ciò, dividendo ciascun intervallo (x_i, x_{i+1}) nei due intervalli parziali (x_i, x_i'), (x_i', x_{i+1}), dalla suddivisione di (x_0, X) nelle parti (x_r, x_{r+1}), se ne ottiene un'altra in parti ancora tutte minori di δ la cui somma (1) è data da

$$S' = \sum (x_{j+1} - x_j) f(x_j) + \sum \{ (x_i' - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - x_i') f(x_i') \}.$$

Suddividendo invece ciascuno (x_i, x_{i+1}) nei due intervalli parziali (x_i, x_i'') e (x_i'', x_{i+1}), si ottiene un'altra suddivisione di (x_0, X), in parti ancora tutte minori di δ, la cui somma (1) è data da

$$S'' = \sum (x_{j+1} - x_j) f(x_j) + \sum \{ (x_i'' - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - x_i'') f(x_i'') \}.$$

E siccome è

$$x_{i+1} - x_i' = (x_{i+1} - x_i'') + (x_i'' - x_i'),$$

si può sempre scrivere

$$S' - S'' = \sum (x_i' - x_i'') [f(x_i) - f(x_i')] + \sum (x_{i+1} - x_i'') [f(x_i') - f(x_i'')]$$

$$> - D \sum |x_i' - x_i''| + \frac{\varepsilon}{2} \sum (x_{i+1} - x_i'') > - \frac{\lambda\varepsilon}{8} + \frac{\lambda\varepsilon}{4} = \frac{\lambda\varepsilon}{8}.$$

Poichè $\frac{\lambda\varepsilon}{8}$ è un numero fisso indipendente da δ, quanto avevamo affermato è provato.

Matematica. — *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche.* Nota di R. Caccioppoli, presentata [1] dal Corrisp. G. Sgorza.

L'espressione generale dei funzionali dipendenti linearmente da funzioni analitiche è stata assegnata da Fantappiè [2], mediante una formola integrale. Dato l'interesse di questa formola, di cui Fantappiè dà una dimostrazione alquanto indiretta e laboriosa, non sarà inopportuno mostrare come essa possa dedursi più rapidamente dalla teoria ordinaria delle operazioni funzionali lineari.

Indico ancora qui un'applicazione importante della formola in questione: la deduzione immediata dei risultati classici sulla rappresentazione delle funzioni analitiche mediante serie di funzioni razionali.

1. – Sia I un insieme chiuso nel piano della variabile complessa z, e sia Ω l'insieme delle funzioni $f(z)$ olomorfe nei punti di I [3]. Definiremo un funzionale *lineare* e continuo $A[f]$, nel campo delle funzioni di Ω, mediante le due proprietà seguenti:

1) se $f_1(z)$ e $f_2(z)$ sono due funzioni appartenenti ad Ω, α_1 e α_2 due costanti complesse qualunque, si ha

$$A[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 A[f_1] + \alpha_2 A[f_2];$$

2) se $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, uniformemente in un dominio contenente nel suo interno I, si ha

$$\lim_{n\to\infty} A[f_n] = A[f] \text{ [4]}.$$

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) V. la sua Memoria: *I funzionali analitici*, «Mem. Acc. Lincei», 1928.

(3) Supporremo I al finito. Se I contenesse il punto all'infinito, alle funzioni $f(z)$ andrebbe imposta la sola condizione supplementare di annullarsi in questo punto.

(4) Secondo le definizioni di Fantappiè, le funzioni f sono monodrome in tutto il piano, e la relazione di limite deve aver luogo ovunque (e non solo in un intorno di I), il campo di esistenza di f_n tendendo a quello di f. Ma si vede subito che queste restrizioni non occorrono, potendosi definire ogni funzione olomorfa nei punti di I quale differenza di due funzioni monodrome lacunari aventi lo stesso campo di esistenza, e quindi estendere ad essa la definizione di A; e così pure si può aggiungere alle f_n ed alla funzione limite f una stessa funzione esistente nel solo campo di convergenza.

Sia D un dominio avente I nell'interno, e la cui frontiera F si componga di un numero finito di curve regolari. Se $\varphi(\xi)$ è una qualunque funzione continua dei punti di F, la formola

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_F \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi - \zeta}$$

definisce una funzione olomorfa internamente a D, e quindi appartenente ad un insieme Ω_1 contenuto in Ω. $A\,|\,[f]\,|$ risulta in Ω_1 un funzionale lineare di φ, e ammette pertanto l'espressione

$$\int_F \varphi(\xi)\,du(\xi),$$

essendo u una funzione complessa a variazione limitata dei punti di F. Se quindi in particolare f è olomorfa anche nei punti di F, e quindi in tutti quelli di un conveniente dominio regolare D', di frontiera F', contenente D, si potrà porre

$$\varphi(\xi) = f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{F'} \frac{f(\xi')\,d\xi'}{\xi' - \xi},$$

donde

$$A\,|\,[f]\,| = \frac{1}{2\pi i}\int_F du(\xi)\int_{F'} \frac{f(\xi')\,d\xi'}{\xi' - \xi},$$

e, posto

$$v(\zeta) = \int_F \frac{du(\xi)}{\zeta - \xi},$$

risulterà infine

$$A\,|\,[f]\,| = \frac{1}{2\pi i}\int_{F'} f(\zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta.$$

La funzione v è evidentemente olomorfa esternamente a D [1] (e nulla all'infinito); e ad F' si può sostituire ogni curva (composta in generale di più porzioni chiuse) che racchiuda le singolarità di v e lasci all'esterno quelle di f.

Sia ζ_0 un punto esterno a D. Si avrà

$$A\left|\left[\frac{1}{\zeta - \zeta_0}\right]\right| = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{v(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0},$$

dove C contiene D e lascia all'esterno ζ_0. La funzione (avente uno zero almeno doppio all'infinito) $\dfrac{v(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}$ ha residuo integrale nullo, sicchè l'inte-

(1) Naturalmente, se D è a più contorni, le determinazioni di v non apparterranno in generale ad un'unica funzione analitica.

grale precedente è l'opposto del residuo di tale funzione nel punto z_0, cioè vale $-v(z_0)$; si trova così la definizione diretta di v.

Cambiando v di segno, ponendo cioè

$$v(z_0) = \mathrm{A}\left|\left[\frac{1}{z - z_0}\right]\right|$$

si può scrivere

$$\mathrm{A}\,|\,[f(z)]\,| = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,v(z)\,dz\,, \tag{1}$$

convenendo che la curva Γ sia percorsa negativamente, che la si riguardi cioè come racchiudente le singolarità di f e lasciante all'esterno quelle di v.

Tutto ciò nell'ipotesi che f sia olomorfa nei punti di D; ma D si può arbitrariamente restringere (p. es. mediante successive decomposizioni rettangolari) attorno ad I, fino a ridurlo interno al campo di definizione di f. *La formola* (1) *è dunque generale.*

2. – Sia D un dominio a più contorni, limitato esternamente dalla curva C ed internamente dalle curve $C_1, C_2, \cdots, C_m$. Consideriamo un insieme di funzioni $\varphi(z)$ olomorfe in un campo cui sia interno D: p. es. una successione $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$.

Cerchiamo sotto quali condizioni si può affermare che ogni funzione $f(z)$ olomorfa su D è uniformemente approssimabile mediante combinazioni lineari delle φ. Dalla teoria generale delle operazioni funzionali lineari si desume che all'uopo basta che nel campo delle funzioni f ogni funzionale lineare sia nullo, identicamente, non appena lo sia per le φ[1]. Per una funzione $v(z)$, regolare esternamente a D e nulla all'∞, si avrà allora $v \equiv 0$ non appena sia per tutte le φ

$$\int_\Gamma v(z)\,\varphi(z)\,dz = 0\,.$$

Siano $a_1, a_2, \cdots a_m$ m punti interni a $C_1, C_2, \cdots, C_m$ rispettivamente. L'insieme delle funzioni φ sia costituito: *a*) dall'unità, *b*) dalle potenze positive di z, *c*) dalle potenze negative di $z - a_i$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. Avendosi, per una curva semplice Γ che racchiuda C,

$$\int_\Gamma v(z)\,z^n\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

v sarà nulla esternamente a C.

(1) Cfr. p. es. HAHN, *Ueber lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, (« Journal für die reine und angewandte Mathematik », vol. 157), § 1. In verità, lo spazio delle funzioni f non si presenta quale spazio lineare metrico completo; ma si genera subito a partire da spazi siffatti, mercè un semplice passaggio al limite.

Così pure dall'essere, per una curva Γ interna a C_i e racchiudente a_i,

$$\int_{\Gamma} \frac{v(z)\,dz}{(z-a_i)^n} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

segue che v è nulla nell'interno di C_i. E pertanto:

Ogni funzione olomorfa su D *si può approssimare uniformemente mediante combinazioni lineari delle funzioni* $1, z^n, (z-a_i)^{-n}$. *In particolare, se* D *è semplicemente connesso, l'approssimazione si consegue mediante soli polinomî.*

Si ritrovano così i teoremi di Runge sulla rappresentazione delle funzioni analitiche [1].

Matematica (Geometria). — *Un teorema sullo spigolo di Green.* Nota di R. Calapso, presentata [2] dal Corrisp. G. Fubini.

Data una superficie S, per un suo punto P si consideri la cubica osculatrice ad una asintotica; questa cubica ha tre intersezioni riunite in P con la quadrica di Lie, epperò taglia ulteriormente la detta quadrica in tre punti M_1, M_2, M_3; sia M il punto comune ai piani osculatori alla cubica in M_1, M_2, M_3. In questa Nota si dimostra che il piano che da M proietta la tangente all'asintotica passa per lo spigolo di Green.

Lo spigolo di Green si può allora definire come l'intersezione del detto piano col piano analogo che si ottiene operando sull'altra asintotica.

§ 1. Formole fondamentali. – Riferendo la data superficie S alle linee asintotiche, le coordinate proiettive non omogenee x, y, z di un suo generico punto $P(u, v)$ soddisfano ad equazioni della forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

essendo a, b, p, q funzioni di u e v legate da certe relazioni [3].

Facciamo corrispondere, secondo l'uso, alle coordinate $(x'' y'' z'')$ di un qualsiasi punto dello spazio ambiente le ausiliarie $(x' y' z')$, mediante la posizione:

$$x'' = x + x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial x}{\partial v} + z'\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}.$$

(1) Si potrebbe naturalmente anche supporre D composto di più porzioni staccate.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Cfr. Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale*, t. I, pp. 89-96, 1926. Cfr. anche P. Calapso, *Sulle reti e congruenze coniugate* ecc. « Annali di Matematica », serie 4ª, t. IV, 1926.

Nelle coordinate ausiliarie $(x' y' z')$ la quadrica di Lie è rappresentata dalla equazione

$$(1) \qquad z' - x' y' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) z'^2 = 0 ,$$

mentre la cubica osculatrice all'asintotica v passante per P si può rappresentare mediante le equazioni parametriche, denotando con u il parametro, senza tema di ambiguità:

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = u - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right) u^2 + \mathrm{M}u^3 \\ y' = \frac{b}{2} u^2 \\ z' = \frac{b}{6} u^3 \\ t' = 1 + \mathrm{N}u^2 + \mathrm{H}u^3 \end{cases}$$

essendo M, N, H certe espressioni formate con a, b, p, q e le loro derivate, la cui trascrizione esplicita qui non interessa, e che soddisfano alla relazione:

$$3\mathrm{M} + \mathrm{N} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq\right).$$

§ 2. Deduzione del teorema. – Per determinare le coordinate dei punti $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ (ulteriori intersezioni della detta cubica osculatrice con la quadrica di Lie) basta sostituire nella equazione (1) (ridotta a forma omogenea) le espressioni (2).

Si ottiene così l'equazione di terzo grado:

$$(3) \qquad \frac{1}{u^3} - \left(\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}(3\mathrm{M} - \mathrm{N})\frac{1}{u} - \left[\frac{b}{24}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) + \frac{\mathrm{H}}{2}\right] = 0 .$$

D'altra parte le coordinate del punto comune ai piani osculatori in tre punti qualunque u_1, u_2, u_3 della cubica sono espresse dalle formole:

$$x'_0 = \frac{1}{u_2 u_3} + \frac{1}{u_1 u_3} + \frac{1}{u_1 u_2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + 3\mathrm{M}$$

$$y'_0 = \frac{b}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right)$$

$$z'_0 = \frac{b}{2}$$

$$t'_0 = \frac{3}{u_1 u_2 u_3} + \mathrm{N}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + 3\mathrm{H};$$

ma, nel caso presente, u_1, u_2, u_3 sono le radici dell'equazione (3). Allora le precedenti dànno (per le coordinate del detto punto M):

$$\frac{y'_0}{z'_0} = \frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{a}{2}.$$

Da qui si deduce l'equazione del piano π che proietta da M la tangente all'asintotica; essa è:

$$y' - \left(\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{a}{2}\right)z' = 0.$$

L'equazione del piano π', analogo a π quando si operi sull'altra asintotica è

$$x' - \left(\frac{1}{4p}\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{q}{2}\right)z' = 0$$

e la intersezione dei due piani π, π' è la congiungente il punto della superficie col punto

$$x' = \frac{1}{4p}\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{q}{2} \quad ; \quad y' = \frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{a}{2} \quad ; \quad z' = 1.$$

La retta così ottenuta si identifica pertanto con lo spigolo di Green [1], come abbiamo annunziato.

Osservazione. – Chiudiamo osservando che la cubica (2) definisce sempre il sistema nullo osculatore all'asintotica v anche se M, N, H sono QUALUNQUE, purchè soddisfacenti alla relazione

$$3M + N = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq\right).$$

(1) V. FUBINI, loc. cit., p. 153. Cfr. STRAZZERI, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. LIV, p. 296.

Meccanica. — *Sul comportamento delle forze di reazione nel moto di un qualsivoglia sistema materiale sollecitato da forze posizionali.* Nota di E. Gugino, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Abbiamo recentemente [2] caratterizzato le forze di reazione $\mathbf{R}_i$ provenienti dai vincoli, che si esercitano sui punti P_i ($i = 1, 2 \cdots N$) di un qualsivoglia sistema materiale, con un procedimento del tutto indipendente dalla risoluzione del problema dinamico fondamentale, mostrando come, per ogni sollecitazione attiva $\mathbf{F}_i$, si possano generalmente esprimere tali reazioni in funzione della configurazione, dell'atto di moto del sistema (distribuzione delle velocità $\boldsymbol{v}_i$) e del tempo [3].

Facciamo ora l'ipotesi, poco restrittiva, che la sollecitazione $\mathbf{F}_i$ sia più semplicemente posizionale; ci proponiamo di mostrare, che in tale ipotesi, può essere messa in luce una speciale decomposizione, assai semplice ed espressiva, delle forze $\mathbf{R}_i$, in quanto, scritte le relazioni:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^{*} + \mathbf{R}_i^{(v)} + \mathbf{R}_i^{(F)} \tag{1}$$

i componenti al secondo membro hanno rispettivamente speciale struttura funzionale, con significato meccanico intrinseco, suscettibile di immediata interpretazione. Più particolarmente:

1° Il componente $\mathbf{R}_i^{*}$ (componente ad ogni istante esclusivamente posizionale) risulta solo funzione della configurazione e del tempo ed inoltre trae origine essenzialmente dalla circostanza che i vincoli dipendono dal tempo; tale componente, come vedremo, a partire da un istante e da una configurazione quali si vogliono, si identifica con la reazione $\mathbf{R}_i$, solo nel

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) Cfr. E. Gugino, *Sul problema dinamico di un qualsivoglia sistema vincolato ridotto all'analogo problema relativo ad un sistema libero*, «Rend. Acc. Lincei», vol. XII, 2° sem. 1930, pp. 307-312; *Sur la détermination des forces de réaction dans le mouvement d'un système matériel*, «Comptes Rendus», t. 191, n. 23, 8 dicembre 1930, pp. 1118-1120.

(3) Il prof. G. A. Maggi mi ha recentemente avvertito di avere, con diverso metodo, precedentemente caratterizzato le reazioni $\mathbf{R}_i$ (vedere § 82 della *Dinamica dei Sistemi* del Maggi, Zanichelli, 1921) con preciso riferimento ad un sistema di corpi rigidi. In verità i procedimenti del Maggi, assai interessanti e molto originali, notevolmente differiscono, per la forma, dagli ordinari procedimenti della meccanica analitica, che quasi sempre traggono origine dalla classica impostazione lagrangiana delle questioni relative alla dinamica dei sistemi vincolati; talchè qualche volta può accadere, che la novità della forma, nella trattazione del Maggi, nasconda la novità del contenuto. Ciò sia detto a semplice giustificazione del fatto che il risultato riportato nel testo del Maggi, a me, come alla maggior parte, credo, dei cultori di meccanica, è passato inosservato. Per tale ragione nelle mie due precedenti Note non è stata fatta alcuna menzione del trattato del Maggi; menzione che sarebbe stata indispensabile anche per stabilire doverosamente la priorità del risultato.

caso che l'atto di moto del sistema sia nullo (quiete) e la sollecitazione attiva sia pure nulla, in corrispondenza all'istante ed alla configurazione considerata.

2° Il componente $\mathbf{R}_i^{(\tau)}$ (componente cinetico) risulta funzione quadratica, in generale non omogenea, nelle velocità intensive v_i (moduli delle velocità $\boldsymbol{v}_i$) dei punti P_i, a coefficienti (vettori) perfettamente determinati in funzione della configurazione, dei versori $\boldsymbol{u}_i$ delle velocità $\boldsymbol{v}_i$ e del tempo; tale componente trae origine essenzialmente dall'atto di moto del sistema e si identifica, come vedremo, con $\mathbf{R}_i$ solo nel caso di una sollecitazione nulla e per vincoli indipendenti dal tempo (moto spontaneo).

3° Il componente $\mathbf{R}_i^{(F)}$ (componente statico) risulta espresso mediante una forma lineare nei moduli F_i della sollecitazione attiva $\mathbf{F}_i$ a coefficienti (vettori) dipendenti, ad ogni istante, dalla configurazione del sistema e dai versori $\boldsymbol{w}_i$ di detta sollecitazione, ma non dall'atto di moto $\boldsymbol{v}_i$; tale componente trae origine essenzialmente dalla sollecitazione attiva e si identifica, come vedremo, con $\mathbf{R}_i$ nel caso statico ($v_i = 0$) e per vincoli indipendenti dal tempo; di tale componente ci proponiamo di assegnare l'espressione generale, ciò, che credo, non sarà del tutto privo di interesse [1].

Un particolare cenno faremo infine del comportamento delle reazioni per i sistemi a legami indipendenti dal tempo; in tale ipotesi il componente $\mathbf{R}_i^*$ è identicamente nullo ed il componente $\mathbf{R}_i^{(\tau)}$ risulta, come vedremo, espresso più semplicemente, mediante una FORMA QUADRATICA, nelle velocità intensive v_i a coefficienti, dipendenti solo dalla configurazione e dai versori $\boldsymbol{u}_i$; il componente $\mathbf{R}_i^{(F)}$ risulta esprimibile mediante una forma lineare nei moduli F_i a coefficienti (vettori) dipendenti esclusivamente dalla configurazione e dai versori $\boldsymbol{w}_i$; ne segue, che se le $\boldsymbol{v}_i$ non sono tutte nulle, interviene nel computo delle reazioni $\mathbf{R}_i$ il contributo cinetico, globalmente caratterizzato dal componente $\mathbf{R}_i^{(\tau)}$ che vettorialmente viene a sommarsi al componente statico, $\mathbf{R}_i^{(F)}$ che è quello che si genera, in corrispondenza ad ogni configurazione, nel caso che il sistema, nella configurazione generica, si mantenga in equilibrio.

Ritornando rapidamente sulle considerazioni svolte, riteniamo opportuno ricordare che i vincoli del sistema, olonomi o più generalmente anolonomi, dipendenti o no esplicitamente dal tempo, sono, come è noto, esprimibili per mezzo di equazioni del tipo:

$$\sum_i^N \boldsymbol{b}_{hi} \times \boldsymbol{v}_i = b_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, r) \tag{2}$$

(1) Generalmente, nella statica, le reazioni $\mathbf{R}_i$ si esprimono linearmente per mezzo di r parametri λ_k indeterminati (r uguale al numero delle equazioni dei vincoli); la determinazione di tali parametri, volta per volta, può farsi con procedimento ben noto a partire dalla configurazione di equilibrio, facendo intervenire opportuni spostamenti ausiliari (cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, Bologna, Zanichelli, vol. I, pp. 745-748 della 2ª edizione). Tali reazioni non risultano però espresse, per quanto mi consta, nella maniera più generale, in funzione di una qualsivoglia configurazione e della sollecitazione attiva $\mathbf{F}_i$ atta a mantenere il sistema in equilibrio nella prescelta configurazione.

ove i vettori $\boldsymbol{b}_{hi}$, come pure gli scalari b_h, dipendono dalla configurazione e dal tempo; solo nel caso di vincoli fissi tutte le b_h sono nulle ed i vettori $\boldsymbol{b}_{hi}$ dipendono esclusivamente dalla configurazione. Attribuendo alle forze di legame le note espressioni lagrangiane:

$$\mathbf{R}_s = \sum_1^r{}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_{ks} \tag{3}$$

per caratterizzare tali forze, occorre determinare gli r moltiplicatori λ_k in funzione delle posizioni, delle velocità dei punti, e del tempo. A tale fine, come abbiamo visto, occorre risolvere il sistema delle r equazioni lineari:

$$\sum_1^r{}_k \alpha_{hk} \lambda_k = \mathrm{G}_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, r) \tag{4}$$

ove

$$\alpha_{hk} = \sum_1^N{}_i \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{hi} \times \boldsymbol{b}_{ki}$$

e le

$$\mathrm{G}_h = c_h - \sum_1^N{}_i \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{hi} \times \mathbf{F}_i$$

con le c_h funzioni (scalari) provenienti dalla derivazione delle (2) rapporto al tempo e dipendenti esclusivamente, ad ogni istante, dalla configurazione e dall'atto di moto del sistema; manifestamente può scriversi:

$$\mathrm{G}_h = \frac{db_h}{dt} - \sum_1^N{}_i \frac{d\boldsymbol{b}_{hi}}{dt} \times \boldsymbol{v}_i - \sum_1^N{}_i \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{hi} \times \mathbf{F}_i \qquad (h = 1, 2, \cdots, r). \tag{5}$$

Supponendo le equazioni (2) dei vincoli, indipendenti, abbiamo rilevato che il sistema (4) può effettivamente essere risoluto rispetto alle incognite λ_k. Denotando con α^{hk} l'elemento reciproco dell'elemento generico α_{hk} nel determinante $\| \alpha_{hk} \|$ siffatta risoluzione conduce alle seguenti espressioni dei parametri:

$$\lambda_k = \sum_1^r{}_h \alpha^{kh} \mathrm{G}_h \tag{6}$$

con le α^{kh} al pari delle α_{kh} dipendenti dalla configurazione e dal tempo.

Ciò premesso alle funzioni G_h definite dalle (5) possiamo dare forma diversa, particolarmente notevole. A tale fine si osservi che l'operazione d/dt in quanto si applichi allo scalare b_h, funzione dei punti P_i e del tempo, ha la forma esplicita:

$$\frac{db_h}{dt} = \frac{\partial b_h}{\partial t} + \sum_1^N{}_i \frac{\partial b_h}{\partial \mathrm{P}_i} \boldsymbol{v}_i \qquad (h = 1, 2, \cdots, r) \tag{7}$$

ove l'operatore $\frac{\partial b_h}{\partial P_i}$, (iperomografia [1]) applicato al vettore $\boldsymbol{v}_i$ produce, come è noto, lo scalare:

$$\frac{\partial b_h}{\partial P_i}\boldsymbol{v}_i = (\operatorname{grad}_{P_i} b_h) \times \boldsymbol{v}_i \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, r \\ i = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

ed il gradiente parziale $\operatorname{grad}_{P_i} b_h$ si intende calcolato facendo variare soltanto P_i mentre il tempo e gli altri punti del sistema si considerano come fissi; la (7) allora può scriversi:

$$(7') \qquad \frac{db_h}{dt} = \frac{\partial b_h}{\partial t} + \sum_1^N{}_i (\operatorname{grad}_{P_i} b_h) \times \boldsymbol{v}_i \qquad (h = 1, 2, \cdots, r).$$

Analogamente l'operazione $d\,dt$ in quanto si applichi ai vettori $\boldsymbol{b}_{hi}$ funzioni dei punti P_i e del tempo, assume la forma:

$$(8) \qquad \frac{d\boldsymbol{b}_{hi}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial t} + \sum_1^N{}_j \frac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial P_j}\boldsymbol{v}_j \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, r \\ i = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

ove l'operatore $\frac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial P_j}$ (omografia vettoriale) applicato al vettore $\boldsymbol{v}_j$ produce il vettore:

$$(9) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial P_j}\boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{v}_j \times \operatorname{grad}_{P_j})\,\boldsymbol{b}_{hi} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, r \\ i, j = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

le cui componenti rispetto ad una terna galileiana $\Omega(\xi\eta\zeta)$ prefissata, sono notoriamente definite dalle relazioni:

$$[(\boldsymbol{v}_j \times \operatorname{grad}_{P_j})\,\boldsymbol{b}_{hi}]_\xi = \boldsymbol{v}_j \times (\operatorname{grad}_{P_j} b'_{hi})$$
$$[(\boldsymbol{v}_j \times \operatorname{grad}_{P_j})\,\boldsymbol{b}_{hi}]_\eta = \boldsymbol{v}_j \times (\operatorname{grad}_{P_j} b''_{hi})$$
$$[(\boldsymbol{v}_j \times \operatorname{grad}_{P_j})\,\boldsymbol{b}_{hi}]_\zeta = \boldsymbol{v}_j \times (\operatorname{grad}_{P_j} b'''_{hi})$$

con le $b'_{hi}, b''_{hi}, b'''_{hi}$ componenti, secondo gli assi, del generico vettore $\boldsymbol{b}_{hi}$ e coi rispettivi gradienti parziali calcolati nel modo già espresso.

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della (8) per $\boldsymbol{v}_i$, tenendo conto delle (9), sommando rispetto all'indice i, si ottiene:

$$\sum_1^N{}_i \frac{d\boldsymbol{b}_{hi}}{dt} \times \boldsymbol{v}_i = \sum_1^N{}_i \frac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial t} \times \boldsymbol{v}_i + \sum_1^N{}_{ij} [(\boldsymbol{v}_j \times \operatorname{grad}_{P_j})\,\boldsymbol{b}_{hi}] \times \boldsymbol{v}_i$$
$$(h = 1, 2, \cdots, r).$$

(1) Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analisi vettoriale generale e applicazioni*, cap. II, § 1, n. 1.

A norma delle (7') e dell'ultima relazione, sostituendo $v_i \boldsymbol{u}_i$, $v_j \boldsymbol{u}_j$, $F_i \boldsymbol{w}_i$ in luogo di $\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{v}_j$, $\mathbf{F}_i$, per una ben nota proprietà degli operatori lineari, le funzioni scalari G_h definite dalle (5) possono assumere la forma:

$$(10) \qquad G_h = \frac{\partial b_h}{\partial t} + \sum_1^N{}_i \left[(\mathrm{grad}_{P_i} b_h) - \frac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial t} \right] \times \boldsymbol{u}_i v_i +$$

$$- \sum_1^N{}_{ij} [(\boldsymbol{u}_j \times \mathrm{grad}_{P_j}) \boldsymbol{b}_{hi}] \times \boldsymbol{u}_i v_i v_j - \sum_1^N{}_i \frac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{hi} \times \boldsymbol{w}_i F_i \quad (h = 1, 2, \cdots, r).$$

Denotando con:

$$(11) \qquad \begin{cases} U_{hi} = \left[(\mathrm{grad}_{P_i} b_h) - \dfrac{\partial \boldsymbol{b}_{hi}}{\partial t} \right] \times \boldsymbol{u}_i \\ U_{hij} = [(\boldsymbol{u}_j \times \mathrm{grad}_{P_j}) \boldsymbol{b}_{hi}] \times \boldsymbol{u}_i \\ \Phi_{hi} = \dfrac{1}{m_i} \boldsymbol{b}_{hi} \times \boldsymbol{w}_i \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, r \\ i, j = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

con i secondi membri funzioni (scalari) dipendenti, oltre che dai versori $\boldsymbol{u}_i$ e $\boldsymbol{w}_i$, dalla configurazione e dal tempo, le (10) possono più semplicemente scriversi:

$$G_h = \frac{\partial b_h}{\partial t} + \sum_1^N{}_i U_{hi} v_i - \sum_1^N{}_{ij} U_{hij} v_i v_j - \sum_1^N{}_i \Phi_{hi} F_i \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

avuto riguardo a tali relazioni ed alle (6), le (3) danno

$$(12) \qquad \mathbf{R}_s = \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} \frac{\partial b_h}{\partial t} \boldsymbol{b}_{ks} + \sum_1^N{}_i \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} U_{hi} \boldsymbol{b}_{ks} v_i +$$

$$- \sum_1^N{}_{ij} \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} U_{hij} \boldsymbol{b}_{ks} v_i v_j - \sum_1^N{}_i \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} \Phi_{hi} \boldsymbol{b}_{ks} F_i .$$

Nell'ipotesi che la sollecitazione attiva sia più semplicemente posizionale, ponendo:

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathbf{R}^*_s = \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} \dfrac{\partial b_h}{\partial t} \boldsymbol{b}_{ks} & \text{(Dipendente ad ogni istante esclusivamente dalla configurazione)} \\ \left.\begin{aligned} \mathbf{R}_{si} &= \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} U_{hi} \boldsymbol{b}_{ks} \\ \mathbf{R}_{sij} &= \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} U_{hij} \boldsymbol{b}_{ks} \end{aligned}\right\} & \text{(Dipendenti ad ogni istante dalla configurazione e dai versori } \boldsymbol{u}_i) \\ \mathfrak{R}_{si} = \sum_1^r{}_{kh} \alpha^{kh} \Phi_{hi} \boldsymbol{b}_{ks} & \text{(Dipendente ad ogni istante dalla configurazione e dai versori } \boldsymbol{w}_i) \end{cases}$$

le (12) assumono l'aspetto

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s^* + \sum_{i}^{N} \mathbf{R}_{si}\, v_i - \sum_{ij}^{N} \mathbf{R}_{sij}\, v_i\, v_j - \sum_{i}^{N} \underline{\mathcal{R}}_{si}\, \mathrm{F}_i .$$

Si riconosce così che i vettori

$$\mathbf{R}_s^{(v)} = \sum_{i}^{N} \mathbf{R}_{si}\, v_i + \sum_{ij}^{N} \mathbf{R}_{sij}\, v_i\, v_j$$

$$\mathbf{R}_s^{(F)} = -\sum_{i}^{N} \underline{\mathcal{R}}_{si}\, \mathrm{F}_i$$

rispettivamente caratterizzano i contributi cinetici e statici, che intervengono in base alle (1) (a meno della denominazione dell'indice) nel computo delle reazioni, coi caratteri sopra definiti.

Per i sistemi a legami indipendenti dal tempo, i vettori $\mathbf{R}_s^*$ ed $\mathbf{R}_{si}$ risultano identicamente nulli; le (I) assumono allora la forma più semplice:

$$\text{(I')} \qquad \mathbf{R}_s = -\sum_{ij}^{N} \mathbf{R}_{sij}\, v_i\, v_j - \sum_{i}^{N} \underline{\mathcal{R}}_{si}\, \mathrm{F}_i .$$

Se la sollecitazione attiva si suppone nulla, manca l'ultima sommatoria e le reazioni $\mathbf{R}_s$ hanno naturalmente carattere esclusivamente cinetico.

Nel caso statico ($v_i = 0$) tenendo conto delle ultime delle (13) e delle (11), dalla (I') si deduce:

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{R}_s = -\sum_{i}^{N} \sum_{kh}^{r} \frac{\alpha^{kh}}{m_i} (\boldsymbol{b}_{hi} \times \mathbf{F}_i) \cdot \boldsymbol{b}_{ks}$$

per ogni configurazione e per ogni sollecitazione attiva $\mathbf{F}_i$ atta a mantenere il sistema in equilibrio nella configurazione prefissata.

Si può quindi concludere che nel moto di un qualsivoglia sistema materiale, sollecitato da forze posizionali, le leggi della meccanica impongono, alle forze di reazione $\mathbf{R}_s$, un particolare comportamento: tali forze si esplicano sempre in maniera tale che mentre nel caso statico, per effetto della sollecitazione direttamente applicata, sono espresse dalle (II), nel caso dinamico, ad ogni istante, a norma delle (I) intervengono i contributi posizionali ($\mathbf{R}_s^*$) e cinetici ($\mathbf{R}_s^{(v)}$) esprimibili, questi ultimi, qualunque sia la legge del moto e le modalità di realizzazione dei vincoli, mediante funzioni quadratiche, in generale non omogenee, nelle velocità intensive simultanee degli N punti P_i del sistema.

Chimica (Chimica fisica). — *Spettro Raman e costituzione chimica in alcuni cloroetileni* [1]. Nota di G. B. Bonino e L. Brüll, presentata [2] dal Corrisp. Mario Betti.

In un recente lavoro [3] Mecke fa uno studio dello spettro molecolare ultrarosso dell'etilene distinguendo le frequenze di oscillazione caratteristiche per la molecola del detto idrocarburo in oscillazioni « di valenza » ed oscillazioni « di deformazione ». Le prime corrisponderebbero alle oscillazioni degli atomi o dei gruppi atomici nelle molecole parallelamente alla direzione delle forze di valenza, le altre sarebbero legate ai fattori che impediscono un cambiamento della forma della molecola i quali, alla loro volta, dipendono dalle forze di valenza.

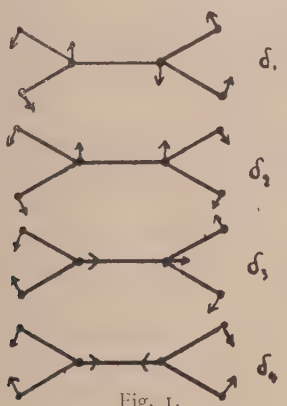


Fig. 1.

Così nel caso dell'etilene (per fermarci al tipo delle oscillazioni di deformazione sotto schematizzate) (v. fig. 1)

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \sqrt{\frac{2}{C + 2H}} : \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2H} + \frac{1}{C}\right)} : \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{H}} = 1 : 1.42 : 1.87$$

mentre sperimentalmente si trova $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 1 : 1.52 : 1.99$. Per la δ_4 il Mecke conclude che si deve considerare come una frequenza pura del C = C e cioè del doppio legame, frequenza che il Mecke considera indipendente dalla massa dei sostituenti legati agli atomi di Carbonio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.
(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.
(3) R. Mecke, « Zeitschr. für Phys. », 64, p. 173 (1930).

Era interessante vedere quale grado di concordanza si poteva ottenere coi dati sperimentali passando dall'etilene per es. ad etileni nei quali gli atomi di idrogeno fossero sostituiti con atomi di alogeno.

Il caso più semplice ci è fornito dallo studio del percloroetilene C_2Cl_4 la cui molecola è simmetrica al pari di quella dell'etilene. Per tale composto i valori δ_1, δ_2, δ_3 ci porterebbero, parallelamente a quanto Mecke ha posto per l'etilene, a scrivere:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \sqrt{\frac{2}{C + 2Cl}} : \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2Cl} + \frac{1}{C}\right)} : \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{Cl}} = 1.31 : 1.85 : 1.$$

Ora nello spettro Raman del percloroetilene studiato da Pringsheim e Rosen [1] figurano tre frequenze proprie di notevole intensità che stanno tra loro presso a poco come i δ soprascritti e cioè (in numeri d'onda)

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 341 : 447 : 234 = 1.45 : 1.91 : 1.$$

Per il δ_4 e cioè per la frequenza propria del doppio legame il C_2Cl_4 presenta una Raman corrispondente a $\nu' = 1570$ valore che, pure essendo in posizione assai vicina al valore $\nu' = 1623$ che si ha nell'etilene, ci dimostra che tale frequenza propria del doppio legame non è del tutto indipendente dalla massa dei sostituenti dei due atomi di C.

Passando a derivati dell'etilene con idrogeni non completamente sostituiti con alogeno presentano interesse i due 1 — 2 dicloroetileni cis e trans e potrebbe avere per questi un particolare significato lo studio ed il confronto delle frequenze proprie relative ad oscillazioni « di valenza » e « di deformazione ». In un lavoro [2] eseguito da noi nel 1928 abbiamo già messo in evidenza alcune differenze che esistono tra gli spettri Raman di queste forme isomere. Però per uno studio ulteriore abbiamo voluto ripetere con mezzi sperimentali più perfezionati e più rispondenti allo scopo gli spettri Raman dei due dicloroetileni eseguiti nel 1928 con i mezzi alquanto rudimentali di cui potevamo allora disporre. A tale proposito ci è grato ringraziare il prof. Mario Betti direttore di questo Istituto che ha voluto benevolmente mettere a nostra disposizione i fondi necessarî per l'acquisto di uno spettrografo Zeiss di alta luminosità (apertura degli obbiettivi F/5) che ci ha permesso di perfezionare in modo notevole i risultati ottenuti in precedenza.

La dispersione del nostro spettrografo poteva esser di circa 50 Å per mm. usufruendo della massima luminosità e di 25 A per mm. utilizzando per la camera un obbiettivo di luminosità inferiore. I due isomeri geometrici vennero ottenuti nel modo descritto in precedenti lavori [3].

(1) « Zeitschr. für Phys. », 50, p. 745 (1928).
(2) « Zeitschr. für Phys. », 58, p. 194 (1929).
(3) « Gazz. Chim. It. », 59, fasc. IX, 1929.

Lo spettro Raman veniva eccitato mediante una lampada a vapori di mercurio Gallois tipo K. Nelle tabelle seguenti per l'indicazione delle righe eccitatrici seguiamo il simbolismo proposto da Kohlrausch e da Dadieu [1] e da noi correntemente adottato in precedenti lavori [1] e riassumiamo nel seguente specchietto quanto concerne alle righe eccitatrici che interessano il presente lavoro

λ in Å	ν in cm. $^{-1}$	Indicazione
4358.3	22938	*e*
4077.8	24516	*i*
4046.8	24705	*k*
3662.9	27293	*o*
3654 8	27353	*p*
3650.2	27388	*q*

EFFETTO RAMAN NEL *cis* — 1-2 DICLOROETILENE (p. e. 60°, 25 a 760 mm.)

N. d'ord.	ν in cm. $^{-1}$	I	Riferimento	N. d'ord.	ν in cm. $^{-1}$	I	Riferimento
1	19859	(3)	*e* — 3079	11	22762	(3)	*e* — 176
2	21260	(1)	*b* — 3075 *e* — 1678	12	23120	(3)	*k* — 1585
3	21351	(2)	*e* — 1587	13	23341	(2)	*e* + 406
4	21445	(1)	*i* — 3071	14	23525	(4)	*k* — 1180
5	21553	(0)	*e* — 1385? *k* — 3152	15	23832	(1)	*k* — 873
6	21621	(5)	*k* — 3084	16	23997	(3)	*k* — 708
7	21760	(4)	*e* — 1178 *k* — 2945	17	24218	(2)	*o* — 3075
8	22227	(5)	*e* — 711	18	24273	(2)	*p* — 3080
9	22378	(3)	*e* — 560	19	24308	(2)	*q* — 3080
10	22532	(3)	*e* — 406	20	24883	(2)	*k* + 178

ν' = 3152 (0); 3078 (4); 2945 (?): 1678 (1); 1586 (2 1/2)
1179 (4); 873 (1); 709 (4); 560 (3); 406 (3); 177 (3)

(1) «Zeitschr. Ber. Acc. Wiss. Wien», A. 2ª, 138, p. 44 (1929).

EFFETTO RAMAN NEL *trans* 1–2 DICLOROETILENE (p. e. 48°, 35 a 760 mm.)

N. d'ord.	ν in cm. $^{-1}$	I	Riferimento	N. d'ord.	ν' in cm. $^{-1}$	I	Riferimento
1	19859	(3)	e — 3079	13	22584	(4)	e — 354
2	21239	(1/2)	h — 3096? e — 1699	14	22644	(0)	?
3	21293	(1/2)	e — 1645	15	23125	(2)	k — 1580
4	21358	(3)	e — 1580	16	23235	(1)	i — 1281
5	21442	(1)	i — 3074	17	23285	(1)	e + 347
6	21556	(1)	e — 1382? k — 3142	18	23432	(4)	k — 1273
7	21625	(4)	k — 3080	19	23861	(3)	k — 844
8	21654	(4)	e — 1284 k — 3051?	20	23943	(2)	k — 762
				21	23995	(1)	k — 710
9	21753	(1/2)	e — 1185 k — 2952?	22	24217	(2)	o — 3076
10	22087	(3)	e — 851	23	24279	(2)	p — 3074
11	22159	(2 1/2)	e — 779	24	24360	(2)	k — 345
12	22225	(1)	e — 713	25	25063	(1)	k + 358

ν' = 3142 (1); 3076 (4); 3051 (4?); 2952 (1/2?); 1699 (1/2?); 1645 (1/2?); 1580 (2 1/2) 1279 (4); 1185 (1/2); 847 (3); 770 (2); 711 (1); 351 (3)

I mezzi sperimentali assai più efficienti ci hanno permesso di rilevare un numero maggiore di righe che non nelle precedenti misure [1]. Riguardo al riferimento delle varie righe abbiamo pure apportato qualche variazione. Innanzi tutto riferiamo le 21553 dell'isomero cis e la 21556 del trans alla eccitatrice k che ci porta ad una frequenza propria rispettivamente di 3152 e 3142 numeri d'onda. Tale frequenza invero dovrebbe attribuirsi ad una oscillazione di valenza del gruppo CH come nello spettro dell'etilene dimostra Mecke ($\nu = 3107$). Così la 21260 del cis, la 21239 e la 21293 del trans derivato vengono anche riferite alla e portando rispettivamente ai valori di frequenze proprie 1678, 1699, 1645 ur. d'onda frequenze che sarebbero riferibili al doppio legame. Resta però oscuro perchè accanto alla riga del doppio legame C = C che cade a 1580 circa in questi composti

(1) Così per il trans derivato troviamo una riga molto intensa corrispondente a 351 cm $^{-1}$ anzichè a 243 cm $^{-1}$. Tale valore di $\div$ 350 cm $^{-1}$ è confermato pure da recenti ricerche del prof. Kohlrausch di Graz come gentilmente ci ha comunicato in una lettera del 4 agosto 1930 di cui vivamente lo ringraziamo.

alogenati dell'etilene si abbiano altre righe più deboli in posizioni riferibili pure a frequenze del gruppo C = C. D'altra parte il riferimento alla riga *h* se può sostenersi per la 21260 del cis derivato nel caso del trans porta a valori discordanti e meno attendibili.

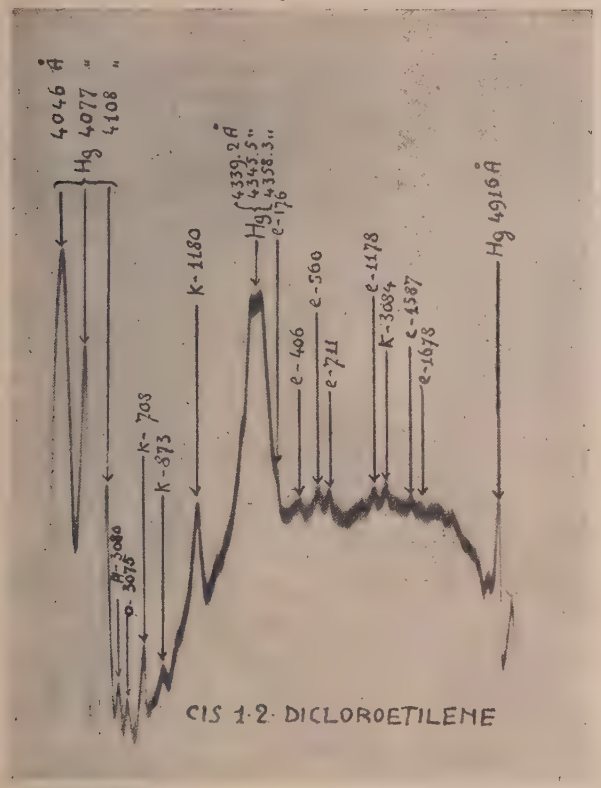


Fig. 2.

Le frequenze 3152, 3078 del cis derivato e le 3142 e 3076 nel trans sono da attribuirsi a frequenze d'oscillazione del C — H (nell'etilene si ha 3107 e 3019). Per il trans derivato (simmetrico) si potrebbero interpretare le righe a 21654 e 21753 riferibili anche a $k - 3051$ e $k - 2952$. Si avrebbe allora un parallelismo completo tra le frequenze di oscillazione di valenza del C — H nell'etilene e nel dicloroetilene a molecola simmetrica (trans):

Etilene (v. Mecke loc. cit.) $\nu_1 = 1342$, $\nu_2 = 3107$, $\nu_3 = 3019$, $\nu_4 = 2988$, $\nu_5 = 2880$

1–2 Dicloroetilene trans $\nu_1 = 1279$, $\nu_2 = 3142$, $\nu_3 = 3076$, $\nu_4 = 3051$, $\nu_5 = 2952$.

La $\nu_2 = 1279$ stando allo schema di Mecke dovrebbe corrispondere ad oscillazione inattiva del tipo $^{H}\!\!>\!\!\overset{\circ}{C}\!\!-\!\!\overset{\circ}{C}\!\!<^{H}$ nel trans derivato nel cui spettro Raman effettivamente si mostra, mentre nel caso del cis-derivato corrisponderebbe ad una frequenza attiva $^{H}\!\!>\!\!\overset{\circ}{C}\!\!-\!\!\overset{\circ}{C}\!\!<^{H}$; e tale è forse la ragione della mancanza di detta frequenza nello spettro di questo composto.

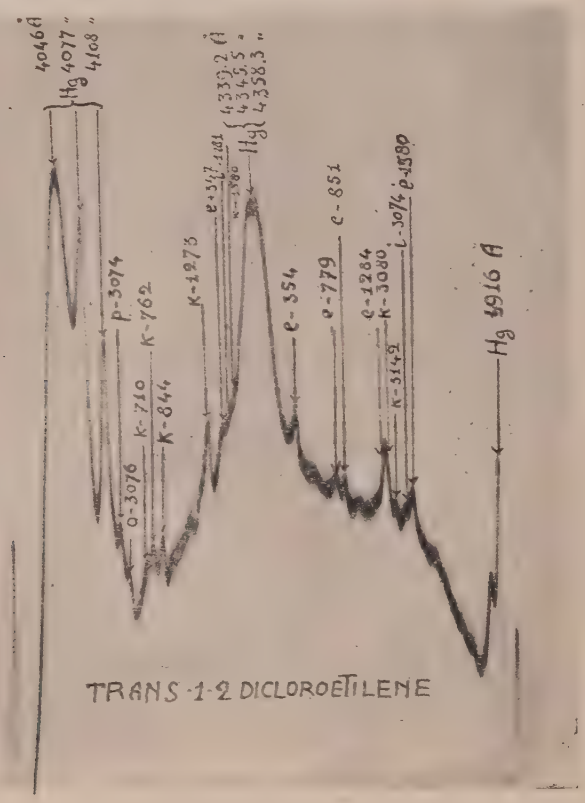


Fig. 3.

Analoghe ragioni dovrebbero addursi per sostenere eventualmente la mancanza della 3051 nello spettro dell'isomero cis e confermare il riferimento se pure parziale della 21656 e 21852 del trans-derivato e della 21760 del cis alla riga *k* dell' Hg.

Come oscillazione di valenza relativa al legame C — Cl è da ritenersi la $\nu^t = 847$ del trans e la $\nu^c = 873$ del cis. Infatti calcolando tale frequenza. colla relazione:

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{\mu}} \qquad \left(\begin{matrix}\mu = \text{massa ridotta} \\ f = \text{forza}\end{matrix}\right).$$

Seguendo il modo approssimato di calcolo dato da Kohlrausch e e Dadieu [1] si ha

$$\nu^{1} = 291.5 \sqrt{\frac{A}{\mu}} = 840 \text{ cm.}^{-1}.$$

$$\left(\begin{array}{c} A \text{ calore di legame C—Cl} \\ \mu = \frac{1}{C} + \frac{1}{Cl} \end{array} \right).$$

Un'analisi delle frequenze relative ad oscillazioni di deformazione riesce a prima vista più difficile in questi composti che non nel C_2Cl_4.

A tale scopo però ricordiamo che la Raman $\nu^{1} = 1440$ circa presentata da tutti i composti contenenti gruppi CH_2 è interpretata [2] come dovuta ad oscillazioni dei due idrogeni trasversalmente alla direzione della valenza C — H ovverosia (riferendoci al modello tetraedrico) ad oscillazioni di deformazione dei due H lungo uno spigolo del tetraedro. In *prima approssimazione* allora tale riga del gruppo $C\begin{smallmatrix}H\\H\end{smallmatrix}$ relativamente alla analoghe dei gruppi $C\begin{smallmatrix}Cl\\Cl\end{smallmatrix}$ del percloro–etilene e $C\begin{smallmatrix}H\\Cl\end{smallmatrix}$ dei dicloro etileni dovrebbe stare nella proporzione

$$\sqrt{\frac{1}{H} + \frac{1}{H}} : \sqrt{\frac{1}{Cl} + \frac{1}{Cl}} : \sqrt{\frac{1}{H} + \frac{1}{Cl}} = 1.415 : 1.015 : 0.237.$$

Sperimentalmente si ha

1444	: 1179	: 234	
etilene	cis dicloroetilene	percloroetilene	= 1.41 : 1.15 : 0.227.

Resterebbero da spiegare ancora le seguenti frequenze:

cis derivato: $\nu =$ 709 (4); 560 (3); 406 (3); 177 (3)
trans derivato: $\nu =$ 770 (2); 711 (1); 351 (3).

per alcune delle quali si avrebbero delle differenze irriducibili tra lo spettro Raman delle due forme cis e trans dell' 1–2 dicloroetilene.

NOTA. — Quando questo lavoro era già stato consegnato per la presentazione ci è venuta a conoscenza una recentissima comunicazione fatta da Max Pestemer alla Accademia delle Scienze di Vienna nella quale l'A. riferisce su alcuni spettri Raman eseguiti sui 1-2-dicloroetilene cis e trans.

Con piacere vediamo che i suoi dati concordano sensibilmente con quelli del presente lavoro specie sui punti dal Pestemer particolarmente sottolineati.

(1) «Sitzungsber. der Akad. Wissensch. Wien». Abt. 2ª, 138 Bd, 1929, p. 421.
(2) «Ber», *63*, 251 (1930).

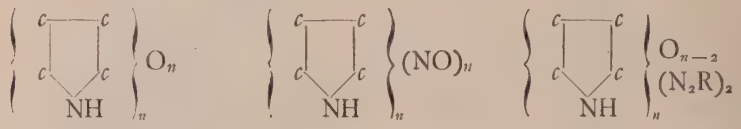
Chimica. — *Sopra i neri di azopirrolo* [1]. Nota III di A. Quilico e M. Freri, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Nelle precedenti comunicazioni sull'argomento [3], abbiamo diffusamente riferito sui prodotti neri che si originano in particolari condizioni da pirrolo e diazocomposti, in seguito ad un complicato processo di ossidazione e di copulazione, da ascriversi, con tutta probabilità, all'azione ossidante dei diazoidrati normali, della quale si hanno ormai numerosi esempi.

Nulla di certo, si può ancora affermare sulla struttura di queste sostanze, salvo che esse sono in tutto analoghe ai neri ottenuti dal pirrolo per azione di svariati ossidanti, e che in quelli, come in questi, debbono essere rimasti intatti degli scheletri pirrolici, come è dimostrato dalla formazione di derivati del pirrolo alla distillazione secca.

Tuttavia, sulla scorta dei risultati delle analisi, abbiamo in qualche caso tentato di stabilire il numero di nuclei pirrolici e fenilici che prendono parte alla condensazione, ed emesso una ipotesi sulle grandi linee della struttura.

L'illustre prof. Angeli, ha messo recentemente in evidenza [4], che questi *neri di azopirrolo*, sono in particolare assimilabili ai suoi *neri di nitrosopirrolo*, e che le tre classi di composti sono rappresentabili con gli schemi:



Nero di ossipirrolo Nero di nitrosopirrolo Nero di azopirrolo

che si corrispondono perfettamente.

Lo studio diretto di queste sostanze presenta, al par di quello degli altri neri, delle difficoltà che difficilmente potranno essere superate; la loro insolubilità in tutti i solventi, non permette di avere la sicurezza di essere di fronte ad un individuo chimico, o, come è più probabile, ad una miscela di neri da semplice ossidazione, con neri da copulazione ed ossidazione. A questo proposito, ricorderemo che il nero ottenuto da pirrolo e diazo

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 15 febbraio 1931.

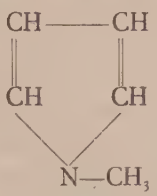
(3) « Rendic. Acc. Lincei », serie 6ª, vol. XI, 1° sem., pp. 296, 409, (1930); « Gazz. Chim. It. », p. 61 (1931).

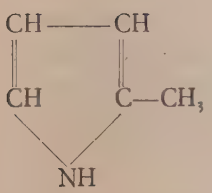
(4) « Rendic. Acc. Lincei », serie 6ª, vol. XI, 1° sem., p. 439 (1930).

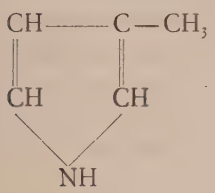
d'anilina, ha una composizione molto simile a quella dei neri da ossidazione con peridrolo [1].

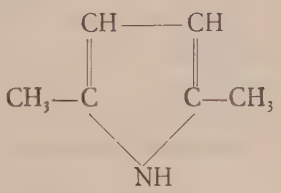
Queste sostanze si sono inoltre dimostrate refrattarie ai tentativi fatti per ottenerne dei derivati; per portare qualche luce sulla loro costituzione, abbiamo quindi ritenuto più proficuo esaminare il comportamento di alcuni derivati del pirrolo, poichè l'avere o meno da essi la formazione di nero per azione dei diazocomposti, ci avrebbe permesso di intravedere il modo di unirsi dei nuclei pirrolici.

Data la difficile accessibilità dei pirroli omologhi e non volendo ricorrere ai derivati carbossilici [2], abbiamo per ora dovuto limitare le nostre ricerche ai seguenti pirroli:









L'N–metilpirrolo fu preparato da pirrolpotassio e CH_3J secondo le norme di Kurt Hess [3], e dopo accurato frazionamento, bolliva a 114°–117°. L'α–metilpirrolo fu ottenuto con rese assai scarse dal precedente, secondo Amè Pictet [4], per trasposizione pirogenica, facendo passare i vapori in un lungo tubo riscaldato al rosso scuro. Il condensato, liberato dalle basi piridiche per lavaggio con HCl diluito, venne sottoposto ad una accurata rettificazione più volte ripetuta, fino ad arrivare, da 50 gr. di N-metilpirrolo, a qualche grammo di un prodotto p. e. 147°–148°, che abbiamo ritenuto sufficientemente puro; del resto il comportamento dei due isomeri α e β di fronte ai diazoidrati risultò talmente diverso, che fu possibile di servirsene come metodo di controllo della purezza del prodotto impiegato.

(1) «Rendic. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XI, 1° sem., p. 301 (1930).

(2) Come altre volte abbiamo potuto constatare, la presenza di gruppi carbossilici può ostacolare l'ossidazione per opera dei diazoidrati. Ad. es., mentre l'anetolo viene attaccato quantitativamente dal diazo di p-nitroanilina, l'acido p-metossicinnamico ed i suoi eteri, rimangono completamente inalterati.

(3) «Ber.», 47, p. 1412 (1914).

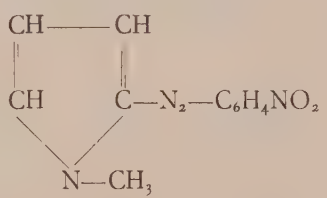
(4) «Ber.», 37, p. 2792 (1904).

Il β-metilpirrolo fu preparato dal magnesilpirrolo con ioduro di metile, secondo B. Oddo [1], ed anch'esso accuratamente frazionato: bolliva a 141°-143°. Infine l'α-α'-dimetilpirrolo, fu facilmente ottenuto da acetonilacetone ed ammoniaca alcoolica col metodo di Paal [2].

Le esperienze furono condotte al solito, aggiungendo la soluzione acetica del pirrolo, al solfato di diazonio cristallizzato, sciolto in acido acetico glaciale e mantenuto in continua agitazione e raffreddamento con ghiaccio. Dopo 12-18 ore in genere si diluiva con egual volume d'acqua e si filtravano i prodotti separati, che venivano purificati come sarà detto nella parte sperimentale.

In alcuni casi furono eseguite delle prove di confronto in soluzione acquosa acida per acido acetico. I risultati ai quali siamo giunti si possono così riassumere:

L'*N-metilpirrolo* reagisce facilmente con il diazo di p·nitroanilina e di o·p·dinitroanilina in soluzione acetica glaciale per dare prodotti neri, insolubili in tutti i solventi e negli alcali, analoghi a quelli ottenibili dal pirrolo stesso. Si distinguono tuttavia da questi per il colore meno cupo, tendente al bruno e per un maggior contenuto in ossigeno; anche per i neri da N-metilpirrolo si osserva che i prodotti ottenuti con diazo di o·p·dinitroanilina contengono il 3-4 % di carbonio in più di quelli ottenuti con p·nitroanilina. Le rese sono alquanto inferiori. Operando con diazo di p·nitroanilina, in soluzione acquosa acida per acido acetico, si ottiene invece il caratteristico *p·nitrobenzolazo N-metilpirrolo*:



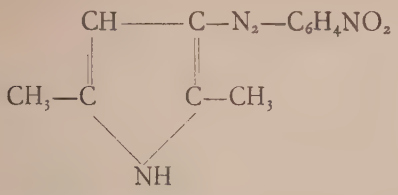
già preparato da R. Ciusa [3], che cristallizza dall'alcool in scagliette rossastre p. f. 124°-125°.

Il β-*metilpirrolo*, è, tra tutti gli omologhi sperimentati, quello che più si accosta al pirrolo, fornendo dei prodotti polverulenti, nerissimi, facilmente purificabili di composizione e proprietà molto simili a quelli dei neri ottenibili dal pirrolo stesso. Le rese sono buone ed il nero contiene solo tracce di prodotti secondari.

Esito completamente negativo, per quello che riguarda la formazione di neri, ebbero invece le prove eseguite con l'*α-α'-dimetilpirrolo*, il quale

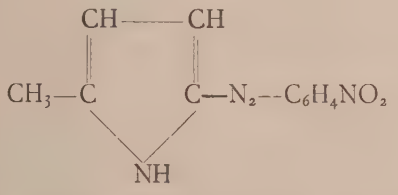
(1) B. Oddo e R. Mameli, «Gazz. Chim. It.», *43*, II, p. 504 (1913).
(2) «Ber.», *18*, p. 2254 (1885).
(3) «Gazz. Chim. It.», *51*, I, p. 51 (1920).

con diazo di p·nitroanilina in acido acetico glaciale, dà quantitativamente l'azoico:



che precipita immediatamente sotto forma di solfato, dal quale si può ottenere l'azopirrolo libero in bellissimi aghi rossi a riflessi verdi p. f. 208° dec.

Uno speciale comportamento presenta l'*α–metilpirrolo*; questo copula facilmente in soluzione acquosa–alcoolica, acida per acido acetico per dare un azoico, con tutta probabilità:



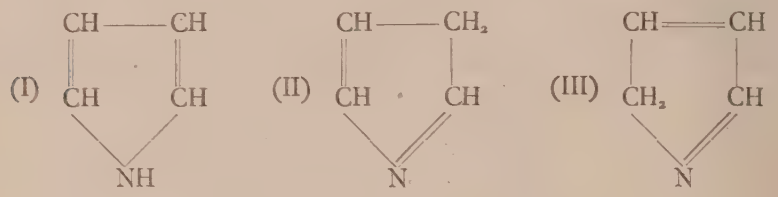
di assai difficile purificazione per la presenza di prodotti peciosi di resinificazione, fatto questo che spesso si verifica nella preparazione degli azopirroli omologhi. In ambiente acetico glaciale, si ottengono delle soluzioni scurissime, contenenti in sospensione dei prodotti solidi, inquinati da sostanze peciose. Il liquido acetico, separato per filtrazione, diluito con acqua contenente acetato di sodio, dà dei prodotti fioccosi, amorfi, facilmente solubili nei solventi organici e negli acidi minerali con colorazione rossa, che hanno un tenore in azoto (18.3 %) notevolmente inferiore a quello richiesto dall'azoico (24.3 %). La parte solida, liberata dai prodotti peciosi per ripetute estrazioni con alcool, si ottiene in frammenti bruni a riflessi bronzei. All'analisi dà valori che confrontati con quelli corrispondenti al nero di α–metilpirrolo mostrano un minore contenuto in carbonio ed un tenore in azoto notevolmente superiore. Il prodotto è inoltre *interamente insolubile negli alcali diluiti* con intensa colorazione bruna, a differenza dei veri neri di azopirrolo, che sono insolubili. Si deve anch'esso considerare un prodotto di ossidazione, come appare dal confronto della sua composizione con quella del corrispondente azoico di copulazione:

	Nero da β-metilpirrolo	Prodotto da α-metilpirrolo	Azoico
C %	52.9	47.6	57.7
H %	4.2	4.5	4.3
N %	17.6	20.0	24.3

Non è da escludere che esso possa rappresentare un prodotto di resinificazione dell'azopirrolo, ed a questo proposito ricordiamo che, secondo il prof. Angeli [1] anche le resine da diazocomposti sono da ritenere prodotti di ossidazione.

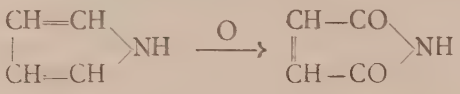
Dal comportamento dei pirroli omologhi finora esaminati, si possono trarre le seguenti conclusioni:

Il fatto che l'N-metilpirrolo dia dei neri, oltre a dimostrare che l'unione dei nuclei pirrolici non si fa attraverso l'azoto, rende probabile che delle tre formule tautomere che si possono attribuire al pirrolo:



sia la (I) quella con cui esso interviene nella formazione dei neri [2].

Il comportamento dell'α-α'–, del α– e del β-metilpirrolo, mette in evidenza l'importanza che hanno le posizioni α libere per la formazione dei neri, ciò che mostra che nell'ossidazione per opera dei diazoidrati, come in quella:



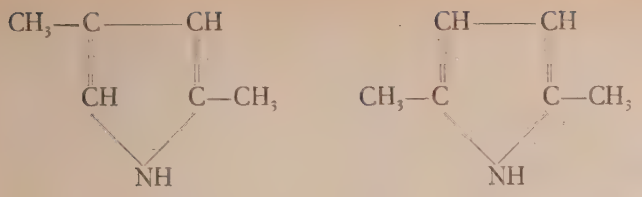
provocata dall'acido cromico, le posizioni α sono quelle attaccate.

L'α-α'-dimetilpirrolo, che ha ambedue le posizioni α occupate, non subisce l'ossidazione, l'α-metilpirrolo in cui una delle posizioni α è libera fornisce dei prodotti di ossidazione che sono certamente più semplici dei neri (solubilità negli alcali), ed infine il β-metilpirrolo che ha le due posizioni α libere, si comporta come il pirrolo. Questo porta nuovi argomenti allo schema di struttura da noi altra volta proposto, e si accorda bene con quanto ebbe ad osservare il prof. Angeli già molti anni or sono [3], riguardo alla formazione di neri con acido peracetico; dei due pirroli:

(1) « Rendic. Acc. Lincei », serie 6ª, XI, 1º sem., p. 439 (1930).

(2) Per quanto non si possa completamente escludere, è però poco probabile che nel processo si abbia l'eliminazione del metile unito all'azoto; questo accade ad es. nella copulazione delle ammine terziarie aromatiche, ma solo quando i radicali all'azoto sono molto pesanti.

(3) « Gazz. Chim. It. », *46*, II, p. 292 (1916).



il primo diede, per apertura dell'anello, l'amminoacido $CH_3—CH(NH_2)—CH_2—CH(CH_3)—COOH$ il secondo un prodotto rosso di resinificazione, ma nessuno dei due fornì tracce di nero.

Continueremo queste interessanti ricerche.

Mineralogia. — *La determinazione dell'angolo degli assi ottici di minerali biassici col piatto di Fedorow*[1]. Nota di A. Debenedetti, presentata[2] dal Corrisp. E. Repossi.

1. Molti metodi sono stati proposti, da quando fu introdotto il piatto di Fedorow, per determinare, col suo mezzo, il valore dell'angolo degli assi ottici di minerali in sezioni sottili [3]. Ciascuno dei metodi esistenti ha però un campo di applicabilità limitato, almeno in pratica, e quasi tutti richiedono numerose misure e manipolazioni. Per queste ragioni, non mi pare del tutto superfluo proporre, nelle pagine seguenti, un nuovo metodo per giungere allo stesso risultato con una precisione teoricamente possibile e praticamente raggiungibile (come dimostrano gli esempi che seguono) non inferiori a quelle dei metodi già noti, e con minor numero di operazioni.

2. Il metodo si basa sulle seguenti considerazioni.

Se pensiamo due triangoli sferici rettangoli con un cateto comune (fig. 1) possiamo determinare il valore di questo cateto conoscendo i valori degli altri cateti dei due triangoli e solo il rapporto dei seni delle due ipotenuse.

Siano come in figura:

$$V = \widehat{AOB} \quad ; \quad \theta_1 = \widehat{N_1OA} \quad ; \quad \theta_2 = \widehat{N_2OA} \quad ; \quad \varepsilon_1 = \widehat{N_1OB} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \widehat{N_2OB}$$

cerchiamo V conoscendo ε_1 , ε_2 e $K = \dfrac{\operatorname{sen}^2 \theta_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_2}$.

(1) Lavoro eseguito nel R. Ufficio Geologico.

(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Nelle opere del Nikitin (**1**), del Berek (**2**), (**3**), di Duparc e Reinhard (**4**), sono descritti i metodi noti fino al 1924. Dopo questa data, modificazioni ai metodi precedenti sono state proposte dal Woyno (**5**), dalla Kolaczkowska (**6**), dal Nieuwenkamp (**7**). La discussione dell'applicabilità e della precisione dei vari metodi si trova negli stessi lavori.

Dalla trigonometria sferica abbiamo

$$\cos V = \frac{\cos \theta_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \varepsilon_2} \qquad \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{\cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_2}.$$

Poniamo $M = \frac{\cos^2 \varepsilon_1}{\cos^2 \varepsilon_2} = \frac{\cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2}$.

Abbiamo:

$$\cos^2 \theta_1 = M \cos^2 \theta_2 \qquad \operatorname{sen}^2 \theta_1 = K \operatorname{sen}^2 \theta_2$$

$$(M - K) \cos^2 \theta_2 = 1 - K$$

$$\cos^2 V = \frac{1}{\cos^2 \varepsilon_2} \frac{1 - K}{M - K}$$

$$\cos V = \frac{1}{\cos \varepsilon_2} \sqrt{\frac{1 - K}{M - K}}. \tag{1}$$

3. Consideriamo ora l'ellissoide inversa di un minerale biassico. È facile vedere (fig. 1) che due raggi vettori contenuti nel piano $\gamma\beta$ (o in quello $\beta\alpha$),

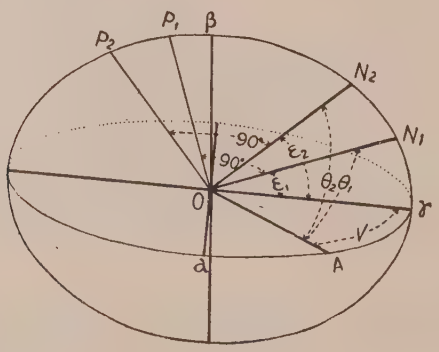


Fig. 1.

formano, colle direzioni degli assi ottici e coll'asse γ (o coll'asse α), angoli che determinano, su una sfera concentrica coll'ellissoide, due triangoli sferici nelle condizioni sopra considerate. I due raggi vettori ci rappresentano le normali a due sezioni perpendicolari ai piani $\gamma\beta$ o $\beta\alpha$, e gli angoli ε_1 e ε_2 sono i valori dell'inclinazione delle due sezioni rispetto al piano $\alpha\gamma$. Per la ricerca del valore V, secondo le formole sopra scritte, dobbiamo conoscere queste due inclinazioni e il rapporto $\frac{\operatorname{sen}^2 \theta_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_2}$, cioè il rapporto dei seni degli angoli formati colla direzione degli assi ottici dalla normale a ciascuna sezione.

4. È noto che, nei casi ordinari, il valore della birifrangenza di una sezione qualsiasi di un minerale biassico, sta al valore della birifrangenza

massima del minerale, molto prossimamente come il prodotto dei seni degli angoli formati dalla normale alla sezione colle direzioni degli assi ottici.

La dimostrazione della formola esatta

$$(2) \qquad \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\gamma_1^2} = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_1$$

(dove γ_1, α_1 sono gli indici di rifrazione massimo e minimo *della sezione*; γ, α gli indici di rifrazione massimo e minimo *del minerale*; θ, θ_1 gli angoli che la normale alla sezione fa colle direzioni degli assi ottici), si trova p. es. in Duparc e Pearce (**8**, pp. 218-221) o in Bouasse (**9**, pagine 190–192).

Sviluppando la formola (2), introducendovi cioè esplicitamente gli indici di rifrazione invece delle velocità di propagazione, e trascurando come fattore del primo membro un termine molto prossimo all'unità, si ricava

$$(3) \qquad \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma - \alpha} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_1 .$$

Se la sezione è normale al piano $\gamma\beta$ o al piano $\alpha\beta$, evidentemente gli angoli θ e θ_1 saranno uguali, e si potrà scrivere:

$$\frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma - \alpha} = \operatorname{sen}^2 \theta_1 .$$

Per un'altra orientazione della sezione, anch'essa in un piano normale al piano $\gamma\beta$ (o $\alpha\beta$), e di birifrangenza $\gamma_2 - \alpha$, si avrà:

$$\frac{\gamma_2 - \alpha}{\gamma - \alpha} = \operatorname{sen}^2 \theta_2$$

e quindi

$$(4) \qquad \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_2 - \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_2} .$$

Le posizioni di birifrangenza $\gamma_1 - \alpha$ e $\gamma_2 - \alpha$ si abbiano quando la sezione è inclinata sul piano $\alpha\gamma$ rispettivamente degli angoli $90° - \varepsilon_1$ e $90° - \varepsilon_2$, cioè le normali alla sezione in queste posizioni siano inclinate di ε_1 e ε_2 su γ (o α). Il rapporto $\frac{\operatorname{sen}^2 \theta_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_2}$ si potrà facilmente ottenere dal rapporto dei ritardi, misurabili con un compensatore.

Infatti, detti S, S_1, S_2, gli spessori (misurati nella direzione dell'asse del microscopio) della sezione nella posizione originaria e nelle posizioni di inclinazione ε_1 e ε_2; R_1' e R_2' i ritardi in queste due ultime posizioni,

φ_1 e φ_2 gli angoli formati dalle normali alla sezione nelle posizioni 1 e 2 con la normale alla posizione originale della preparazione, si avrà

$$S_1(\gamma_1 - \alpha) = \frac{S}{\cos\varphi_1}(\gamma_1 - \alpha) = R'_1$$

$$S_2(\gamma_2 - \alpha) = \frac{S}{\cos\varphi_2}(\gamma_2 - \alpha) = R'_2$$

$$\frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_2 - \alpha} = \frac{R'_1}{R'_2}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{\operatorname{sen}^2\theta_2}.$$

Noti ε_1 e ε_2, trovato il rapporto $\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{\operatorname{sen}^2\theta_2}$, abbiamo tutti gli elementi per il calcolo di V, che otterremo senz'altro, chiamando R_1 e R_2 i ritardi corretti e ponendo

$$K = \frac{R'_1}{R'_2}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad , \quad M = \frac{\cos^2\varepsilon_1}{\cos^2\varepsilon_2},$$

dalla formola (1) o dalla corrispondente facilmente ricavabile in funzione di ε_1.

Osserviamo che, dovendo essere $\cos V < 1$, si deduce dalla (1) che dovrà essere pure $M > 1 > K$, e cioè $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$; $R_1 < R_2$. Queste condizioni sono soddisfatte per il piano $\beta\gamma$ quando si misurino gli angoli ε (ed anche V) a partire dalla direzione γ; e per il piano $\alpha\beta$ quando gli angoli ε (e naturalmente anche V) siano misurati a partire dalla direzione α.

5. Abbiamo fino ad ora supposto che la sezione fosse orientata normalmente ad uno dei piani $\gamma\beta$, o, $\beta\alpha$. Quando, per l'orientazione degli elementi di simmetria del minerale rispetto alla sezione, nessuno dei due piani $\gamma\beta$ o $\beta\alpha$ fosse accessibile, si renderebbe necessario compiere le misure in posizioni normali al piano $\alpha\gamma$. Sono allora possibili tre casi, a seconda che gli angoli ε_1, ε_2 siano tutti e due o maggiori o minori di V, o siano l'uno maggiore, l'altro minore di V.

Se si ha (I) $V_\gamma > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, o (II) $V_\gamma < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ si deduce dalla fig. 2:

$$\theta_1 = \varepsilon_1 - V \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon_2 - V \quad , \quad \theta'_1 = \varepsilon_1 + V \quad , \quad \theta'_2 = \varepsilon_2 + V$$

$$K = \frac{\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_1}{\operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta'_2} = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 - V)\operatorname{sen}(\varepsilon_1 + V)}{\operatorname{sen}(\varepsilon_2 - V)\operatorname{sen}(\varepsilon_2 + V)}$$

da cui

$$(5) \qquad \cos V = \cos\varepsilon_2 \sqrt{\frac{M - K}{1 - K}}$$

dove M e K hanno il solito significato.

Quando fosse (III) $\varepsilon_2 < V < \varepsilon_2$, la formola diventerebbe:

$$(6) \qquad \cos V = \cos\varepsilon_2 \sqrt{\frac{M + K}{1 + K}}.$$

Dobbiamo notare che, convenendo sempre di prendere $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, il caso (I) si deve ricondurre al caso (II), misurando gli angoli ε e V a partire dalla direzione di α, (avendo così $V_\alpha < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$), perchè il valore ricavato applicando la formola sia minore dell'unità.

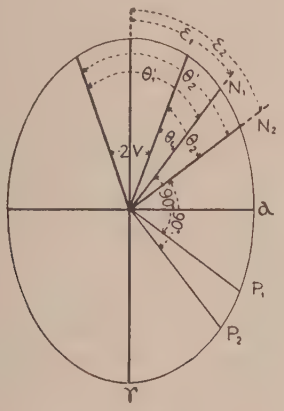


Fig. 2.

Il caso (III) non presenta interesse pratico, perchè è allora evidentemente più semplice misurare direttamente l'angolo V.

7. L'accostamento delle nostre formole a quelle note del Mallard ci permette di vedere che la precisione teorica raggiungibile col nostro procedimento non è inferiore a quella, comunemente accettata, delle formole del Mallard stesso. Questi ottenne

$$\cos V = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}}$$

trascurando nel secondo membro il fattore

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{\gamma + \beta}{\gamma + \alpha}}$$

mentre il termine da noi trascurato per giungere alla (4) è

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \sqrt{\frac{\alpha + \gamma_1}{\alpha + \gamma_2}}$$

dove essendo, per sua stessa natura, il rapporto $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ più prossimo all'unità di quello $\frac{\alpha}{\beta}$, anche il termine da noi trascurato ha valore più prossimo alla unità di quello trascurato dal Mallard, e, di conseguenza, la nostra formola ha precisione per lo meno dello stesso ordine di grandezza.

Lo stesso può dirsi riguardo agli altri metodi, del Nikitin, del Berek, ed in generale di tutti quelli che si possono riferire, per le basi della loro

validità, alle formole del Mallard. L'analisi, fatta dal Perrier (**10**), delle formole del Nikitin per la birifrangenza (analisi che vale anche per le formole del Mallard, delle quali quelle del Nikitin sono una generalizzazione), conferma poi ulteriormente la validità della nostra formola.

8. Il metodo si applica nel modo seguente.

Si determina la posizione dei tre piani principali di simmetria ottica, e si riporta, come al solito, in proiezione stereografica la posizione della sezione rispetto a questi piani. Letti sulla proiezione gli angoli (longitudine e latitudine) di cui dista il polo della sezione dalla traccia del più vicino piano principale di simmetria, ruotando dei corrispondenti angoli intorno agli assi A_1 e A_2 (notazione del Berek) del piatto, si porta la sezione in posizione normale al piano di simmetria considerato. Sia la sezione in posizione 1, la sua normale distante angolarmente di ε_1 dall'asse γ (o α). Si misura il ritardo R'_1 in questa posizione e lo si riduce tenendo conto della distanza angolare tra la normale alla posizione 1 e la normale alla posizione iniziale. Si può fare questa riduzione o analiticamente come abbiamo detto, o graficamente secondo l'elegante soluzione del Berek (**2**, p. 115). Sia R_1 il valore corretto. Ruotando intorno all'asse A_4 di un angolo φ, si porta la normale alla sezione nella posizione 2 per la quale la normale dista angolarmente da γ (o da α) di $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varphi$. Si ripete la misura e la riduzione del ritardo, ottenendo R_2.

Si formano i rapporti $\frac{R_1}{R_2} = K$; $\frac{\cos^2 \varepsilon_1}{\cos^2 \varepsilon_2} = M$, ricordando che deve essere $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. In questo modo il rapporto $\frac{1 - K}{M - K}$ sarà < 1 per i piani $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$, e > 1 per il piano $\alpha\gamma$. A seconda dei due casi, la (1) o la (6) ci darà il valore cercato di cos V.

9. La tabella contiene un certo numero di determinazioni per servire di esempio e di controllo della validità del metodo. Per i numeri da 1 a 4 ho usato dati ricavati dalle pubblicazioni del Berek (**2**) e del Perrier (**10**), in modo da poter confrontare i risultati ottenuti col mio calcolo con quelli dei due autori. Le misure 5 e 6 sono state da me eseguite su un sezione orientata gentilmente prestatami dal prof. E. Repossi che ringrazio vivamente.

(1) W. W. Nikitin, *La méthode universelle de Fedoroff*, Traduz. franc. di Duparc e de Dervies. Atar, Genève e Béranger, Paris-Liége, 1914.

(2) M. Berek, *Mikroskopische Mineralbestimmung*, ecc. Bornträger, Berlin, 1924.

(3) Id., « N. Jahrb. f. Min., ecc. », B. B. *48*, pp. 34-62.

(4) L. Duparc e M. Reinhard, « Mem. Soc. phys. hist. nat. », *40*, fasc. I, Genève, 1924.

(5) T. J. Woyno, « Zeitschr. f. Krist. », *63*, pp. 284-290, 1926.

(6) M. Kolaczkowska, « Zeitschr. f. Krist. », *72*, pp. 70-77, 1929.

(7) W. Nieuwenkamp, « Verslagen Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam », *36*, 1927; riferito in « N. Jahrb. f. Min., ecc. », 1928, I, p. 7.

(8) L. Duparc e F. Pearce, *Traité de technique mineralogique, ecc.* Veit e C., Leipzig, 1907.

(9) H. Bouasse, *Optique cristalline, double réfraction, ecc.* Delagrave, Paris, 1925.

(10) C. Perrier, « Boll. R. Ufficio Geologico », vol. LII, n. 1, Roma, 1927.

Tabella

	Inclinazione della sezione		Inclinazione della normale		M	R_1	R_2	K	1 — K	M — K	log. cos. V	2V calcolato	2V controllo
	$90° - \varepsilon_1$	$90° - \varepsilon_2$	ε_1	ε_2									
1	45°	30°	45°	60°	2 —	122.5	144	0.851	0.149	1.149	9.858	87°44′	87°
2	45	30	45	60	2 —	400 —	825	0.484	0.516	1.516	9.932	62°30′	65°
3	40	20	50	70	3.55	260 —	282	0.922	0.078	2.628	9.702	60°30′	61°
4	50	40	40	50	1.42	169 —	204	0.828	0.172	0.591	9.329	62°	61°
5	80	50	10	40	1.656	428 —	629	0.679	0.321	0.977	9.874	83°	84°54′
6	80	70	10	20	1.096	428 —	473	0.903	0.097	0.193	9.877	82°20′	83°6′

1. Individuo 2 di un plagioclasio geminato in una sienite augitica di Gröba. Piano $\beta\gamma$ (**2**, p. 121).
2. Cosiddetta omfacite in una eclogite di Silberbach. Piano $\alpha\gamma$ (**2**, p. 117).

   Per questi due esempi i valori di controllo dell'ultima colonna sono ricavati dal Berek (loc. cit. p. 131).
3. Diopside della Zillertal. Piano $\beta\alpha$ (log cos V corrisponde a V_α). (**10**, p. 27).
4. Id. Id. Piano $\beta\gamma$ (**10**, p. 31).

   Il valore di controllo è calcolato colla formola di Mallard, colle birifrangenze date dal Perrier.
5. Cianite. Piano $\beta\alpha$.
6. Id. Id. Id.

   Ho calcolato il valore di controllo, in due posizioni differenti, colla formola del Nikitin (loc. cit. II vol., p. 388 sg.).

Biologia. — *Il valore biologico dei prodotti del suolo letamato o concimato.* Nota di G. Tallarico, presentata [1] dal Socio F. Bottazzi.

In una serie di ricerche sulla predeterminazione funzionale del grano, riguardanti il trattamento concimale della pianta madre ed il conseguente sviluppo, nonchè la capacità produttiva dei semi così ottenuti, avevo notato un differente comportamento dei semi provenienti da piante madri concimate con concimi minerali in confronto dei semi provenienti invece da piante madri concimate con stallatico. Mentre i primi, in genere, davano un prodotto modesto, i secondi, coltivati nelle medesime condizioni di suolo di clima e di pratiche culturali, davano uno sviluppo più rigoglioso e una più alta produzione.

D'altra parte le recenti ricerche fatte da Botmley, Liwington, Mockridge, Robin, Rosenheim, Wilkins e Clark sulla esistenza e l'importanza delle così dette vitamine vegetali o auximoni, nonchè sulla possibilità della trasmissione di questi fattori dello sviluppo dal terreno di cultura nei tessuti vegetativi e negli organi riproduttivi della pianta, e quindi da queste agli animali che li utilizzano (Mc Carreson, Nath Suryanarayana), mi hanno indotto a saggiare su una vasta popolazione di tacchini, col metodo delle ricerche in massa, le eventuali variazioni della resistenza organica, indotte in questi animali rispettivamente da mangimi provenienti da culture letamate o da culture concimate.

Il tacchino è molto adatto per questa specie di ricerche, perchè è animale omnivoro, a rapido sviluppo, e sopratutto perchè all'epoca della pubertà presenta una caratteristica e delicata crisi di crescenza: la così detta « crisi del rosso », caratterizzata dalla comparsa nella peluria della testa e nelle filoplume del collo di speciali escrescenze rossiccie. Durante questo periodo critico l'animale cade in un profondo stato di debolezza, e facilmente diventa vittima di comuni infezioni intestinali e respiratorie, che falcidiano anche i migliori allevamenti. Tale malattia naturale, che risparmia eccezionalmente i più forti, sopraggiunge più o meno precocemente, dura più o meno a lungo, ha esito letale o di guarigione a seconda della maggiore o minore resistenza dell'individuo colpito. Per valutare questa resistenza sono stati quindi presi in considerazione, in ciascun gruppo sperimentato, il numero dei colpiti, l'epoca dell'avvento della crisi, la sua durata in giorni, e l'esito; non solo, ma, poichè nel nostro allevamento sperimen-

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

tale si presentarono casi di individui che a crisi sorpassata rimasero minuscoli di taglia per tutta la vita, a causa di un vero e proprio arresto di crescenza, ed altri casi di individui che rimasero debilitati al punto da dover essere eliminati dal branco perchè non riuscivano a seguirlo nel foraggiare; anche di questo si è tenuto conto, raggruppandoli in una speciale categoria: quella degli invalidi.

La preparazione del materiale alimentare fu fatta in tre appezzamenti di terreno: il primo concimato ogni anno, e per due anni, con concimi minerali, nella proporzione di 2 Q. per ettaro di solfonitrato ammonico, somministrato a più riprese durante l'annata agraria; di 1 Q. di potassa e di 4 Q. di perfosfato, somministrato presemina. Il secondo invece fu concimato ogni anno, e per due anni, con stallatico fermentato nella proporzione di 500 Q. per ettaro. Il terzo appezzamento fu utilizzato allo stato naturale, cioè senza concimazione minerale, nè letamazione.

In ciascuno di questi tre appezzamenti furono coltivati, in parcelle separate, i mangimi più interessanti per l'allevamento dei tacchini, avendo l'accortezza di adoperare come sementa, nella seconda annata di cultura, il prodotto ottenuto dalla stessa parcella nella prima annata. Si coltivarono così:

a) una varietà di grano locale (saragolla) da cui si ottennero i semi che venivano somministrati, agli animali, integri o pestati, e da cui si ricavava anche la crusca necessaria per la confezione dei pastoni;

b) una foraggera leguminosa e meridionale (la sulla) « Edisarum coronarum » le cui foglie trinciate forniscono un ottimo mangime verde, ricco e ben bilanciato;

c) una pianta indispensabile per l'allevamento di questi volatili e che funziona, pare, da tonico e da stimolante: l'urtica (Urtica dioica).

Si ottennero così sei tipi di prodotti alimentari:

Tipo 1 = Semi di grano proveniente da piante madri concimate con stallatico fermentato (semi letamati);

Tipo 2 = Semi di grano provenienti da piante madri concimate con concimi chimici (semi concimati);

Tipo 3 = Semi di grano provenienti da piante madri nè concimate nè letamate (semi naturali);

Tipo 4 = Piante verdi (foglie di sulla, di urtica) provenienti da parcelle concimate con stallatico (foraggio letamato);

Tipo 5 = Piante verdi (foglie di sulla e di urtica) provenienti da parcelle coltivate con concimi chimici (foraggio concimato);

Tipo 6 = Piante verdi (foglie di sulla e di urtica) provenienti da parcelle nè concimate nè letamate (foraggio naturale).

Questi prodotti alimentari, integrati con l'aggiunta di tuorlo d'uovo e di farina di carne, servirono per formare i seguenti quattro tipi di razione alimentare, che veniva somministrata durante i primi due mesi di vita ai

quattro gruppi di animali in esperimento, sotto forma di pastone, risultante costituito dalle medesime proporzioni quantitative nei suoi componenti:

Tipo A) Farina di carne + tuorlo d'uovo + crusca ricavata dai semi letamati [1] + semi letamati + urtica e foglie di sulla trinciata provenienti entrambe dalle parcelle nè letamate nè concimate (razione a semi letamati);

Tipo B) Farina di carne + tuorlo d'uova + crusca ricavata dai semi concimati + semi concimati + urtica e foglie di sulla non trattate (razione a semi concimati);

Tipo C) Farina di carne + tuorlo d'uova + crusca ricavata dai semi non trattati, + semi non trattati + foglie di urtica e foglie di sulla trinciata provenienti ambedue dalle parcelle letamate (razione verde letamata);

Tipo D) Farina di carne + tuorlo d'uova + crusca ricavata dai semi non trattati + semi non trattati + foglie di urtica e foglie di sulla trinciate, provenienti dalle parcelle concimate (razione verde concimata).

Queste razioni alimentari, differenti *qualitativamente* e *non quantitativamente*, furono saggiate in ciascuna serie di ricerche su quattro gruppi omogenei di tacchini, mantenuti durante tutta la durata dell'esperimento, cioè dalla schiusa fino a due mesi, in speciali parchi di allevamento, espressamente costruiti e muniti di *paddocks* scoperti, di recinti coperti, di appositi refettori, di una infermeria e di capaci stallini da ricovero dove le madri naturali venivano tenute in stato di captività, indispensabile per la custodia e la protezione notturna della figliolanza.

L'esperimentazione fu ripetuta tre volte con tre serie consecutive di prove: in ciascuna serie venivano saggiati quattro gruppi di individui numericamente uguali e qualitativamente comparabili, perchè appartenenti tutti alla medesima schiusa.

Per la prima serie si utilizzò il materiale di 21 chioccie messe a covare contemporaneamente alla fine di marzo e che diedero una schiusa complessiva di 354 pulcini, che costituirono quattro gruppi di 88 individui ciascuno; per la seconda si utilizzo il materiale di 15 chioccie messe a covare contemporaneamente verso la metà di aprile e che diedero una schiusa di 204 pulcini, formanti quattro gruppi sperimentali di 51 individui ciascuno; per la terza serie si utilizzò invece il materiale di 12 chioccie messe a covare tardivamente e che diedero una schiusa di 160 pulcini coi quali si formarono quattro gruppi di 40 individui ciascuno. Sicchè l'esperimentazione fu eseguita, complessivamente e nelle tre serie di saggi, su un totale di 718 individui.

Allo scopo di determinare il valore di resistenza organica, furono, come dissi, presi in considerazione e raccolti i seguenti dati: il numero degli in-

(1) I semi tanto concimati che letamati o naturali venivano somministrati agli animali sotto forma di grano pestato nel primo mese e di seme integro nel 2° mese, epoca in cui i tacchinotti cominciano ad utilizzare le granaglie.

dividui colpiti, e per ciascuno individuo l'epoca dell'avvento della crisi, la durata della malattia ed il suo esito o di morte, o di guarigione o di invalidità. Da questi dati si è ricavata poi la media percentuale per ciascun gruppo e per ciascuna serie, tenendo conto delle inevitabili fallanze accidentali d'allevamento, dovute alle morti per freddo, per trauma, e per intervento di uccelli di rapina.

Riporto in unico specchietto riassuntivo la media delle medie percentuali ottenute in ciascun gruppo nelle tre serie di ricerche.

RESISTENZA ORGANICA DEI TACCHINOTTI.

Alimentati con	N. dei colpiti dalla crisi	Epoca dello avvento della crisi	Durata della malattia	Esito di		
				Morte	Guarigione	Invalidità
A. Semi letamati	89 %	43 giorni	7 giorni	21 %	79 %	0 %
B. » concimati	94 %	47 »	11 »	34 %	64 %	2 %
C. Foraggio letamato	82 %	39 »	6 »	18 %	82 %	0 %
D. » concimato	96 %	46 »	10 »	39 %	60 %	1 %

Dal che si ricava, che i tacchini, durante i primi due mesi di vita, alimentati con semi e con foraggi provenienti da piante coltivate in terreno letamato, quando sono colpiti dalla « crisi del rosso », presentano un minor numero di colpiti, un più precoce avvento della malattia, una minore durata di essa, e un minor numero di esiti letali, in confronto coi rispettivi gruppi di tacchini alimentati nelle medesime condizioni di vita e di esistenza con semi o con foraggi provenienti da piante concimate con fertilizzanti minerali.

Si ricava ancora, che una più benefica influenza esercitano sui vari fenomeni presi in considerazione, e che sembrano essere fra loro in correlazione, i tessuti vegetali della pianta letamata, in confronto degli organi riproduttori della stessa pianta pure letamata.

Ciò significa che i semi, e più ancora i tessuti delle piante letamate utilizzate come mangime da questi animali, sono capaci di elevarne la resistenza organica più che i rispettivi semi e tessuti vegetali concimati; hanno cioè, i primi, un più alto valore biologico di fronte ai secondi. E questa conclusione è confortata anche dalla mancanza di casi di invalidità e di arresti di sviluppo nei gruppi di animali alimentati con prodotti letamati.

A che cosa è dovuta questa superiorità dei prodotti del suolo letamato, in confronto dei prodotti del suolo concimato? Forse ad una differente composizione qualitativa e quantitativa, specie per ciò che riguarda i sali inor-

ganici e le sostanze proteiche, e questo lo dirà una accurata analisi all'uopo condotta da competenti, oppure ad una maggiore dotazione di fattori complementari della nutrizione, dello sviluppo che la pianta riceverebbe nei suoi tessuti (infatti questi si sono mostrati più attivi, nelle nostre ricerche) e nei suoi semi; fattori dello sviluppo, che dal letame fermentato passerebbero, probabilmente, nel corpo della pianta, direttamente o indirettamente, attraverso la attiva preparazione biochimica della microflora del suolo; fattori che mancherebbero nei concimi chimici, o che coi soli concimi chimici i microrganismi del suolo sarebbero incapaci di formare a beneficio della pianta.

Poichè questi risultati concernenti la varia resistenza organica collimano con quelli di altri autori citati, che hanno messo in rilievo la benefica influenza che esercitano sullo sviluppo e sull'accrescimento dei topi e delle cavie gli alimenti ottenuti in terreno di cultura fertilizzato con sostanze organiche; e poichè nelle nostre ricerche si sono avuti anche casi di inabilità e di arresto definitivo di crescenza, solo nei gruppi di animali alimentati con prodotti del suolo non letamato (sebbene questi casi siano poco numerosi ed abbiano quindi valore indiziario più che probativo), noi siamo indotti ad accettare l'ipotesi auxomonica.

In ogni caso, il fatto è di grande importanza, specie se potrà essere confermato da ulteriori ricerche su materiale umano; e intanto, mentre aggiunge conferma biologica al valore agrario della concimazione organica del suolo, offre un'utile indicazione per lo allevamento zootecnico.

Patologia. — *Su alcune frazioni lipoidali dell'adenocarcinoma del topo* [1]. Nota di ADA BOLAFFI, presentata [2] dal Corrisp. P. RONDONI.

Proseguendo ed allargando precedenti ricerche, si è preso in particolare considerazione l'estratto acetonico (acetone acquoso d. 0.850) dal tumore (adenocarcinoma del topo ceppo Ehrlich) e comparativamente dall'organismo intero di topi normali e di topi affetti da tumore. La estrazione fu ripetuta a temperatura di termostato parecchie volte dal materiale triturato e disidratato per mezzo dello stesso solvente; gli estratti, mescolati, filtrati dopo raffreddamento ed evaporati nel vuoto a bassa temperatura; la sostanza estrattiva totale pesata, poi trattata con alcool assoluto, in modo da avere un residuo (saponi) ed un soluto. Il soluto alcoolico si tratta con 4-5 volumi di etere: si ha un residuo (sostanza I: base) ed un soluto alcool-etere, da cui si elimina la colesterina mediante digitonina, si allontana con etere l'eccesso di digitonina, per trattare poi con acetone *anidro* d. 0.800; si ha

(1) Il lavoro fu eseguito nella Sezione biologica dell'Istituto Vittorio Emanuele III per lo studio e la cura del cancro, a Milano.

(2) Nella seduta del 15 febbraio 1931.

un residuo (sostanza II: fosfatide) ed un soluto, che è particolarmente indagato nel suo contenuto in acidi grassi, P, S; e che offre considerevoli diversità a seconda del tessuto.

Si sono messi in evidenza i seguenti fatti:

1° *La sostanza estrattiva totale* acetonica è ridotta nel topo canceroso è più ancora nel tessuto canceroso in confronto al topo normale: ciò in rapporto sopratutto alla notevole diminuzione dei grassi neutri nell'organismo affetto. In questo sono però relativamente aumentati i *saponi*; e pare che nel tessuto neoplastico siano sopratutto accentuati i saponi di *potassio*, conforme alle note osservazioni sull'arricchimento in questo metallo proprio dei tessuti a rapida crescita.

2° Una *base* (sostanza I), legata ai lipidi dell'estratto acetonico solubili in alcool assoluto ma precipitati dall'etere, abbonda nell'organismo affetto e nel tumore, essendo in questi 2–3 volte più abbondante che nell'organismo sano; è impura, dà un sale cristallino con $HgCl_2$ e precipita pure con acido fosfowolframico.

3° Un *fosfatide* (sostanza II), solubile in alcool–etere, insolubile in acetone puro anidro, contenenente 1 % di P, con numero di jodio 58.7, non meglio identificabile per la scarsa raccolta, è più abbondante (quasi del doppio) nell'organismo sano che nel neoplastico e nel tumore stesso: comportamento dunque press'a poco inverso a quello della base suddetta.

4° Un *solfofosfolipide* (sostanza III), solubile in acetone puro anidro, contenente una base (forse colina o colamina), un radicale acido fortemente insaturo (probabilmente, per il numero di jodio ad altri caratteri, l'acido linolenico) e forse accanto a questo l'acido lignocerinico, solfo approssimativamente nella proporzione di 1.5 % e fosforo nella proporzione di 1.06 %, fu trovato molto più concentrato nel tumore che nell'organismo portatore e qui più che nel normale, ove esiste solo in tracce. Questo corpo, che dalle ricerche fatte sulle frazioni ove è più concentrato, parrebbe essere una individualità chimica assai ben definita, ha analogie di solubilità (tranne che in riguardo all'acetone) e approssimazione nel contenuto in S e P colla jecorina; ma ne differisce per alcuni altri caratteri (assenza di gruppo riducente, minor grado di saturazione).

Queste ricerche possono portare una qualche luce su alcuni moderni problemi di oncologia sperimentale: sia notato intanto che questa analisi della frazione aceton–solubile dei lipidi neoplastici e non neoplastici mette in evidenza una certa serie di caratteristiche differenziali fra lipidi dell'organismo normale e lipidi del canceroso e dello stesso tessuto canceroso. Si osserva di regola che la massima divergenza di composizione si ha fra un'organismo totale sano e tessuto proprio del neoplasma; mentre la composizione dell'organismo portatore resta in certa guisa intermedia (così per la sostanza I, II e per il solfofosfolipide o sostanza III). Ciò accenna ad un influenzamento del metabolismo lipodeo del tumore sull'organismo o vice-

versa: io penserei per esempio al fenomeno delle *metastasi biochimiche* cui accennano Hirszfeld e collaboratori [1], ossia a reperti di strutture lipoidali simili a quelle del tessuto neoplastico, sierologicamente dimostrabili in organi di cancerosi senza metastasi visibili. Bisogna tener presente che il paragone fra topi integrali normali e cancerosi è del tutto giustificato; mentre il paragone fra un tessuto molle largamente necrosato come quello del tumore e un intero organismo va fatto con molta prudenza. Ad ogni modo le cifre ottenute parlano per certe regolarità, che non possono essere accidentali. Le succitate ricerche di Hirszfeld e collaboratori, quelle di Witebsky [2] e di Lehmann-Facius [3] parlano per una specificità sierologica della cellula del tumore, riferita sopratutto a componenti lipoidei: si potrebbe trattare di presenza di un lipoide specifico, legato alla degenerazione maligna delle cellule, o di una miscela di aggregazione di lipoidi individualmente non specifici ma offrenti una certa specificità di rapporti quantitativi. Le mie ricerche chimiche, mentre contribuiscono a mettere in luce vere speciali caratteristiche della composizione lipidica del tumore, suffragherebbero piuttosto il concetto di una *concentrazione* nel tumore di certe frazioni lipoidali in confronto di altre; e viceversa la spogliazione dell'organismo in certi costituenti (fosfatidi), come già accennavano mie osservazioni precedenti [4]: dunque piuttosto una abnorme repartizione lipoidale ed alterazioni nei rapporti quantitativi delle varie frazioni, che una specificità assoluta, in senso strettamente chimico. Certo è molto notevole l'abbondanza di un solfofosfatide nel tumore; e sarebbe facile abbandonarsi a considerazioni ipotetiche sul suo significato biologico. Infine voglio solo osservare come queste ricerche lumeggino anche la concezione, dal Rondoni già sostenuta nel suo primo lavoro [5], sull'azione della immunizzazione antilipoidea sopra alle proliferazioni patologiche: l'alterata miscela e composizione e stato fisico di lipoidi (lipoidolisi) nel tumore ha importanza per la crescita di questo, la quale può essere modificata con agenti ingrananti nel metabolismo lipoidale. Si può ricordare come proprio i fosfatidi (lecitina), certi lipoidi aceton-solubili [6] e la colesterina (Borst, Roffo, Rondoni) influenzino la crescita dei tumori, i primi riducendola, l'ultima (che nel tumore ho trovato particolarmente abbondante [7]) accentuandola; dunque proprio alcune di quelle frazioni a carico delle quali domina la modificazione distributiva da me messa in evidenza in questa Nota e in lavori precedenti.

(1) « Zeitschr. f. Immunitätsf. », vol. *64*, p. 61, 1929; vol. *67*, p. 286, 1930; « Klin. Wochenschr. », 1929, n. 34.

(2) « Zeitschr. f. Immunitätsf. », vol. *62*, p. 35, 1929; « Kliniche Woch. », 1930, n. 2.

(3) « Zeitschr. f. Immunitätsf. », vol. *48*, p. 397, 1926; vol. *56*, p. 464, 1928; vol. *67*, p. 373, 1930).

(4) *Tumori*, Anno XV, fisc. I, 1929.

(5) « Zeitschr. f. Immunitätsf. », vol. *49*, n. 1, 1926.

(6) Rondoni, « Zeitschr. f. Krebsforsch. », vol. *32*, n. 4, 1930.

(7) « Zeitschr. f. Krebsforsch. », vol. *30*, fasc. 2, 1929.

Commemorazione del Socio Straniero P. Giovanni Hagen

letta dal Socio G. Armellini nella seduta del 1° febbraio 1931.

Tre anni or sono, un gruppo di colleghi e di amici – tra i quali alcuni di noi – si riuniva nella Casina Pio IV, nei Giardini Vaticani, per festeggiare l'ottantesimo anniversario del P. Giovanni Hagen. Ed il nostro Socio Straniero, al quale giunsero in quel giorno telegrammi di augurio e di ammirazione da gran parte delle specole del mondo, appariva vegeto e sano e sembrava conservare ancora indubbie traccie di quella elasticità che, da giovinetto, lo aveva spinto più volte ad audaci – e spesso pericolose – escursioni alpinistiche sulle montagne del Vorarlberg. Tutti presagimmo ed augurammo con piacere ancora lunghi anni di vita all'illustre festeggiato; ma purtroppo questi voti dovevano restare inesauditi, ed oggi, a poca distanza, ci incombe il doloroso compito di ricordare la figura del consocio e dell'amico scomparso.

La vita privata del P. Hagen è presto detta. Nato il 6 marzo 1847 a Bregenz, sulla riva orientale del bel lago di Costanza, passa i primi anni della gioventù tra i libri e le audacie sportive, sugli acuti picchi e le pittoresche gole del Vorarlberg.

Entrato nella Compagnia di Gesù, frequenta i corsi superiori di matematica e di fisica, prima all'Accademia di Münster e poi all'Università di Bonn, ed ha tra gli altri maestri, il matematico Lipschitz, il fisico matematico Clausius e l'astronomo Heis.

Conseguito il dottorato, torna a Feldkirch nel Vorarlberg, dove resta alcuni anni, insegnando matematica nelle classi superiori dell'Istituto dei PP. Gesuiti. Nel 1888 viene nominato direttore dell'Osservatorio Astronomico dei Gesuiti di Georgetown, a Washington, ed infine, nel 1906 – su proposta di S. E. il Cardinale Pietro Maffi – Pio X lo chiama a Roma, a dirigere la Specola Vaticana. E lì rimane, astronomo attivissimo, per 24 anni, fino a quando un attacco di nefrite lo spegne il 5 settembre 1930, nella clinica Quisisana, a Roma.

Ma se la vita – nella sua semplice austerità – può tratteggiarsi in poche parole, non è altrettanto facile dare in breve un'idea dell'opera scientifica dell'Hagen.

Come molti astronomi valorosi, il P. Hagen inizia la sua carriera con la matematica pura: dapprima con l'insegnamento, poi con la pubblicazione della vasta *Synopsis der höheren Mathematik*, opera dotta e ricca di preziose notizie, benchè forse in alcuni punti di difficile lettura.

Ed il gusto per la matematica non lo abbandona nemmeno nella tarda età. Nel giugno passato, già infermo nel convento di Galloro all'Ariccia, correggeva le bozze del IV volume della sua *Synopsis*; e l'ultima Nota inserita nei nostri « Rendiconti » e precisamente nel fascicolo del 6 aprile 1930, è un lavoro di carattere matematico sul pendolo di Foucault.

In questo lavoro egli osserva acutamente che nell'esperienza di Foucault non solo si ha una deviazione del pendolo, ma che, fotografando le oscillazioni sopra uno schermo orizzontale, si trova che il pendolo descrive in realtà ellissi allungatissime, e che percorre sempre la periferia di queste ellissi nel senso in cui ruota la Terra e cioè in senso destrorso o sinistrorso secondo che l'esperimento ha luogo nell'emisfero australe o in quello boreale.

Ed Hagen spiega ingegnosamente questo fatto osservando che l'uncino laterale – a cui si lega per mezzo di un filo di ritenuta la lente del pendolo, per mantenerla discosta dalla verticale prima dell'esperimento – non è fisso, ma partecipa alla rotazione della Terra. Quando dunque si brucia questo filo di ritenuta, la lente del pendolo non parte dalla quiete, e quindi le oscillazioni non possono risultare piane.

Così, secondo Hagen, il pendolo di Foucault racchiude non una *semplice*, ma una *duplice prova* della rotazione terrestre.

E a questo campo di ricerche si collegano naturalmente molti altri studi di Hagen sopra le prove meccaniche della rotazione della Terra. Notiamo in particolare l'esame della deviazione dei gravi, che egli fece per mezzo della macchina di Atwood, ciò che gli permise di indebolire artificialmente il valore della gravità e di ottenere quindi una deviazione molto maggiore del peso cadente. Notiamo pure la costruzione dell'*isotomeografo*, ingegnoso apparecchio che può schematicamente ridursi ad un'asta sospesa ad un filo applicato nel punto di mezzo, mentre ai due estremi dell'asta vi sono due pesi che possono avvicinarsi simmetricamente al punto centrale. Facendo allora muovere questi due pesi, varia il momento di inerzia del sistema e quindi l'asta, come può dimostrarsi con considerazioni di meccanica razionale, devia in virtù della rotazione della Terra.

Ma, passato dalla Matematica all'Astronomia, la parte principale dell'attività di Hagen si esplicò in questo ultimo campo con una serie di lavori che sinteticamente potrebbero dividersi in tre parti, e cioè:

1ª Il catalogo fotografico;

2ª Le ricerche sopra le stelle variabili;

3ª Le ricerche sopra le nebule, e in particolare la scoperta della « Via Nubila ».

Diamo un breve cenno di ciascuna di queste parti.

*
* *

Come è noto, il Congresso Astronomico tenutosi a Parigi nel 1887, propose l'esecuzione di un catalogo fotografico, contenente tutte le stelle del cielo, fino alla undecima grandezza. Ed a tale scopo il cielo venne diviso tra 18 osservatori astronomici, ed in particolare alla Specola Vaticana fu assegnata la zona celeste compresa tra i paralleli 55 e 64.

Quando Hagen giunse al Vaticano la prima parte del lavoro – e cioè quella fotografica – era già stata eseguita dal compianto P. Giuseppe Lais, alla cui memoria venne più tardi assegnata da Benedetto XV la medaglia d'oro, giusto riconoscimento del suo infaticabile zelo.

Restava però la parte più gravosa del lavoro: cioè la misurazione delle lastre da farsi col *macromicrometro*, il calcolo di quegli errori che noi chiamiamo col nome di « costanti di puntamento, di direzione e di scala » e quindi la correzione di tutte le coordinate misurate per mezzo di queste costanti. Lavoro veramente improbo, quando si pensi che le lastre fotografiche del P. Lais comprendevano più di quattrocentomila stelle, per cui occorreva misurare quasi un milione di coordinate!

Pure, nonostante gli scarsi mezzi di cui disponeva, Hagen organizzò assai bene questo immane compito valendosi, per le misure, dell'opera di alcune suore e, per i calcoli, dell'aiuto del prof. Turner di Oxford; anzi, come egli mi diceva, seppe tanto abilmente ridurre al minimo o eliminare ogni perdita di tempo ed ogni lavoro inutile, che la Specola Vaticana fu tra le prime a terminare il suo compito. E la pubblicazione integrale dei dieci volumi del Catalogo Astrografico, onora oggi la specola da cui uscì e i due uomini che lo iniziarono e lo portarono a compimento: Hagen e Lais.

*
* *

Ma il campo dove maggiormente si sviluppò l'attività scientifica del compianto consocio fu lo studio delle stelle variabili: studio di cui egli ci lascia due opere veramente monumentali e cioè *l'Atlas Stellarum Variabilium* e il grande Trattato *Die Veränderlichen Sterne*.

L'*Atlas*, cominciato nel 1893 a Georgetown, fu terminato nel 1927 a Roma, e cioè dopo 34 anni di lavoro; comprende molti volumi in quarto e si divide in *sette serie*, di cui cinque fondamentali e le ultime due contenenti i supplementi.

In particolare, le prime tre serie abbracciano le variabili più deboli – il cui minimo discende sotto la decima grandezza – e che sono comprese rispettivamente tra il parallelo — 25 e l'equatore; tra l'equatore e il parallelo + 25; tra il parallelo + 25 e il polo boreale. La serie quinta com-

prende le variabili più luminose della nona grandezza; la sesta quelle più luminose della settima grandezza. Ogni serie si compone poi di due parti: e cioè del *testo* nel quale sono date le indicazioni relative a ciascuna variabile, alla sua posizione, alla sua curva di luce, ecc. e di un *atlante* nel quale ogni *variabile* è disegnata in mezzo alle stelle vicine, ciò che rende più facile di ritrovarla in cielo.

Questi cenni già basterebbero a far comprendere l'interesse del lavoro anche se si trattasse di un'opera di pura compilazione: ma si tratta invece di un lavoro, in buona parte, originale.

Infatti le stelle dell'Atlas furono tutte osservate rigorosamente e controllate dal nostro consocio: le prime con l'equatoriale di 30 cm. di Georgetown e le altre con quello di 40 cm. della Specola Vaticana. E ciò appunto spiega da un lato perchè l'Atlas abbia richiesto tanti anni di lavoro, e d'altro lato rende la sua importanza ancora maggiore.

Ma, come dicevamo, questa opera utilissima e meritamente diffusa in tutte le Specole del globo, venne completata da un'altra di pari importanza ed ampiezza; il Trattato *Die veränderlichen Sterne*, dove il nostro consocio volle raccogliere ed esaminare tutto ciò che si conosceva sopra le stelle variabili, sia riguardo al modo di osservarle, sia riguardo al comportamento delle loro curve di luce, sia infine riguardo alle teorie avanzate per spiegare i loro fenomeni.

Certamente il continuo progredire della scienza può oggi aver infirmato qualche dettaglio; valga ad es. la particolare ipotesi binaria che i nostro consocio avanzò per la spiegazione delle Cefeidi e che egli chiamava « ipotesi cometaria » giacchè supponeva che tali stelle avessero un satellite formato da un ammasso di meteoriti, simile a quelli che costituiscono il nucleo delle comete. Oggi invece sappiamo che le Cefeidi non possono essere stelle binarie, giacchè la distanza del satellite dal centro dell'astro principale dovrebbe essere minore del raggio dell'astro stesso (1). D'altra parte i progressi della spettrofotografia hanno oggi mostrato come, esaminando varie righe spettrali delle Cefeidi ed applicando il principio di Doppler, si ottengano spesso per la velocità radiale dei valori diversi da riga a riga. E ciò può spiegarsi soltanto ammettendo che le Cefeidi siano stelle pulsanti e che i vari strati atmosferici, in cui hanno origine le differenti righe spettrali, siano sottomesse a pulsazioni di varia ampiezza secondo il loro differente livello sopra la fotosfera stellare. Ma chi conosce come l'astronomia siderale sia una scienza ancora giovanissima e ancora piena di enigmi e di ipotesi, dovrà convenire che la mancata conferma di qualche piccolo dettaglio nulla possa togliere al merito dello studioso.

(1) Ciò può dimostrarsi rigorosamente servendosi della relazione teorica data da Eddington – e verificata dalle osservazioni – tra la massa di un astro e la sua luminosità assoluta.

A questo gruppo di lavori di indole fotometrica possono poi collegarsi le ricerche di Hagen sopra le scale monodimensionali e bidimensionali dei colori degli astri e specialmente la sua bella Memoria sopra *I colori delle stelle* in cui pubblica e riduce il catalogo colorimetrico del Sestini, ponendolo anche a confronto con le osservazioni sue proprie e con quelle di Osthoff.

*
* *

L'ultimo gruppo dei lavori del nostro consocio riguarda lo studio delle *nebulose lucide* e *oscure* e la scoperta della *Via Nubila*.

Hagen – e posso dirlo per la lunga conoscenza personale che ebbi con lui – fu sempre ardente sostenitore, o meglio pioniere ed apostolo, di quella teoria unitaria che oggi ha finalmente trionfato. Ora infatti sappiamo che non vi è distinzione intrinseca tra nebule lucide e oscure; che tutte le nebulose amorfe sono naturalmente oscure e divengono luminose solo in quelle parti che sono illuminate – o meglio *eccitate* – dalla luce e dal bombardamento elettronico delle stelle vicine.

Le prove di questo fatto sono specialmente di natura spettroscopica; ma Hagen volle ricercarne altre prove, sia nell'esame della disposizione delle parti lucide rispetto alle parti oscure e rispetto alle stelle eccitatrici, sia nello studio dell'intensità luminosa totale – o, come noi diciamo, della grandezza fotometrica – delle parti lucide delle nebule, ecc.

Si ebbero così dapprima il *Preparatory Catalogue for a Durchmusterung of Nebulae* di Hagen e Becker e quindi la *Durchmusterung for obscure Clouds* che sostituisce oggi in modo assai vantaggioso il piccolo catalogo del Barnard, fin ad ora usato dagli astronomi.

Ma qui dobbiamo fare un'ultima osservazione.

Per una curiosa particolarità, la nostra atmosfera sembra assai adatta per gli studi fotometrici e colorimetrici stellari. Basta, per esempio, dirigere un canocchiale, anche modesto, sopra la magnifica e lucente nebulosa di Orione, la più bella del firmamento, per vedere là presso una oscura massa bigia che spicca sull'azzurro cupo del cielo notturno di Roma; e la distinzione è tanto facile che abbiamo spesso potuto mostrarla anche ai nostri studenti. Del resto lo stesso Hagen, appena giunto dall'America, si accorse immediatamente di questa purezza del nostro cielo e scrisse di osservare a Roma i colori stellari con una vivacità quale altrove non aveva mai osservato.

Sia per questa ragione, sia perchè l'occhio di Hagen era abituato a discernere le più tenui differenze di colore da un'educazione di quarant'anni, certo è che egli vide dalla Specola Vaticana ciò che nessun astronomo aveva mai visto e ciò che nessuna lastra fotografica non ha ancora potuto fotografare: la *Via Nubila*.

Non si tratta delle semplici nebulose oscure che noi tutti vediamo; la Via Nubila è assai più complessa. Il nostro consocio trovò che tutta la vòlta

celeste era intersecata da lunghe strisce oscure, che partecipavano al moto diurno ed erano quindi di origine extra–atmosferica. Queste strisce si dividevano, si riannodavano e si aggrovigliavano tra loro, simili ad un polipo gigantesco che estendesse i suoi enormi tentacoli ad abbracciare tutte le costellazioni.

Con la pazienza di un ricercatore, Hagen riuscì a costruirne una pianta, presentandone un primo schema al Congresso Astronomico di Roma del 1922, e molti di noi ricordano l'enorme interesse che il lavoro suscitò. Difficile però è dare una spiegazione teorica del fenomeno che rimane, in parte, avvolto nel mistero.

Certamente negli spazi interstellari non manca materia diffusa, ed anzi in questi ultimi anni è stato trovato che, nello spettro di alcune stelle, le righe [H] e [K] del calcio ionizzato non subiscono lo spostamento di Doppler, nonostante che l'astro sia dotato di notevole velocità radiale. Struve, Oort ed altri astronomi avanzano quindi l'ipotesi che tali righe siano prodotte, non dall'assorbimento operato nell'atmosfera stellare, ma dall'assorbimento che ha luogo in grandi masse gassose di calcio esistenti tra la stella e noi. Dobbiamo aggiungere però che si tratta di un fenomeno particolare e che, all'opposto, ricerche modernissime di Shapley hanno mostrato che le stelle più lontane hanno in media lo stesso colore delle stelle vicine e ciò sembra escludere che la luce stellare sia costretta ad attraversare materia diffusa, prima di giungere a noi; infatti in tal caso, per una nota legge di Rayleigh, le onde più brevi sarebbero diffuse in maggiore copia e gli astri più distanti acquisterebbero un colore rossastro.

Forse la spiegazione è diversa. Quando molte stelle debolissime sono addensate tra loro, allora – anche se individualmente invisibili con i cannocchiali più potenti – producono una qualche luce diffusa che illumina lievemente il fondo del cielo. Ci sembra quindi possibile che i « tentacoli oscuri » della Via Nubila di Hagen corrispondano a regioni del cielo in cui le stelle siano meno numerose; vorrei dire a grandi spaccature prodottesi nel sistema sidereo sotto il giuoco delle reciproche attrazioni. E se ciò fosse, il nostro consocio avrebbe forse trovato più o meglio di quanto credeva e potrebbe essere salutato come un precursore di ciò che sarà l'astronomia siderale nei secoli futuri.

Ma, terminando, ci basti notare che le ricerche sopra la rotazione della Terra, il Compendio di Matematica Superiore, i dieci volumi del Catalogo Fotografico, la grande opera sopra le Stelle Variabili, il vastissimo « Atlas Stellarum Variabilium » ed infine lo studio delle nebulose lucide e oscure e la scoperta della Via Nubila sono titoli veramente degni di un grande astronomo. Sono titoli che mostrano quanto sia stata attiva la vita del defunto consocio e come essa sia stata interamente ed egregiamente spesa per il progresso della Scienza!

PUBBLICAZIONI DEL SOCIO STRANIERO P. GIOVANNI HAGEN (1).

« Atlas stellarum variabilium ». (Sette serie sono pubblicate).

« Synopsis der Höheren Mathematik »:

Bd I: « Arithmetische und Algebraische Analyse ». Berlin 1891.

II: « Geometrie der Algebraischen Gebilde ». Berlin 1894.

III: « Differential und Integralrechnung ». Berlin 1905.

In corso di stampa:

IV: « Metrische Differentialgeometrie der Ebene und des Raumes ». Berlin 1931.

« Index Operum Leonardi Euleri ». Berlin 1896.

« Beobachtungen veränderlicher Sterne von E. Heis aus den Jahren 1840–1877, und von A. Krüger aus den Jahren 1853–1892 », herausgegeben von J. G. Hagen S. J. Berlin 1903.

Nelle Pubblicazioni della Specola Vaticana, Serie II.

« Colori stellari osservati a Roma negli anni 1844-1846 da Benedetto Sestini, S. J., esposti in nuovo ordine e riosservati ». Roma (1911).

« La Rotation de la Terre, ses Preuves mécaniques anciennes et nouvelles ». Rome (1911).

« La Rotation de la Terre, continuation des Expériences ». Rome (1912).

« Aggiunte al Catalogo dell'*Atlas stellarum variabilium* ». Roma (1916).

« Aggiunte alle Carte dell'*Atlas stellarum variabilium* ». Roma (1916).

« Die veränderlichen Sterne. Geschichtlich-technischer Teil ». Freiburg im Breisgau, Baden (1921).

« The Letter and Number-Scales of visual Star Colours. Roma (1923). In collaborazione con W. F. Franks.

« A Preparatory Catalogue for a "Durchmusterung" of Nebulae. The Zone Catalogue ». Edinburgh (1927).

Nelle pubblicazioni del Georgetown College Observatory.

« Preliminary Light Curve of *Nova Persei* 1901 ».

« First Chart and Catalogue for observing *Nova Persei* ». (1901). Second chart etc. (1901).

« Observations of variable stars, made in the years 1884-1890 ». – Part I. « The Observations ». (1901).

« Supplementary Notes to the *Atlas stellarum variabilium* ». - I. « The new star in Perseus ». - II. « Some engraved charts of Pogson's proposed Atlas ». (1901).

« Chart and Catalogue for observing *Nova Germinorum* ». (1903).

Nell'« Astronomical Journal ».

« The variable star μ Cephei ». 9 (1889) 15.

« Observations of some suspected Variables ». 9 (1889) 118.

« Observations of variable Stars ». 9 (1890) 157.

« Variations of S Persei and T Arietis, 1883-1888 ». 10 (1890) 115.

(1) Il presente elenco mi è stato favorito dalla gentilezza del P. S. Stein, Direttore della Specola Vaticana. Redatto con minuziosa cura, esso può ritenersi completo e insieme con i lavori di maggior mole, memorie e note scientifiche, comprende anche articoli di divulgazione o notizie astronomiche – sia pure brevissime – pubblicate dal P. Hagen.

« Southern variable Stars, observed in 1889 and 1890 ». 10 (1891) 177.
« Observations of the new Star in Auriga. 11 (1892) 172.
« Observations of solar Eclipse of 1892 Oct. 20 ». 12 (1892) 117.
« Variations of S Persei and T Arietis ». 12 (1892) 47.
« Meteor Shower of 1892 Nov. 23 ». 12 (1892) 145.
« Observations of Transit of Mercury, 1894 ». 14 (1894) 144.
« Note on U Geminorum ». 17 (1897) 127.

Nell' « Astrophysical Journal ».

« Report on a New Edition of the Northern Durchmusterung Charts ». 7 (1898) 145.
« The Northern Durchmusterung ». 7 (1898) 295.
« A Specimen Chart from the *Atlas stellarum variabilium* ». 8 (1898) 160.
« Observations of the Eclipse of May 28, 1900, by the Georgetown College Party ». 12 (1900) 101.
« Second Chart and Catalogue for observing *Nova Persei* ». 13 (1901) 233.
« Discussion of a Questionable Type of Temporary Stars ». 17 (1903) 281.
« Variable Stars in Nebula of Orion in connection with Chart for T Orionis ». 19 (1904) 344.
« The Atlas Chart for T Orionis extended ». 20 (1904) 351.
« Various scales for color-estimates ». 34 (1911) 261 e 35 (1912) 359.
« Correlation between the color-scales of one and of two dimensions ». 49 (1919) 282.
« On the Geometrical Classification of Long-Period Variables ». 53 (1921) 179.
« Definition of a Nova ». 54 (1921) 229.

Nella « Popular Astronomy ».

« Deflection of the level. Sidereal Messenger ». 3 (1884) 75, 107.
« Lunar eclipses as problems for students. Sidereal Messenger ». 3 (1884) 46.
« Laws of falling bodies. Sidereal Messenger ». 4 (1884) 15.
« Kepler's correspondence. Sidereal Messenger ». 6 (1887) 109, 133, 212.
« Atlas of variable Stars ». 5 (1897-98) 20 ; 7 (1899) 85.
« Chart and Catalogue for observing *Nova Persei* ». 9 (1901) 191, 279.
« The VIIth Series of the *Atlas stellarum variabilium* ». 35 (1927) 314.
« Nebulosities near the Galactic Pole. 37 (1929) 284 e 395.
« The Free-Pendulum experiment photographed ». 38 (1930) 381.

Nelle « Astronomische Nachrichten ».

« On the Deflection of the Level due to solar and lunar attraction ». 107 (1884) 373.
« Der Photochronograph angewandt auf Doppelsternmessungen ». 128 (1891) 177.
« Photographische Rectascensionsbestimmungen des Sirius ». 132 (1893) 23.
« Messungen von Doppelsternen mittelst Photographie ». 136 (1894) 303.
« Bessels " Verdacht gegen die Unveränderlichkeit der Polhöhe " ». 136 (1894) 207.
« Ueber einen möglichen systematischen Fehler des Zenithteleskops ». 138 (1805) 289.
« Ueber die Bedeutung der Sterngrössen im *Atlas stellarum variabilium* ». 145 (1898) 33.
« Probekarte aus dem *Atlas stellarum variabilium* ». 149 (1899) 309.
« Anzeige des Todes von Miss C. W. Bruce ». 152 (1900) 243.

« Zirkular betr. First chart and catalogue for observing *Nova Persei* 2 ». 155 (1901) 62.

« Confirmation of variability of 68. 1901 Y Persei ». 156 (1901) 335.

« Ueber Ceraskis Begleiter der *Nova Persei* 2 ». 157 (1902) 321.

« Ueber die Periode des veränderlichen *S Persei* ». 157 (1902) 303.

« Vermutete Veränderlichkeit eines Begleiters von *W Andromedae* ». 164 (1904) 79.

« Telescopic Observations of *Nova Persei* 2 ». 165 (1904) 75.

« Notiz betr. var. 190. 1904 *Cassiopeiae*. 168 (1905) 11.

« Notiz betr. ». BD + 16° 354, 360. 188 (1911) 206.

« Einige Literaturangaben über neue Sterne ». 195 (1913) 219.

« Mitt. betr. atmosphärische Störung ». 203 (1917) 405.

« Ein erster Vergleich zwischen dem Astrographischen Katalog und dem *Atlas stellarum variabilium* ». 204 (1917) 173.

« Zweiter Vergleich zwischen Astrogr. Katalogen und *Atlas stellarum variabilium* ». 205 (1917) 35.

« Dritter Vergleich u. s. w. » ibid. 247.

« Anfrage über einen Kometen von 1917 ». 206 (1918) 179.

« Verbesserungen zur BD ». 207 (1918) 23.

« Die ältere Literatur über einen *Neuen Stern* in Aquila und die Bezeichnung der *Novae* ». 208 (1919) 67, 72.

« Das Blinksternproblem ». 209 (1919) 33.

« Ueber eine Einteilung der langperiod. Veränderlichen ». 209 (1919) 257.

« Scheinbare und wirkliche Periodenlängen veränderlicher Sterne ». 210 (1920) 217.

« Zur Geschichte des veränderlichen *Y Scorpii* ». 210 (1920) 5.

« Vierter Vergleich zwischen Astrogr. Katalogen und *Atlas stellarum variabilium* ». 210 (1920) 1.

« Die Hauptphasen veränderlicher Sterne berechnet mit *Pogson's* Schneidender Kurve ». 210 (1920) 221.

« Unbekannte δ Cephei und ζ Gemin. Sterne ». 210 (1920) 247.

« Das Sternsystem unserer Sonne ». 211 (1920) 367.

« Geometrische u. physik. Erklärungsversuche des Blinksternproblems ». 211 (1920) 413.

« Beob. der *Nova Cygni* von 1920 ». 211 (1920) 403.

« Dunkle Nebel und Sternenleeren » (Jubiläumsnummer 1821-1921).

« Bemerk. betr. einen Stern bei *Y Lirae* ». 212 (1921) 63.

« Die dunkeln kosmischen Nebel ». 213 (1921) 351.

« The local cluster ». 213 (1921) 231.

« Stufenschätzungen dunkler Nebel ». 214 (1921) 449.

« Die Lage der Milchstrasse nach Heis ». 217 (1923) 291.

« Kurze Farbenschwankungen ». 218 (1923) 175.

« Beobachtungen von Sternbedeckungen ». 218 (1923) 159.

« Die Dunkelwolke beim Amerikanebel ». 224 (1925) 421.

« Erklärungen zu den Abhandl. des Herrn Wirtz über kosmische Wolken ». 225 (1925) 129.

« Dunkelwolken um den veränd. *X Cancri* ». 225 (1925) 383.

« Bemerk. zum δ Cephei Problem ». 225 (1925) 175.

« Nebelflecke und Nebelwolken ». 227 (1926) 391.

« Bestätigung der 52 Nebelfelder W. Herschels ». 229 (1927) 303, 319.

« Einige bemerkenswerte Sternleeren ». 230 (1927) 325.

« Interstellares Kalzium ». 232 (1928) 173.

« Nochmals die Beobachtungen am galakt. Pol ». 235 (1929) 313.

« Die atmosphär. Störung durch den Vesuv-Ausbruch ». 236 (1929) 31.

In « Scientia ».

« The Problem of the Variable Stars in its present State ». 29 (1921) 341.
« The nebular Envelope of our stellar System ». 31 (1922) 185.

Nelle « Publications of the Astron. Soc. of the Pacific ».

« A new observatory (Valkenburg, Hoolland) ». 9 (1897) 121.
« The new Atlas of variable Stars ». 10 (1898) 100.
« Explanatory Notes to the Article by Dr. Lundmark in n. 200 of this Journal ». 34 (1922) 320.
« Further Elucidations on Cosmic Clouds ». 39 (1927) 167.

Nella « Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft ».

« Ueber einen in Angriff genommenen Atlas der veränderlichen Sterne ». 31 (1896) 278.
« Ein Lehrbuch der veränderlichen Sterne ». 43 (1908) 282, 308.
« Ein neuer mechanischer Beweis für die Umdrehung der Erde ». 45 (1910) 323.
« Jahresbericht der Vatikansternwarte für 1909 » (1910). « 1919 » (1920). « 1921-1929 » (1922-1930).

Nelle « Monthly Notices ».

« Note on Pogson's manuscripts relating to his proposed Atlas of Variable Stars ». 59 (1899) 57.
« Note on some engraved charts of Pogson's proposed Atlas of Variable Stars ». 61 (1901) 399.
« Letter to prof. Turner on the comparison stars for *U Geminorum* ». 67 (1907) 330.
« Note on Y Cephei ». 68 (1908) 676.
« Missing B. D. Stars ». 77 (1917) 517.
« On Baxendell's diagram for the variable *S Volpeculae* ». 78 (1918) 64.
« On the nomenclature of U Böotis and χ *Cygni* ». 78 (1918) 64.
« Observations of *Nova Aquilae*, 1918 ». 79 (1919) 168.
« On the light curves of long-period variables ». 79 (1919) 572.
« The astrophysical problem of variable Stars ». 81 (1921) 226.
« A Map showing obscure nebulae and their situation towards the Milky Way ». 81 (1921) 449.
« Notes on W. Herschel's observations of extended nebulous fields ». 86 (1926) 144, 146, 349, 439, 548, 642; 87 (1927) 106.
« On the significance of Baxendell's Nebulosity ». 90 (1930) 331.

Nelle « Memorie » della Società Astronomica Italiana.

« Via Lattea e Via Nubila ». 1 (1920) 9.
« Teoria cometaria delle stelle tipo δ Cephei ». 1 (1920) 173.
« Prefazione all' " Isaac Roberts' Atlas of 52 Regions, A Guide to Herschel's Fields " ». 4 (1927) 411.

Negli « Atti » della Pont. Acc. delle Scienze.

« Mesures de precision executées avec l'Isotoméographe ». 73 (1919–1920) 236.
« The obscure Cosmic Cloud south of ζ *Orionis* ». 75 1921–1922) 83.
« A Durchmusterung of the Heavens for Obscure Cosmic Clouds ». 75 1921-1922) 71.
« On W. Herschel's Nebulous Regions ». 76 (1922-1923) 200.
« A Durchmusterung of the Heavens for Obscure Cosmic Clouds ». 76 (1922–1923) 89.
« The Zodiacal Cloud ». 76 (1922-1923) 31.
« Uniform Notation and Designation in Astronomy ». 77 (1923-1924) 127.
« Nota sopra una scoperta del prof. Plaskett ». 77 (1923–1924) 159.
« A special type of bright Nebulae ». 77 (1923–1924) 33.
« A Durchmusterung of the Heavens for Obscure Cosmic Clouds ». 77 (1923–1924) 131.
« On the Extension and Appearance of NGC 6822 ». 77 (1923-1924) 135.
« Notes on the δ Cephei Problem ». 78 (1924–1925) 161.
« Sui campi nebulari di Herschel ». 79 (1925–1926). 35.
« Eugenio Spee ». 79 (1925–1926) 188.
« Die begleitenden Flächen einer Raumkurve ». 80 (1926-1927) 97.
« The Nebulosity Herschel V 34 (GC 1193) NGC 1990 ». 80 (1926-1927) 94.
« Visual and photographic surveys of W. Herschel's nebulous regions ». 80 (1926–1927) 51.
« Ueber die Symmetrie der Flächenparameter ». 80 (1926-1927) 239.
« Comunicazione sulla rivista fotografica del dott. Roberts sui campi nebulari di Herschel ». 80 (1926-1927) 37.
« Calcium interstellare ». 81 (1927-1928) 50.
« Necrologio del P. Finyi ». 81 (1927–1928) 122.
« First note on the Darck Objects in Barnard's Photographie Atlas ». 81 (1927-1928) 204, 210; Second note, ibid. 372; Third note, ibid. 393; Fourth note, ibid. 397; Fifth note, 82 (1928–1929) 47.
« Das bewölkte Orionfeld ». 81 (1927-1928) 343.
« A Durchmusterung of the Heavens for Obscure Cosmic Clouds ». 82 (1928-1929) 263.
« Sulle macchie nere nell'Atlante fotografico del Barnard ». 82 (1928–1929) 52.
« Gli esperimenti del Pendolo libero » 83 (1929-1930) 59.

Varia.

Zeitschr. Math. Phys. « Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiaxigen Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten ausgebreiteten Flüssigkeit welche der Anziehung des ellipsoidischen Kernes, sowie der ihrer eigenen Masse unterworfen ist ». 22 (1877) 65–86.

— « Zur Theorie der drei ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten ». 24 (1879) 104–115.

— « Ueber die Verwendung des Pendels zur graphischen Darstellung der Stimmgabelcurven ». 24 (1879) 285–303.

American Journ. of Mathematics. « On Division of Series ». (1882) 236.

American Phil Soc. Proceed. « On the inclination of the apparent to the true horizon and the errors rising thereof in transit, altitude, and azimuth observations ». 20 (1883) 206-223.

Versamml. der deutschen Naturf. und Aerzte, Münster 1912. « Ein neuer Beweis der Erdrotation mittelst der Fallmaschine ».

International Congr. of Math. Cambridge Aug. 1912. « How Atwood's Machine shows the rotation of the Earth even quantitatively ».

Zeitschr. für Instrumentenkunde. « Der Isotomeograph als Präzisionsinstrument ». 40 (1920).

— « Die Fallmaschine als Beweismittel für die Erdumdrehung ». 43 (1923).

The Observatory. « The Vatican Observatory ». 46 (1923) 54.

Probleme der kosmischen Physik. « Die Nebelstrasse ». Anhang zu : Die Milchstrasse, von Prof. Dr. J. Plassmann. Hamburg IV (1924) 79.

Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss., phys.-math. Kl. « Die Geschichte des Nebels " Barnard 86 " ». (1928). XXVII. 482.

— « Weiteres zur Geschichte des Nebels " Barnard 86 " ». (1929). XXVI. 543.

Msr. I. Roberts' Atlas : A Guide to Herschel's Fields (1928). « Preface ».

Die Himmelswelt. « Ueber G. Bigourdans " Observations de Nébuleuses et d'Amas Stellaires " ». XXXIX. (1929). 195.

Die Naturwissenschaften. « Milchstrasse und Nebelstrasse ». IX. (1921).

— « Die zwei unabhängigen Beweise der Erddrehung beim Foucaultschen Pendelversuch » XVIII. (1930). 505.

Atti R. Accad. Lincei. « Oscillazioni del pendolo libero fotografate ». 11 (1930). 633.

Festschrift Stella Matutina (1931). I. « Die doppelte Erklärung der Pendelversuche. II. Das photographische Problem der Nebelwolken ».

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° marzo 1931 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. Garbasso

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Sopra la teoria delle variabili della famiglia di Mira Ceti.* Nota [1] del Socio G. Armellini.

1. Come è notissimo o *Ceti* – chiamata col nome di « Stella Maravigliosa » (*Mira*) da D. Fabritius, che ne scoprì la variabilità nel 1596 – costituisce il capostipite di una vasta famiglia di variabili a lungo periodo. Le stelle che la compongono sono stelle *giganti giovanissime*, di *densità media estremamente debole* (circa un milionesimo di quella dell'acqua), di colore rossastro e di *temperatura fotosferica notevolmente bassa* (1500-2000 centigradi). Il periodo di variabilità P, nella maggior parte dei casi, è compreso tra 250 e 400 giorni – donde il nome di « variabili a lungo periodo » – e l'ampiezza di variazione luminosa è, di regola, estremamente forte. Così p. es. *Mira Ceti* al massimo splendore è di terza o quarta grandezza, mentre al minimo splendore discende alla nona grandezza; vale a dire diviene circa cento o duecento volte meno luminosa [2].

Ma qui v'è una particolarità interessantissima, non ancora completamente spiegata. E cioè, se invece di misurare col fotometro la variazione dell'intensità luminosa, si misura col bolometro o con la pila termoelettrica la variazione dell'energia radiante, noi troviamo che questa ultima variazione è assai meno sensibile, aggirandosi in media intorno ad una gran-

(1) Presentata nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) Ricordiamo che, secondo la scala di Pogson, oggi generalmente adottata, quando si passa da una grandezza stellare alla precedente od alla successiva l'intensità viene moltiplicata o divisa per $100^{1/5} = 2.512$.

dezza stellare. Vale a dire, *mentre per l'occhio umano la radiazione dell'astro varia nel rapporto di 200:1 o di 100:1, per il bolometro o per la pila termoelettrica la radiazione varia nel rapporto 3:1 o 2:1.*

2. Per spiegare questo strano comportamento, il Joy [1], e con lui la maggioranza degli astrofisici moderni, comincia ad osservare che nelle stelle della famiglia di *Mira Ceti* la variazione luminosa appare connessa con una variazione della temperatura. Ed il fenomeno risulta innegabilmente dimostrato, sia dalla variazione del tipo spettrale, sia dalla variazione del colore, sia dal fatto che le bande spettrali del biossido di titanio T_iO_2 – indicatrici delle basse temperature – si rinforzano quando l'astro è al minimo splendore e si attenuano quando l'astro è al massimo, mentre avviene il contrario per le righe spettrali degli elementi ionizzati, indicatrici delle temperature elevate.

In particolare per la *Mira Ceti* la temperatura assoluta varierebbe da $T_M = 2300$, quando l'astro è al massimo splendore, a $T_m = 1800$, quando l'astro è al minimo splendore.

3. Ciò posto il Joy, in un suo poderoso lavoro sopra *Mira Ceti* [2], applica all'astro la nota legge di emissione di Planck, la quale – come insegna l'astrofisica – rappresenta con buona esattezza la distribuzione di energia nello spettro delle stelle. In tal caso, indicando con I l'intensità della radiazione di lunghezza d'onda λ e con T la temperatura assoluta, abbiamo:

$$(1) \qquad I = B\lambda^{-5}\left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}$$

dove B è un coefficiente di proporzionalità, senza interesse per noi, e dove si ha $c = 143.10^6$ esprimendo le lunghezze d'onda in unità Angstrom (decimilionesimi di millimetro). Dalla (1) si deduce poi, con una semplice integrazione, la celebre legge di Stefan secondo cui la quantità totale Q di energia emessa è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta.

Allora:

a) Per la legge di Stefan, indicando con Q_M e Q_m la quantità di energia irradiata al massimo ed al minimo, abbiamo subito:

$$(2) \qquad \frac{Q_M}{Q_m} = \left(\frac{T_M}{T_m}\right)^4 = \left(\frac{2300}{1800}\right)^4 = 2.7\,.$$

E cioè l'intensità bolometrica di *Mira Ceti*, dal massimo al minimo, varierebbe presso a poco nel rapporto 3:1, ciò che è in buon accordo con le osservazioni.

(1) Cfr. A. H. Joy, *A Spectrographic study of Mira Ceti*, in « Astrophysical Journal », vol. LXIII.

(2) Cfr. Joy, op. cit.

b) Per calcolare la variazione dell'intensità luminosa, il Joy suppone che questa sia misurata dalla intensità della radiazione di lunghezza d'onda 5750, corrispondente alla luce gialla per la quale l'occhio presenta la massima sensibilità. Si ha allora, dalla (1):

$$(3) \qquad \frac{I_M}{I_m} = \frac{e^{\frac{c}{\lambda T_m}} - 1}{e^{\frac{c}{\lambda T_M}} - 1} = \frac{e^{\frac{143 \cdot 10^6}{5750 \cdot 1800}} - 1}{e^{\frac{143 \cdot 10^6}{5750 \cdot 2300}} - 1} = 22.9 .$$

Vale a dire si ottiene una variazione fotometrica assai superiore a quella bolometrica, ma ancora notevolmente inferiore al risultato delle osservazioni che oscilla tra 100 e 200, come già dicemmo.

È facile però di vedere che questa seconda parte del calcolo del Joy, spesso riprodotta in libri e memorie, poggia sopra un'ipotesi tanto semplice quanto grossolana: quella che l'occhio umano sia sensibile soltanto alle radiazioni di lunghezza $\lambda = 5750$. E può quindi nascere il sospetto che il notevole divario tra teoria ed osservazione sia dovuto, almeno in parte, alla grossolanità di questa ipotesi.

Tale domanda mi è venuta spontaneamente nella redazione del vol. II del mio *Trattato di Astronomia Siderale* e forma ora oggetto precipuo della presente Nota.

4. A tale scopo, cominciamo dall'osservare che un calcolo rigoroso dell'energia visuale I è quasi impossibile, giacchè non conosciamo con esattezza come varî [1] il coefficiente di sensibilità dell'occhio umano al variare della lunghezza d'onda nello spettro visivo. Ciò non ostante, recenti studi del Wilsing hanno mostrato [2] che, a meno di un coefficiente di proporzionalità che non entra nei rapporti, l'energia luminosa può ritenersi misurata dalla energia irradiata dall'astro tra le lunghezze d'onda $\lambda = 4500$ e $\lambda = 6800$, e cioè dall'integrale:

$$(4) \qquad \int_{4500}^{6800} \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

che, essendo ora c molto grande rispetto al prodotto λT, può scriversi sotto la forma più semplice:

$$(5) \qquad \int_{4500}^{6800} \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\lambda .$$

(1) Cfr. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. I, p. 123.

(2) Cfr. « Publ. des Astroph. Obs. zu Potsdam », n. 76, p. 17; cfr. anche ARMELLINI, op. cit., p. 124.

In conseguenza, il rapporto tra le energie luminose I_M ed I_m emesse dall'astro al massimo ed al minimo splendore, sarà:

$$\frac{I_M}{I_m} = \frac{\int_{4500}^{6800} \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T_M}} d\lambda}{\int_{4500}^{6800} \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T_m}} d\lambda} \tag{6}$$

dove si ha sempre $c = 143 \cdot 10^6$, $T_M = 2300$ e $T_m = 1800$.

Se ora poniamo, per brevità:

$$x = \frac{c}{\lambda T} \tag{7}$$

abbiamo subito:

$$\int \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\lambda = \frac{T}{c} \int \lambda^{-3} e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\left(-\frac{c}{\lambda T}\right) = \tag{8}$$

$$= \frac{T^4}{c^4} \int \left(\frac{c}{\lambda T}\right)^3 e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\left(-\frac{c}{\lambda T}\right) = \frac{T^4}{c^4} \int x^3 e^{-x} d(-x).$$

Ora, integrando per parti, si ha immediatamente:

$$\int x^3 e^{-x} d(-x) = x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} d(-x) \tag{9}$$

ciò che abbassa di un'unità l'esponente della x sotto il segno d'integrazione.

Continuando il procedimento e sostituendo in (6), si ha infine

$$\frac{I_M}{I_m} = \frac{T_M^4 \left\{ e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \right\}_{x = c:6800\,T_M}^{x = c:4500\,T_M}}{T_m^4 \left\{ e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \right\}_{x = c:6800\,T_m}^{x = c:4500\,T_m}} \tag{10}$$

dove abbiamo sempre $T = 2300$, $T_m = 1800$ e $c = 143 \cdot 10^6$.

Eseguendo il calcolo numerico, che non presenta nessuna difficoltà, otteniamo allora:

$$\frac{I_M}{I_m} = 16.8. \tag{11}$$

Ora questo risultato è in *piena discordanza* con le osservazioni che, come già sappiamo, danno per $\frac{I_M}{I_m}$ valori compresi tra 100 e 200.

5. Giunti a questo punto, si presenta spontanea l'idea d'invertire il problema e cioè di calcolare le temperature massime e minime di *Mira*

Ceti, sapendo che l'energia bolometrica varia nel rapporto 3 : 1 e quella visuale nel rapporto 200 : 1. La (2) e la (6) forniscono allora un sistema di due equazioni in cui i primi membri sono conosciuti ed in cui compariscono le due sole incognite T_M e T_m.

Risolvendo il sistema, abbiamo subito

$$T_M = 1500 \quad ; \quad T_m = 1100 .$$

6) Concludendo, giungiamo a questi risultati:

a) Adottando per *Mira Ceti*, le temperature estreme oggi generalmente ammesse, e cioè $T_M = 2300$ e $T_m = 1800$, si ha una notevolissima divergenza tra teoria ed osservazione. Tale divergenza è *reale* e non già dovuta al calcolo troppo grossolano del Joy.

b) Volendo ottenere risultati in buon accordo con le osservazioni occorrerebbe supporre per le temperature estreme di *Mira Ceti* dei valori assai più bassi, e cioè $T_M = 1500$ e $T_m = 1100$. Ma allora sorgerebbero forse difficoltà di altra natura, sia per quanto riguarda il comportamento delle righe spettrali, sia per il *colore* di *Mira* che, alla temperatura effettiva assoluta di 1100, dovrebbe essere rosso cupo ed avere un « indice colorimetrico » molto più elevato di quanto risulta dal confronto delle misure fotometriche visuali e fotografiche. Non entriamo però nella questione che meriterebbe un esame profondo.

c) Qualora questi ultimi valori della temperatura fossero giudicati inammissibili, per spiegare i fenomeni di *Mira* non resterebbe che associare la variazione di temperatura con una variazione della trasparenza atmosferica, secondo la « *veil theory* » avanzata dal Merill [1] e adottata da Hopmann [2].

In altre parole, occorrerebbe supporre che, quando *Mira* è al minimo splendore, la sua atmosfera sia meno trasparente per le brevi lunghezze d'onda, forse per la presenza di corpi composti che si formano a quella bassa temperatura. In tal modo, mentre i raggi infrarossi – trasportatori della maggior parte dell'energia irradiata – potrebbero passare senza grandi perdite, i raggi visuali subirebbero un notevolissimo assorbimento. In particolare, tra i composti va notato il biossido di titanio $Ti O_2$, come fu rilevato anche dal Joy.

(1) Cfr. « Publ. of Astr. Obs. of University of Michigan », vol. II.

(2) Cfr. HOPMANN, *Ein Beitrag zur Theorie der Miraveränderlichen*, in « Astr. Nachr. », Bd. CCXXVIII, n. 5455.

Fisica. — *Di alcune nuove ricerche fotoelettriche.* Nota [1] del Socio Q. Majorana.

In due Note presentate a questa Accademia or sono tre anni [2] diedi notizia di un nuovo fenomeno da me constatato, facendo cadere sul primo triodo di un gruppo amplificatore, della luce periodicamente interrotta. Tale triodo deve avere lo spinotto della sua griglia senza alcuna connessione; e la luce pulsante deve penetrare nell'interno del triodo. Il telefono dell'amplificatore, nelle condizioni particolarmente spiegate nelle dette Note, ripete il suono corrispondente alla frequenza di interruzione della luce.

Del fenomeno in parola cercai già allora di dare qualche spiegazione; ma ciò malgrado, talune particolarità di esso sono rimaste non completamente chiare. Gli è perciò che ho ripreso da qualche tempo lo studio in questione, riuscendo per ora a constatare altri fatti, che, se presentano qualche connessione con quelli già descritti e più sopra citati, hanno, rispetto ad essi, qualche elemento o carattere del tutto nuovo.

Scopo di questa Nota è di dare una sommaria relazione di tali constatazioni.

L'effetto già descritto può chiamarsi *effetto interno* del triodo, sotto l'azione della luce periodica. Ma già tre anni or sono, feci cenno dell'esistenza di un *effetto esterno*, dovuto ad un'azione di corpi esposti a tale luce, connessi con la griglia del primo triodo del gruppo amplificatore (che chiamerò *triodo sensibile*) o pur anche, dallo spinotto di questo, tenuti alla distanza di qualche millimetro. Principalmente, nelle nuove ricerche di cui qui farò cenno, mi sono occupato di tale effetto esterno. A tal uopo il triodo sensibile (come tutti gli altri del gruppo amplificatore) è ricoperto di carta nera per impedire l'arrivo su di esso di luce. L'amplificatore ora adoperato è costituito oltre che dal triodo sensibile, da altri tre triodi preferibilmente A 425 Philips. Il triodo sensibile, qui impiegato, poichè è destinato a permettere l'ascoltazione di effetto esterno, può anche non esser costruito con fili *dumet* (all'ossido di rame); la sua funzione è evidentemente soltanto quella di amplificare certe deboli azioni elettriche che pervengono alla sua griglia o allo spinotto di questa. Il coefficiente di amplificazione di questo amplificatore può valutarsi, complessivamente, dell'ordine di 100.000 unità. La sorgente di luce impiegata è una lampada intensiva a filamenti raccolti da 1000 watt, quantunque molti dei fatti che ora esporrò pos-

(1) Presentata nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) Vedi questi «Rendiconti», vol. VII, pp. 801 e 877, 1928.

sono esser ripetuti con lampade notevolmente meno intense. La luce di tale lampada è periodicamente interrotta (alla frequenza di 5 o 600 periodi) da un disco girante di alluminio, portante verso la periferia quindici fori di 25 mm. di diametro. Il disco è situato col suo bordo assai prossimamente alla lampada, tanto che il cratere di questa dista dal foro più vicino di quello, soltanto qualche centimetro. Il cratere è nel fuoco di una lente di 15 cm. di apertura e 24 cm. di fuoco, situata al di là del disco. Il fascio di raggi quasi paralleli così ottenuto, arriva in prossimità del gruppo amplificatore situato ad almeno tre metri di distanza. Con ciò, si evitano perturbazioni induttive prodotte dal motorino del disco. Se necessario, il fascio è concentrato sugli oggetti che si studiano, prossimi alla griglia del triodo sensibile, mediante una conveniente lente. Si arriva così ad ottenere illuminazioni che possono variare da 100.000 a 1.000.000 di lux.

Ecco ora i fatti osservati.

Si prenda una lampada termojonica o triodo anche fuori uso, nel quale però non sia rientrata l'aria. Lo si tenga in mano per gli spinotti, in vicinanza del triodo sensibile, e si faccia arrivare su di esso la luce pulsante, avendo cura che questa batta nell'interno di tale triodo, attraverso la parte del suo vetro che non è coperta da *getter* magnesiaco. Occorre, infatti che il triodo sia *getterato*, e incompletamente, per la riuscita dell'esperimento. Salvo quanto sarà detto in seguito, in tali condizioni si ascolta alla cuffia dell'amplificatore un suono che può avere forza da 6 a 8 (1).

Si tratta dunque di un *effetto esterno*, o meglio *effetto a distanza*, giacchè non vi ha alcuna connessione metallica tra la griglia del triodo sensibile e del triodo esterno che si sperimenta (*triodo attivo*).

Il triodo attivo deve, come si è detto possedere il getter. Così sono quasi tutti quelli costruiti dalla casa Philips; ed essi hanno anche i conduttori di attacco interni in filo dumet, cioè filo di ferro al nichel, ricoperto di ossido di rame. Nelle prime Note, e per quanto riguarda la constatazione dell'*effetto interno*, avevo osservato come fosse importante l'esistenza di tale particolare; anzi triodi senza filo dumet non dànno l'effetto. Per l'effetto esterno ora descritto non sembra del tutto necessaria la presenza del filo dumet. Purchè la luce penetri dentro il triodo getterato, si ascolta il suono. Triodi senza sensibile traccia di filamenti di rame (rossi, dentro il vetro), come i Telefunken Re 134 dànno ottimo effetto.

Sembra anzi che l'effetto si intensifichi quando penetrando dentro al triodo, la luce arriva a colpire la placca, e meglio la superficie interna del magnesio del getter.

Ma non tutti i triodi getterati parzialmente, con o senza fili rossi dànno l'effetto in misura apprezzabile. Triodi con placca cilindrica di piccola esten-

(1) Si adotta così una comune terminologia: la *forza* dei suoni ascoltabili al telefono può venir valutata con numeri da 1 a 10.

sione superficiale, pur essendo ottimamente getterati, come il Philips A 410 non presentano l'effetto. È curioso il fatto che se si prende uno di tali triodi, e se ne scalda con un bunsen la parte superiore dove maggiormente è addensato il magnesio, si può riuscire a trasferire il getter da tale parte, alle località più basse del triodo, ed anche sulla placca, e sull'attacco in vetro interno del triodo. Orbene, un triodo A 410 così trasformato, e colpito dalla luce pulsante dalla sua parte superiore (ora libera di getter) lascia bene ascoltare l'effetto.

Per la constatazione dell'effetto, si prestano bene in generale triodi getterati parzialmente con placca quadrata di circa 2 cm. di lato, come sono molti della casa Philips.

L'effetto esterno può essere constatato nelle condizioni di amplificazione e di illuminazione sopra indicate, allontanando il triodo attivo sino a circa 60 cm. di distanza, dal triodo sensibile; qualora peraltro lo si tenga con la mano, per gli spinotti.

L'effetto si affievolisce o sparisce se il triodo attivo è toccato con la mano sul suo vetro. Se il triodo non è ben secco, basta a ciò un lievissimo contatto con un dito; scaldandolo, occorre coprirlo interamente con la mano, o con un involucro di stagnola posto a terra, per far sparire l'effetto.

L'effetto appare dunque dovuto ad una azione elettrica del getter, attraverso il vetro del triodo attivo, sul triodo sensibile. A riprova di ciò, si ricopra il triodo attivo di stagnola, sulla parte esterna al getter, soltanto. Si connetta tale stagnola mediante un filo di rame, anche lungo parecchi metri, con un dischetto metallico posto in vicinanza del triodo sensibile; così tali due triodi rimangono fra loro assai discosti. In tali condizioni l'effetto è di nuovo constatabile, giacchè si è incanalata nel filo di rame la perturbazione elettrostatica. Che si tratti di una perturbazione di tale genere vien confermato dall'arresto completo dell'effetto, mediante una rete metallica interposta fra triodo sensibile e dischetto. Per ora, si può dire soltanto che tale perturbazione ha la frequenza acustica imposta al raggio luminoso del disco girante.

L'effetto è constatabile anche servendosi di una lampada in quarzo a vapori di mercurio. Anzi, si può dire, che tale lampada, benchè appaia all'occhio molto meno luminosa delle lampade intensive a 1000 watt, è rispetto a questa, di poco meno efficiente. Notisi inoltre che per meglio utilizzare la luce della lampada a mercurio, ho posto questa solo a 40 cm. dal triodo sensibile, abolendo altresì qualsiasi lente, e interponendo soltanto il disco rotante a fori, mosso mediante una trasmissione meccanica, da un lontano motorino. Si osserva inoltre che l'interposizione di un vetro comune non fa cambiare l'intensità dell'effetto. Ciò dimostra che le radazioni u. v. molto rifrangibili, non entrano nel fenomeno; la qual deduzione era alquanto prevedibile, pensando che il triodo attivo ha già un mantello di vetro comune, per quanto sottile.

In genere, l'effetto è constatabile ancora interponendo un vetro all'ossido di nichel. Ciò dimostra che le λ intorno a 3650 Å sono particolarmente attive. Son invece inattive le rosse od ultrarosse; infatti sia un vetro rosso che uno all'ossido di manganese arresta l'effetto.

Le esperienze ed osservazioni sopra riassunte, ripetute con molte varianti, mi hanno portato a riconoscere che, elementi essenziali per l'osservazione dell'effetto, sieno: il getter, la forma della placca, il vuoto del triodo. Ho rivolto particolare attenzione sinora a quest'ultima circostanza arrivando alle seguenti conclusioni.

Se si fora un triodo attivo, anche mentre si ascolta il suono al telefono prodotto per la luce pulsante che lo colpisce, l'effetto scompare istantaneamente, non appena l'aria comincia a rientrarvi.

Si può pensare che tale fatto provenga da un'alterazione della superficie del magnesio del getter, sotto l'azione ossidante dell'aria, per quanto, come è noto, il magnesio rimane col suo aspetto brillante per qualche tempo, anche in presenza di aria, se questa è alla temperatura ambiente. E per rispondere a tale dubbio, con un artificio facile a immaginarsi, ho più volte provocato la rottura del triodo mediante una punta di acciaio, in guisa che dal foro così praticato non potesse rientrare (in un primo caso) che del gas illuminante, ed in altre esperienze, idrogeno accuratamente purificato ed essiccato. In ogni caso, l'effetto sparisce istantaneamente, al primo ingresso di uno dei gas adoperati. Ho l'impressione che qualunque gas di quelli comunemente disponibili, darebbe lo stesso risultato. Forse, per quanto sarà detto in seguito, un gas nobile potrebbe comportarsi altrimenti.

Poteva presumersi che l'effetto potesse dipendere in modo per ora inspiegabile, della effettiva presenza dell'aria, indipendentemente dalla eventuale alterazione del getter da essa provocata. Ho perciò proceduto alla vuotatura di un triodo precedentemente attivo, nel quale era rientrata l'aria. Il vuoto veniva spinto sino ai raggi catodici duri. Risaldato il triodo, l'effetto non è più stato constatato.

Ho proceduto allora, una volta fattavi rientrare l'aria, a ripulire dal getter con acido cloridrico, un triodo. Ho, inoltre, ad esso saldata un'appendice di vetro nella quale (dopo vuotato il triodo) ho fatto volatilizzare del magnesio, costituito da un sottile nastro, fissato a due reofori penetranti, con saldature sul vetro, nell'appendice. Una traccia di effetto ho così avuto di nuovo. Ma l'esperienza va ripetuta, in migliori condizioni, quando potrò disporre di un forno a induzione.

Più efficace è riuscito l'esperimento di introdurre preventivamente nell'appendice, un pezzetto di sodio metallico. Quando si è proceduto alla vuotatura del triodo, e si è ottenuta, per riscaldamento dell'appendice, la volatilizzazione del sodio, si forma un getter, simile nell'aspetto, a quello di magnesio. L'effetto ricompare.

Una serie diversa di esperimenti è stata eseguita ora, servendosi anzichè di triodi, di cellule fotoelettriche.

Una cellula fotoelettrica comune, al sodio e gas nobile, esposta alla luce pulsante, in vicinanza del triodo sensibile lascia sentire il suono del disco in modo ancora più marcato, che non con i triodi attivi precedentemente adoperati. Occorre perciò tenere il gambo della griglia della cellula, in mano; lasciare isolato l'elettrodo del metallo alcalino (o del suo idruro); e far battere la luce sul metallo stesso. Così, quando la cellula è anche a un metro, ed anche più, di distanza dal triodo sensibile si sente ancora il suono.

L'effetto con la cellula è però anche constatabile, quantunque in modo più debole, se la sua griglia è connessa col metallo fotoelettrico; ed anche se la cellula è lasciata isolata elettricamente, a distanza però non eccessiva dal triodo sensibile (10 o 15 cm.).

L'effetto è più marcato (almeno nelle cellule da me impiegate) quando la luce cade in modo quasi radente sul metallo alcalino, o quando è concentrata su un punto della sua periferia.

L'effetto così descritto, si constata dunque senza l'interposizione di alcuna f. e. m. fra griglia e metallo della cellula. Se si interpone una f. e. m. avvertendo di costituire polo negativo il sodio, e positivo la griglia, l'effetto cresce notevolmente; tale f. e. m. può essere dell'ordine di 50 a 100 volt; restando cioè al disotto del potenziale di accensione della cellula. Ma ciò che è più notevole si è, che l'effetto si constata ancora in buona misura, quando il metallo è positivo rispetto alla griglia. Inoltre, in tali esperimenti, l'interposizione di una forte resistenza, dell'ordine del megaohm, fra griglia e metallo, accentua l'effetto.

Anche per l'effetto constatato con le cellule fotoelettriche al sodio (o al sodio e litio), si è rilevata una certa trasparenza del vetro all'ossido di nichel, ed opacità al vetro rosso, od all'ossido di manganese.

Al fine di poter rilevare qualche elemento quantitativo degli effetti descritti, ho montato a conveniente distanza dal gruppo amplificatore un oscillatore a triodo della stessa frequenza impressa dal disco girante alla luce impiegata. Con una disposizione potenziometrica, ho fatto pulsare elettricamente un dischetto metallico situato presso il triodo sensibile, a quella stessa frequenza (5 o 600 vibrazioni), e con intensità tale che il suono rilevabile alla cuffia abbia la stessa intensità di quello constatato con la cellula fotoelettrica. Ho potuto così rilevare che le fluttuazioni di potenziale impresse al dischetto, hanno in tali condizioni un'ampiezza di circa 0,2 o 0,3 volt. Ciò fa pensare che altrettanto avvenga per lo strato di sodio della cellula, sotto l'azione della luce pulsante.

Le esperienze descritte sono dunque state eseguite servendosi di triodi o di cellule fotoelettriche. È difficile per ora, non che di dare una sodisfacente spiegazione dei vari fatti, di porre solo in relazione netta le due categorie di esperimenti.

Per chiarire in qualche modo tutta questa materia, ho ripreso delle ricerche di carattere, dirò così, statico, che avevo già iniziato tre anni or sono, quando mi accorsi dell'effetto interno dei triodi, allora descritto. Ho tentato di studiare all'elettrometro il comportamento di un corpo illuminato, anche se esso non dà luogo ad effetto fotoelettrico esterno. Con tutta probabilità si tratta infatti di una perturbazione di carattere elettrico, che si diversifica in qualche guisa sia dall'effetto fotoelettrico classico Hertz–Hallwachs–Righi; sia dall'effetto fotoelettrico interno del selenio, tallio, solfuri ecc. Tale idea era già stata espressa da me nella seconda Nota più sopra citata. E uno studio di questo genere acquista ora maggiore importanza, in conseguenza delle fatte constatazioni, usando getter di magnesio, o depositi di metalli alcalini.

Date le difficoltà sperimentali e la delicatezza dei fenomeni, non ho potuto sinora orientarmi definitivamente in tale studio. Ma mi pare interessante sin d'ora, accennare brevemente ad un altro fatto ora constatato.

Si colleghi ad una coppia di quadranti di un sensibile elettrometro (ago elettrizzato a 500 volt), la placca di una cellula al sodio: la griglia è a terra. Essendo la cellula illuminata dalla lieve luce diffusa della stanza, l'elettrometro accusa una deviazione permanente. La posizione così presa dal suo ago, si assume come zero. Si illumini la cellula con la luce di un fiammifero, oppure con quella di una lampada ad incandescenza filtrata (quest'ultima) con un vetro rosso. Si nota una netta deviazione dell'ago nel senso di una elettrizzazione *negativa*. L'ago torna a zero, cessando la luce.

Se si illumina il metallo della cellula con la luce totale di una comune lampada ad incandescenza, la deviazione manca; quasichè l'azione dei raggi rossi od ultrarossi venga ad essere neutralizzata o mascherata dalla presenza di quelli più refrangibili.

Nell'annunziare questi risultati non ho per ora elementi sufficienti per darne una spiegazione. Mi riservo perciò di ritornare sull'argomento, mettendoli, se del caso, in relazione con gli altri più sopra descritti.

Fisica (Fisica-matematica). — *Dimostrazione di una proprietà attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie.* Nota [1] del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

Nel mio recente volumetto: *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico* [2], di una copia del quale ho l'onore di far omaggio a questa illustre Accademia, dedotto per

$$(1) \qquad V = \int_{\sigma} \frac{k\, d\sigma}{r},$$

col solito significato dei simboli, nell'ipotesi che k ammetta derivate limitate e continue, rispetto a coordinate curvilinee u, v dei punti della superficie σ, nel punto potenziato $P(x, y, z)$, esterno a σ,

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \int_{s} \frac{S\, ds}{r} + \int_{\sigma} \frac{K\, d\sigma}{r} - \int_{\sigma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} k \cos \widehat{nx}\, d\sigma,$$

dove, intese le coordinate curvilinee ortogonali, è

$$(3) \qquad S = \alpha_1 \frac{ds_v}{ds} + \alpha_2 \frac{ds_u}{ds},$$

α_1, α_2 rappresentando il coseno dell'angolo formato coll'asse delle x dalla tangente alla linea u e alla linea v, volte nel senso in cui cresce la relativa coordinata (v e u), e K rappresenta una funzione dei punti di σ, se ne ricava, escluso che il punto limite P_σ appartenga al contorno s,

$$(4) \qquad \lim_{n \gtrless 0} \frac{\partial V}{\partial x} = X_\sigma \mp 2\pi k,$$

e si afferma che

$$(5) \qquad X_\sigma = \int_{s} \frac{S\, ds}{r} + \int_{\sigma} \frac{K\, d\sigma}{r} - \left(\int_{\sigma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} k \cos \widehat{nx}\, d\sigma \right)_{\sigma},$$

(1) Presentata nella seduta del 1° marzo 1931.
(2) Milano, Hoepli, 1931.

dove i primi due integrali vanno pure intesi riferiti al punto P_σ, il primo come semplice valore, e il secondo col concetto dell'integrale proprio, è il valore in P_σ, col medesimo concetto, di

$$(6) \qquad X = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} k \, d\sigma = \int_\sigma \frac{k \cos \widehat{rx}}{r^2} d\sigma .$$

La dimostrazione, che non mi sembra priva di qualche interesse, è la seguente.

Col noto procedimento, si levi da σ un intorno di P_σ, per indicare poi con un apice la parte residua e i relativi elementi. Avremo così, per (6),

$$(7) \qquad X' = \frac{\partial V'}{\partial x} = \int_{\sigma'} \frac{k \cos \widehat{rx}}{r^2} d\sigma' ,$$

e, conformemente a (2),

$$(8) \qquad X' = \int_s \frac{S \, ds}{r} + \int_{s'} \frac{S \, ds'}{r} + \int_{\sigma'} \frac{K \, d\sigma'}{r} - \int_{\sigma'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} k \cos \widehat{nx} \, d\sigma' ,$$

dove il secondo integrale si riferisce al contorno dell'intorno, cioè è

$$(9) \qquad \int_{s'} \frac{S \, ds'}{r} = \int_{s'} \frac{1}{r} \left(\alpha_1 \frac{ds_v}{ds'} + \alpha_2 \frac{ds_u}{ds'} \right) ds' ;$$

ossia, concependo proiettato il contorno s' dell'intorno sul piano tangente a σ in P_σ, e posto con questo, con evidente significato dei simboli,

$$r = \rho \cos \varphi \quad , \quad ds' = d\varsigma \cos \psi \quad , \quad d\varsigma = \rho \, d\theta ,$$

per (9),

$$\int_{s'} \frac{S \, ds'}{r} = \int_{2\pi} \left(\alpha_1 \frac{ds_v}{ds'} + \alpha_2 \frac{ds_u}{ds'} \right) \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} d\theta .$$

$\frac{ds_u}{ds'}$ e $\frac{ds_v}{ds'}$ sono i coseni dell'angolo che forma la tangente nel punto generico di s', volta nel senso in cui cresce l'arco s', colle tangenti nello stesso punto, alle linee u e v, volte nel senso in cui crescono s_u e s_v. Indichiamo con β_1 , β_2 i coseni dell'angolo che formano tra loro le proiezioni delle stesse tangenti sul piano tangente a σ in P_σ. Sarà

$$\frac{ds_u}{ds'} = \beta_1 + \varepsilon_1 \quad , \quad \frac{ds_v}{ds'} = \beta_2 + \varepsilon_2 ,$$

dove ε_1 e ε_2 svaniscono collo svanire dell'intorno, per cui va inteso collo svanire della massima corda tracciabile nel suo contorno.

Ora, la proiezione del contorno dell'intorno essendo una linea piana, che possiamo intendere tutta convessa [1], i suoi punti si potranno distribuire in tante coppie di punti per cui le tangenti, volte nel senso in cui cresce l'arco ς, hanno la stessa direzione e verso opposto. E, collo svanire dell'intorno, tendendo le linee u e v relative ai due punti a diventare parallele, le β_1, β_2, per gli stessi due punti, tenderanno a valori della stessa grandezza e segno contrario. Indichiamo con $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ la differenza dei valori di α_1, α_2 nei due suddetti punti. Si avrà, per contributo dei due punti medesimi nell'integrale,

$$\beta_1 \Delta\alpha_1 + \beta_2 \Delta\alpha_2 + \delta ,$$

dove $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ e δ svaniscono con lo svanire dell'intorno.

D'altra parte

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = 1 + \varepsilon ,$$

dove ε svanisce parimente collo svanire dell'intorno. Quindi

$$\int_{s'} \frac{S\, ds'}{r} = \int_{\bar\theta} (\beta_1 \Delta\alpha_1 + \beta_2 \Delta\alpha_2 + \delta)(1 + \varepsilon)\, d\theta ,$$

con $\bar\theta < 2\pi$. E per concludere che l'integrale svanisce collo svanire dell'intorno non occorre più che ammettere che $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, δ e ε svaniscono uniformemente. Per il che basta supporre che gli elementi geometrici accennati, concepiti come funzioni di u, v, ammettono derivate prime limitate.

Con questo la (8) fornisce per (5)

$$\lim X' = X_\sigma$$

c. v. d.

Coll'ipotesi dell'esistenza delle derivate di k, ammessa, del resto, anche dal Poincaré e dal Korn, nelle loro ben conosciute trattazioni [2], ma

(1) Non è una restrizione, perchè il limite in discorso deve esistere, ed essere indipendente dalla forma dell'intorno, esistendo, ed essendo indipendente dalla forma dell'intorno, i limiti del primo membro della (8) e del secondo e terzo termine del secondo membro, il cui primo termine è poi invariabile.

(2) H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*. § 40; A. Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, II. Abschnitt, 3. Kapitel, § 2.

adoperata nel modo indicato, mi sembra di avere conseguito, in confronto di coteste e d'altre trattazioni dello stesso argomento, un notevole grado di semplicità. Con ipotesi più generali, quali ho usato io stesso nella mia antica Memoria del « Nuovo Cimento » [1], il procedimento che conduce allo scopo si complica, in modo, tra l'altro, da non riuscire appropriato alla Scuola, alla quale il mio volumetto è particolarmente dedicato.

ERRATA. – *A p. 677 del vol. IX di questi « Rendiconti » leggasi per la formula* (2)

$$I = \int_{\omega} \Sigma \mp h d\omega .$$

Chimica. — *Su alcune proprietà della silice residuale dell'attacco della leucite con acidi.* Nota preliminare [2] del Corrisp. G. A. BLANC.

In una serie di pubblicazioni d'indole tecnica riferentisi alla possibilità di utilizzare la leucite come fonte di allumina e di potassa [3] ho avuto campo di descrivere un metodo per liberare i liquidi, risultanti dall'attacco di detto minerale con acidi, dalla silice contenutavi allo stato di sospensione colloidale.

Ho avuto anche campo di accennare, in tali pubblicazioni, a quella che era, secondo me, la spiegazione più probabile dei fenomeni sui quali era basato tale metodo di eliminazione della silice, in cui, in sostanza, mi venivo a servire di una massa di granuli di silice colloidale, risultanti dall'attacco di una sabbia leucitica con un acido, per fissare una fase dispersa, separandola così dal dispersoide circolante attraverso alla suddetta massa di granuli di silice colloidale.

Tale operazione è resa possibile, in pratica, da una serie di osservazioni da me fatte anni or sono [4] e cioè:

1. Che quando un cristallo o frammento di cristallo di leucite, di dimensioni anche notevoli, viene immerso nella soluzione di un acido minerale forte, l'attacco si estende progressivamente a tutta la massa di quel

(1) *Sulle proprietà fondamentali della funzione potenziale nell'immediata prossimità e nell'estensione dell'agente*, « Nuovo Cimento » (3), vol. XXIII.

(2) Presentata nella seduta del 1° febbraio 1931.

(3) Atti del Congr. Naz. di Chimica industr., Milano, aprile 1924, pp. 119 e segg.; Atti II Congr. Naz. di Chimica generale ed applicata, Palermo, 1926, pp. 1398 e segg.; Atti XVI Congr. Soc. Ital. Progresso Scienze, Perugia, 1927, p. 165; Atti III Congr. Naz. di Chimica pura ed applicata, Firenze e Toscana, 1929, pp. 226 e segg.

(4) Atti del Congr Naz. di Chimica industriale di Milano, 1924, pp. 119 e segg.

cristallo o frammento di cristallo, sicchè la totalità sia della potassa che dell'allumina presenti, solubilizzata sotto forma dei sali corrispondenti, passa in soluzione, lasciando come residuo la totalità della silice sotto forma di una spugna di idrogel a struttura microporosa, avente sufficiente solidità per non essere disgregata nè da una relativa agitazione del liquido, nè da un'azione meccanica non eccessivamente violenta.

2. Che allorquando una massa, anche considerevole, di cristalli o frammenti di cristalli di leucite, viene sommersa da una soluzione acida costantemente rinnovantesi, o riarricchentesi, e che, per quanto detto sopra, i sali di alluminio e di potassio formatisi passano in soluzione, le spugne di idrogel di silice, residue di ciascun cristallo o frammento di cristallo, conservano la loro struttura microporosa e la loro individualità, senza che il movimento della corrente liquida e la compressione, esercitata sugli strati inferiori dal peso del materiale sovrastante, provochino in alcun modo lo schiacciamento o l'agglomeramento fra loro delle suddette spugne silicee e l'otturamento dei meati esistenti fra spugna e spugna, che avrebbe per conseguenza la impermeabilizzazione della massa.

3. Che se, attraverso a cotesta massa permeabile di spugne di idrogel di silice, si fa circolare, in determinate condizioni di acidità o di concentrazione salina un liquido contenente silice allo stato di sospensione colloidale, questa silice viene rapidamente e completamente fissata dalle spugne di idrogel, ottenendosi così in definitiva la soluzione completamente limpida.

Lo scopo della presente Nota preliminare è di comunicare i primi risultati di una serie di esperienze da me iniziate per determinare le modalità del suddetto fenomeno di separazione della silice dispersa dal dispersoide.

L'apparecchio di cui mi servo in queste esperienze è costituito da un cilindro di vetro di cm. 20 di altezza e cm. 5 di diametro, aperto alla parte superiore e terminante inferiormente con un rubinetto. Nell'interno del tubo viene collocato uno strato di cm. 10 di cristalli e frammenti di cristalli di leucite, calibrati mediante preventivo setacciamento al diametro di circa 2 mm. Questo strato di cristalli di leucite è protetto superiormente ed inferiormente da due strati di perline di vetro, affinchè i cristalli stessi non possano venir disturbati meccanicamente dal liquido in circolazione.

La prima osservazione che si può fare con questo dispositivo sperimentale è che, conformemente a quanto ho avuto campo di esporre nelle pubblicazioni di indole tecnica citate dianzi, allorquando si opera l'attacco dei cristalli di leucite mediante circolazione di una soluzione acquosa calda di acido cloridrico, nitrico, o solforico, si osserva, inizialmente, un intorbidamento del liquido, che, col proseguire della circolazione, scompare completamente, avendosi in definitiva, prima ancora che sia del tutto ultimato l'attacco dei cristalli, una soluzione perfettamente limpida. Tale soluzione si mantiene limpida fino al termine dell'operazione di attacco nè si osserva un ulteriore intorbidamento qualora si continui anche prolungatamente a

far circolare la soluzione acido-salina attraverso allo strato di granuli di silice residuale dopo che l'attacco è ultimato.

Se la soluzione acido–salina così ottenuta viene ulteriormente intorbidata mediante l'aggiunta di un piccolo quantitativo di leucite allo stato di polvere impalpabile, la silice, che dall'attacco di tale polvere di leucite viene posta in sospensione, viene rapidamente eliminata mediante circolazione del liquido attraverso allo strato granuloso.

Lo stesso dicasi se la soluzione acido–salina viene intorbidata mediante l'aggiunta di una sospensione di silice colloidale ottenuta agitando un poco della soluzione stessa entro un recipiente con dei granuli di idrogel di silice provenienti da una antecedente operazione d'attacco.

Se lo strato dei granuli di idrogel di silice viene lavato prolungatamente con acqua distillata, ed attraverso ad esso viene fatto circolare un torbido stabile di silice colloidale (precedentemente preparato agitando entro un recipiente dei granuli di idrogel, del tipo suddetto, con acqua distillata, e lasciando riposare il liquido fino a stabilizzazione completa del torbido), si osserva che la facoltà fissatrice dello strato granulare nei confronti della fase dispersa è notevolmente diminuita, se non del tutto scomparsa, il che si spiega con l'assenza degli ioni necessari a scaricare gli ultramicroni della fase dispersa, la cui carica è di stesso segno (—) di quella della superficie dei granuli di idrogel nelle cui vicinanze vengono portati durante la circolazione del liquido.

Che questa sia la causa della diminuzione, o addirittura della cessazione della proprietà fissatrice dello strato granuloso, lo dimostra il fatto che basta l'aggiunta di una piccola quantità di un elettrolito alla sospensione, perchè gli ultramicroni vengano nuovamente fissati.

E che ciò non sia in questo caso dovuto soltanto ad un semplice fenomeno di floculazione della fase dispersa, la quale, aumentando le dimensioni dei corpuscoli ne determini semplicemente l'arresto meccanico per parte dello strato granulare, lo dimostra il fatto che la stessa sospensione addizionata di elettrolito, sia allo stato di immobilità che di agitazione, non presenta segni apprezzabili di floculazione, nè di tendenza a chiarificarsi per decantazione, entro periodi di tempo incomparabilmente più lunghi di quelli occorrenti per renderla limpida mediante la circolazione attraverso lo strato di granuli di idrogel di silice.

Se, dopo aver riattivato nella maniera suddetta, cioè a mezzo di un elettrolito, le facoltà fissatrici dello strato granulare di idrogel, si procede a graduali lavaggi di esso con acqua distillata, si osserva che è possibile raggiungere uno stadio per cui, pur essendo il tenore dell'acqua di lavaggio in ioni dell'elettrolito adoperato di gran lunga inferiore a quello corrispondente al punto di coagulazione, si effettua la fissazione dei corpuscoli costituenti la fase dispersa. Ciò è evidentemente dovuto al fatto che la porzione dell'elettrolito, adsorbita dai granuli di idrogel durante la precedente operazione di

riattivazione, non viene che lentamente ed a stento da essi abbandonata, nel prolungato lavaggio, il che mantiene nell'immediato intorno di ciascun granulo di idrogel una concentrazione in elettrolito sufficiente a scaricare gli ultramicroni della fase dispersa che vengono a trovarsi in quell'intorno, permettendo così il contatto di essi fra loro o colla superficie di idrogel del granulo, anch'essa scaricata.

E che questa sia effettivamente la spiegazione, lo dimostra la constatazione seguente:

raggiunta che sia la fase suddetta, in cui, pur essendo ancora lo strato di idrogel capace di fissare, sia pure lentamente, la fase dispersa, e non rivelando per contro il liquido traccie apprezzabili dell'elettrolito adoperato, se si prelevano dei granuli di idrogel dallo strato, e si spappolano, entro un recipiente, con acqua distillata, si osserva in modo netto la presenza dell'elettrolito stesso.

È evidente quindi, che, a questo punto, la scarica degli ultramicroni costituenti la fase dispersa si effettua nell'immediata vicinanza dei granuli di idrogel sotto l'azione degli ioni dell'elettrolito adsorbito.

Mi riservo di dare in ulteriori Note i risultati quantitativi di dette esperienze, ed i risultati di esperienze che ho in corso sulle proprietà fissatrici dello strato di granuli di idrogel di silice, residuali dell'attacco dei cristalli di leucite, nei confronti di sospensioni colloidali di altra natura.

Chimica. — *Nitroso–ditiocarbammati cobaltici.* Nota del Corrisp. L. Cambi e A. Gagnasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia (Fisiologia vegetale). — *Sopra un metodo per riconoscere la presenza eccezionale di mercurio nei tessuti vegetali.* Nota[1] del Corrisp. L. Petri.

L'uso di sali di mercurio nella composizione degli anticrittogamici destinati alla disinfezione esterna dei semi di alcune piante coltivate, specialmente dei cereali, ha dato l'opportunità di constatare, sia nelle esperienze di laboratorio, sia in quelle eseguite sul campo, che oltre ad un'azione anticrittogamica, simili composti ne posseggono anche una stimolante sulla attività funzionale della pianta che si manifesta con un più rapido accrescimento ed anche con una maggior produzione. Sembra ormai ammissibile, dopo le esperienze di Niethammer[2], che l'azione stimolante derivi da tracce di mercurio che la pianta può assorbire dal terreno dove si diffonde l'anticrittogamico che ricopriva la superficie del seme.

Se da un punto di vista pratico il fatto ha una certa importanza, dal punto di vista scientifico presenta un grande interesse giacchè offre l'opportunità di sperimentare l'azione stimolante del mercurio sull'attività vitale del citoplasma delle piante superiori e di ricercare l'intimo meccanismo di una tale azione.

Una prima difficoltà che si presenta in simili ricerche è quella di poter stabilire la presenza del mercurio nei diversi tessuti delle piante che derivano da semi trattati preventivamente con preparati mercuriali. L'analisi microchimica non possiede ancora dei metodi così sensibili da poter rivelare tracce di mercurio in una sezione di tessuti di pochi *micron* di spessore, a meno che non si tratti di un accumulo di questo metallo o di un suo sale in una dose relativamente elevata.

Se lo Stock[3] non avesse recentemente dimostrato la presenza di mercurio nelle piante di grano provenienti da semi trattati con composti mercuriali, non sarebbe stato forse molto facile a Niethammer dare una prova convincente di aver ritrovato il mercurio nel fusto delle piantine poste in condizione di assorbire un sale solubile di questo metallo ricorrendo al ioduro di potassio come reattivo. È ben vero che Niethammer faceva una simile ricerca in piantine crescenti in coltura liquida che conteneva il 0.001–0.0001 % di *Uspulun*[4] e quindi in condizioni di assorbire mercurio in quantità maggiore

(1) Presentata nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) Niethammer A., *Versuche zur Deutung der stimulierenden Wirkung von Uspulun Universal beim Auflaufen des Saatgutes.* « Zeitschrift f. Pflanzenkrankh. », Bd. *35*, 1929, p. 389.

(3) Stock, in « Angewandte Chemie », 1928, 41.

(4) Clorofenato di mercurio.

di quella che può essere assorbita nelle condizioni naturali, ma sempre entro limiti che rendono molto difficile rilevare con l'ioduro di potassio la presenza di mercurio nei tessuti della pianta.

Ripetuti tentativi da me fatti per ottenere risultati sicuri con un simile metodo sono sempre falliti quando ho sperimentato con piantine di grano provenienti da semi trattati con sali di mercurio e che quindi non potevano avere assorbito che debolissime tracce di questo metallo.

L'analisi capillare su carta da filtro, applicata ai succhi estratti con la pressa o con la triturazione, non mi ha dato risultati più soddisfacenti per la mancanza di una reazione colorata molto sensibile che possa esser provocata in modo specifico da sali di mercurio.

L'ioduro di potasso può svelare la presenza di questo metallo nei campi di diffusione capillare quando si tratti di succhi che contengono almeno il 0.5 °/₀₀ di un sale di mercurio, ma una tale percentuale è ancora notevolmente superiore a quella che può trovarsi nei tessuti di piantine di grano nate da semi trattati con composti mercuriali.

Il metodo che mi ha dato soddisfacenti risultati è quello basato sopra la sottrazione di tracce di mercurio dai succhi estratti dalle piantine e trattati a caldo con acido cloridrico, tenendovi immersa per alcune ore una lamina di argento, la quale subisce una leggerissima amalgazione se vi sono tracce di mercurio. Essa è poi scaldata con precauzione alla fiamma di un becco Bunsen dinanzi al tubo porta diaframma di uno spettroscopio. La linea verde (546 mμ) data dai vapori di mercurio apparisce più o meno distinta e nel caso di tracce più sensibili di mercurio è visibile anche la linea blu indaco (446 mμ). Anche più facilmente si riesce a mettere in evidenza la presenza di mercurio sulla lamina facendo agire su questa i vapori di iodio (formazione di ioduro di mercurio).

Siccome è già noto per le vecchie ricerche di Gorup Besanez[1] che in alcune piante è stato possibile trovare tracce di mercurio anche nelle condizioni naturali di vegetazione, così si deve sempre eseguire una rigorosa prova di controllo non solo sulla lamina d'argento prima della ricerca, ma anche su piante cresciute in terreno su cui non sia stato somministrato alcun preparato mercuriale.

Biologia (Morfologia). — *Osservazioni e considerazioni sulla struttura della corteccia cerebellare dei mammiferi.* Memoria del Socio A. Pensa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo delle « Memorie ».

(1) « Lieb. Ann. », Bd. CXXVII, 1864, p. 248.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi in rappresentazione conforme.* Nota di T. Boggio, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Com'è noto, il problema della rappresentazione conforme di una varietà a curvatura riemanniana costante, sopra una varietà euclidea, si risolve in base ad una relazione che intercede fra le omografie di Riemann relative alle due varietà considerate, o, ciò che equivale, ricorrendo alla relazione che lega i simboli di Riemann, di 1ª specie, delle due varietà.

L'accennata relazione fra le omografie di Riemann si può stabilire con procedimento vettoriale abbastanza semplice, che ho svolto per intero nel cap. IV, parte II, dell'opera: Burgatti, Boggio, Burali-Forti, *Geometria differenziale* (Zanichelli, Bologna, a. 1930), che nel seguito indicheremo con *Geom. differ.* Invece per stabilire la relazione fra i simboli di Riemann coi metodi ordinari, occorrono calcoli piuttosto lunghi e penosi, esposti nel cap. VIII dell'opera: Levi-Civita, *Calcolo differenziale assoluto* (Stock, Roma, a. 1925).

Ora, adoperando un po' più a fondo le iperomografie, si possono ancora semplificare i calcoli svolti nella citata *Geom. differ.*, e, ciò che più interessa, si può arrivare al risultato in modo più spontaneo e naturale; questo mi propongo di mostrare in questa breve Nota.

1. Siano V_n e V'_n due varietà ad n dimensioni, e supponiamo stabilita una trasformazione *conforme* fra la V_n e la V'_n. Chiamando Q un punto generico della V_n e Q' il suo corrispondente della V'_n, è facile vedere che, se dQ e dQ' indicano due spostamenti corrispondenti in V_n e V'_n, affinchè la rappresentazione della V_n sulla V'_n sia conforme, è necessario e sufficiente che si abbia

$$dQ' = U\lambda dQ, \tag{1}$$

ove U è una funzione numerica di Q, e λ è una *isomeria vettoriale* pure funzione di Q, che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori tangenti alla V'_n in Q' [2].

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) Dalla (1) si deduce, ricordando la (3): $dQ'^2 = U^2 dQ^2$, quindi si può ritenere $ds' = U ds$, essendo ds e ds' elementi lineari corrispondenti di V_n e V'_n; nelle trattazioni ordinarie si parte appunto dalla precedente relazione fra gli elementi d'arco (cfr. Levi-Civita, opera cit., p. 237), la quale, in sostanza, risulta dalla (1) prendendo i moduli dei

È chiaro che gli elementi U, λ non possono essere arbitrari, perchè il 2° membro della (1) deve risultare un differenziale esatto; orbene, la condizione d'integrabilità porge senz'altro, indicando con δQ un altro spostamento di Q sulla V_n:

$$\delta_v(U\lambda)\,dQ = d_v(U\lambda)\,\delta Q, \tag{2}$$

ove d_v, δ_v sono simboli di differenziali superficiali relativi alla V_n (*Geom. differ.*, p. 178). Sviluppando si ha:

$$\delta_v U\cdot\lambda dQ + U\delta_v\lambda\cdot dQ = d_v U\cdot\lambda\delta Q + U d_v\lambda\cdot\delta Q,$$

operando sui due membri (a sinistra) con $K\lambda\, U$, e ricordando che, essendo λ isomeria, si ha:

$$K\lambda\cdot\lambda = 1, \tag{3}$$

ne segue:

$$\delta_v \log U\cdot dQ + K\lambda\cdot\delta_v\lambda\cdot dQ = d_v \log U\cdot\delta Q + K\lambda\cdot d_v\lambda\cdot\delta Q;$$

ora, se $\operatorname{grad}_v \log U$ è il *gradiente superficiale* di $\log U$ (*Geom. differ.*, p. 168), si ha: $d_v \log U = \operatorname{grad}_v \log U \times dQ$, perciò si conclude, dalla precedente relazione:

$$K\lambda\cdot\delta_v\lambda\cdot dQ - K\lambda\cdot d_v\lambda\cdot\delta Q = \operatorname{grad}_v \log U \times dQ\cdot\delta Q - \operatorname{grad}_v \log U \times \delta Q\cdot dQ, \tag{2'}$$

che è la condizione che lega U e λ affinchè sussista la (1) (*Geom. differ.*, p. 208).

2. Conviene dare alla (2') una forma più semplice; ponendo:

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}_v \log U \quad , \quad \mu_2 = K\lambda\,\frac{d_v\lambda}{dQ}, \tag{4}$$

è chiaro che μ_2 è un'omografia di 2° ordine, e si ha dalla (2'):

$$\mu_2\,\delta Q\,dQ - \mu_2\,dQ\,\delta Q = \boldsymbol{u}\times dQ\cdot\delta Q - \boldsymbol{u}\times\delta Q\cdot dQ =$$
$$= (\boldsymbol{u}\times dQ\cdot\delta Q - dQ\times\delta Q\cdot\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}\times\delta Q\cdot dQ - dQ\times\delta Q\cdot\boldsymbol{u});$$

introducendo l'omografia di 3° ordine ξ_3, definita da [1]

$$\xi_3\,\boldsymbol{ab} = H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}), \tag{5}$$

due membri, e quindi si perde qualche cosa fin da principio, perchè invece di operare su vettori, cioè su enti geometrici, si opera soltanto sui loro moduli, cioè su enti numerici, il che obbliga poi a calcoli più faticosi e artificiosi.

(1) Burali-Forti et Boggio, *Espaces courbes*, etc., p. 49 (S. T. E. N., Torino, a. 1924).

ove $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sono vettori qualunque, la relazione precedente si può scrivere (*Geom. differ.*, p. 209, (*a*))

$$\mu_2 \delta Q\, dQ - \mu_2\, dQ \delta Q = \xi_3\, \boldsymbol{u}\, \delta Q\, dQ - \xi_3\, \boldsymbol{u}\, dQ \delta Q\,.$$

Ora, per un'omografia μ_2 di 2° ordine, è importante considerare l'operatore k tale che [1] $k\mu_2 \boldsymbol{ba} = \mu_2 \boldsymbol{ab}$, ed essendo $\xi_3\, \boldsymbol{u}$ pure omografia di 2° ordine potremo allora scrivere l'eguaglianza precedente nella forma semplicissima (essendo $dQ, \delta Q$ vettori arbitrari):

$$k\mu_2 - \mu_2 = k\xi_3\, \boldsymbol{u} - \xi_3\, \boldsymbol{u}; \tag{6}$$

questa equazione risulta ovviamente verificata se si assume:

$$\mu_2 = \xi_3\, \boldsymbol{u}\,, \tag{7}$$

ma è importante stabilire che *questa relazione fornisce la soluzione generale della* (6).

Infatti, ponendo

$$\mu_2' = \mu_2 - \xi_3\, \boldsymbol{u} \tag{8}$$

la (6) può scriversi:

$$k\mu_2' = \mu_2', \tag{9}$$

ora, prendendo il differenziale superficiale della (3), si ha:

$$K\lambda \cdot d_v \lambda + K d_v \lambda \cdot \lambda = 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad K\lambda \cdot d_v \lambda + K\,(K\lambda \cdot d_v \lambda) = 0,$$

che può scriversi, ricordando la (4): $\mu_2 dQ + K\,(\mu_2 dQ) = 0$, od ancora, per l'arbitrarietà di dQ:

$$K\mu_2 = -\mu_2\,. \tag{a}$$

Dalla (5) risulta poi ovviamente:

$$K\xi_3\, \boldsymbol{ab} = H\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - H\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\xi_3\, \boldsymbol{ab}\,,$$

perciò $K\xi_3\, \boldsymbol{a} = -\xi_3 \boldsymbol{a}$; di qui, dalla (*a*), e dalla (8), si conclude:

$$K\mu_2' = -\mu_2'\,. \tag{10}$$

Ciò posto, la relazione (*Geom. differ.*, p. 152):

$$KkK\mu_2' = kKk\mu_2',$$

porge senz'altro, in virtù delle (9), (10): $\mu_2' = -\mu_2'$, onde $\mu_2' = 0$, cioè $\mu_2 = \xi_3\, \boldsymbol{u}$, conforme al teorema.

(1) *Espaces courbes*, etc., p. 31; oppure *Geometria differenziale*, p. 152.

Dalle (7), (4) si deduce tosto (*Geom. differ.*, p. 208):

$$(11) \qquad d_v\lambda = \lambda\xi_3 \operatorname{grad}_v \log U \cdot dQ;$$

ponendo:

$$(12) \qquad U = 1/u \quad , \quad \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}_v u,$$

la (11) diviene:

$$(11') \qquad d_v\lambda = -\frac{\lambda}{u}\,\xi_3\,\boldsymbol{v}\,dQ.$$

3. Passiamo ora a stabilire la relazione fra le omografie di Riemann (di 3° ordine) relative alle varietà V_n e V_n'.

Indicando con $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ tali omografie, con calcoli semplici e brevissimi (*Geom. differ.*, pp. 207 e 211), che qui è inutile riportare, si perviene alla relazione:

$$(13) \quad \mathfrak{R}'\,dQ'\,\delta Q'\,d'Q' = U(\delta_v\,d_v\lambda - d_v\,\delta_v\lambda)\,d'Q + U\lambda\mathfrak{R}\,dQ\,\delta Q\,d'Q.$$

Occorre perciò calcolare il valore di $\delta_v\,d_v\lambda - d_v\,\delta_v\lambda$; si ha dalla (11'):

$$(14) \quad \delta_v\,d_v\lambda = -\left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)\xi_3\,\boldsymbol{v}\,dQ - \frac{\lambda}{u}\,\xi_3\,\delta_v\boldsymbol{v}\cdot dQ - \frac{\lambda}{u}\,\xi_3\,\boldsymbol{v}\,\delta_v\,dQ,$$

ora, si ha intanto, ricordando la (5) e formule note:

$$(b) \qquad \left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)\xi_3\,\boldsymbol{v}\,dQ = \left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)[H(\boldsymbol{v}, dQ) - H(dQ, \boldsymbol{v})] =$$

$$= H\left[\boldsymbol{v}, \left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)dQ\right] - H\left[dQ, \left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)\boldsymbol{v}\right],$$

inoltre, applicando la (11') si ha:

$$\delta_v\frac{\lambda}{u} = \frac{1}{u}\,\delta_v\lambda - \frac{\lambda}{u^2}\,\delta_v u = -\frac{\lambda}{u^2}\,\xi_3\,\boldsymbol{v}\,\delta Q - \frac{\lambda}{u^2}\,\boldsymbol{v}\times\delta Q,$$

perciò, ricordando la (5):

$$\left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)\boldsymbol{v} = -\frac{\lambda}{u^2}(\xi_3\,\boldsymbol{v}\,\delta Q\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times\delta Q\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{v^2}{u^2}\lambda\delta Q;$$

sostituendo nella (*b*) e poi nella (14) risulta:

$$\delta_v\,d_v\lambda = -H\left[\boldsymbol{v}, \left(\delta_v\frac{\lambda}{u}\right)dQ\right] - \frac{v^2}{u^2}\lambda H(dQ, \delta Q) -$$

$$- \frac{\lambda}{u}\,\xi_3\,\delta_v\boldsymbol{v}\cdot dQ - \frac{\lambda}{u}\,\xi_3\,\boldsymbol{v}\,\delta_v\,dQ.$$

Scambiando d con δ, sottraendo, ed osservando che $\delta_v dQ = d_v \delta Q$, e che, come segue dalla (2):

$$\left(\delta_v \frac{\lambda}{u}\right) dQ = \left(d_v \frac{\lambda}{u}\right) \delta Q,$$

si conclude senz'altro:

$$\delta_v d_v \lambda - d_v \delta_v \lambda = \frac{\lambda}{u^2} \{ - v^2 [H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ)] -$$

$$- u [H(\delta_v v, dQ) - H(dQ, \delta_v v) - H(d_v v, \delta Q) + H(\delta Q, d_v v)] \},$$

sostituendo nella (13), e ricordando che $U = 1/u$, si ha la formula cercata, e cioè:

$$\Re' dQ' \delta Q' d' Q' = (\lambda/u^3) \{ - v^2 [H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ)] -$$

$$- u [H(\delta_v v, dQ) - H(dQ, \delta_v v) - H(d_v v, \delta Q) + H(\delta Q, d_v v)] \} d' Q +$$

$$+ (\lambda/u) \Re dQ \delta Q d' Q,$$

che non è altro che la (26) di p. 213 della *Geom. differ.*, alla quale rimandiamo anche per le applicazioni.

Facendo il prodotto interno della precedente per un altro spostamento $\delta' Q' = (\lambda \delta' Q)/u$, poi assumendo

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial q_i} dq_i \quad , \quad \delta Q = \frac{\partial Q}{\partial q_j} dq_j \quad , \quad d' Q = \frac{\partial Q}{\partial q_h} dq_h \quad , \quad \delta' Q = \frac{\partial Q}{\partial q_k} dq_k ,$$

ove $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ sono le coordinate generali del punto Q sulla varietà V_n, e analogamente per $dQ', \delta Q', \cdots$, poi osservando che per il simbolo di Riemann a 4 indici (ij, hk) si ha (*Geom. differ.*, p. 283):

$$\Re \frac{\partial Q}{\partial q_i} \frac{\partial Q}{\partial q_j} \frac{\partial Q}{\partial q_h} \times \frac{\partial Q}{\partial q_k} = (ij, hk),$$

e che (*Geom. differ.*, pp. 279 e 287):

$$\frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_j} = a_{ij} \quad , \quad \frac{\partial_v v}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_j} = \frac{\partial_v \operatorname{grad}_v u}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_j} = u_{ij},$$

ove u_{ij} indica la derivata seconda covariante di u, si ottiene senz'altro la formula (18') di p. 242 del *Calcolo differenziale assoluto* di Levi-Civita, la quale, per tale via, risulta stabilita in modo abbastanza semplice.

Matematica. — *Relazione tra i simboli di Riemann relativi a due varietà, una immersa nell'altra.* Nota di GIACINTA ANDRUETTO, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota mi propongo di stabilire una interessante relazione fra i simboli di Riemann a quattro indici di prima specie, relativi a due varietà, l'una delle quali sia immersa nell'altra. Tale relazione esprime la differenza tra i simboli di Riemann relativi alle due varietà, mediante le derivate seconde superficiali, nel senso di Boggio, relative alle due varietà, le quali derivate seconde figurano in modo simmetrico.

Come casi particolari della formula ottenuta si ritrovano due formule, l'una dovuta al prof. Boggio e l'altra al prof. Tonolo.

La relazione in questione si stabilisce con calcoli assai semplici (qui sviluppati per intero) e fondati sulla espressione data dal prof. Boggio per i simboli di Riemann, mediante le derivate terze del punto che descrive le varietà considerate.

1. Sia V_n una varietà ad n dimensioni, immersa in uno spazio euclideo ad N dimensioni, con N sufficientemente grande. Tale varietà si può immaginare descritta da un punto Q funzione di n variabili indipendenti $q_1, q_2, \cdots, q_n$.

Sia poi W_m una varietà ad m dimensioni $(m < n)$, immersa nella V_n; essa potrà rappresentarsi esprimendo le $q_1, q_2, \cdots, q_n$ come funzioni di m altre variabili indipendenti $u_1, u_2, \cdots, u_m$; quindi il punto Q che descrive la W_m potrà riguardarsi come funzione di $u_1, u_2, \cdots, u_m$.

Indicando con $\mathfrak{R}_w$ l'omografia di Riemann relativa alla varietà W_m, è noto [2] che il simbolo di Riemann $(ij, hk)_w$, relativo alla W_m, può rappresentarsi con la formula:

$$(ij, hk)_w = (hk, ij)_w = \mathfrak{R}_w Q_h Q_k Q_i \times Q_j,$$

ove, in generale, $Q_r = \dfrac{\partial Q}{\partial u_r}$; è poi chiaro che questo vettore è tangente alla varietà W_m. D'altra parte è pure noto [3] che

$$\mathfrak{R}_w Q_h Q_k Q_i = \frac{\partial^w}{\partial u_k} \frac{\partial_w^2 Q}{\partial u_h \partial u_i} - \frac{\partial_w}{\partial u_h} \frac{\partial_w^2 Q}{\partial u_k \partial u_i},$$

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) Cfr. l'opera: BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria Differenziale*, p. 283, Zanichelli, Bologna, 1930.

(3) Cfr. op. cit., p. 187. È bene ricordare che le derivate seconde superficiali sono tra loro commutabili, (op. cit., p. 178): mentre le derivate superficiali di ordine ≥ 3 non lo sono più.

quindi si può scrivere:

$$(1) \qquad (ij\,,hk)_w = \left(\frac{\partial_w}{\partial u_k}\frac{\partial^2_w \mathrm{Q}}{\partial u_h \partial u_i} - \frac{\partial_w}{\partial u_h}\frac{\partial^2_w \mathrm{Q}}{\partial u_k \partial u_i}\right) \times \mathrm{Q}_j .$$

Ponendo ora, per brevità:

$$\frac{\partial^2_w \mathrm{Q}}{\partial u_r \partial u_s} = \mathrm{Q}^{(w)}_{rs} = \mathrm{Q}^{(w)}_{sr} ,$$

si ha:

$$(ij\,,hk)_w = \frac{\partial_w}{\partial u_k}(\mathrm{Q}^{(w)}_{ih} \times \mathrm{Q}_j) - \mathrm{Q}^{(w)}_{ih} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{jk} - \frac{\partial_w}{\partial u_h}(\mathrm{Q}^{(w)}_{ik} \times \mathrm{Q}_j) + \mathrm{Q}^{(w)}_{ik} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{hj} .$$

Se ora consideriamo la derivata seconda superficiale $\frac{\partial^2_v \mathrm{Q}}{\partial u_r \partial u_s}$, relativa alla varietà V_n, che potremo anche indicare brevemente con $\mathrm{Q}^{(v)}_{rs}$ od anche con $\mathrm{Q}^{(v)}_{sr}$, ed osserviamo che la differenza $\mathrm{Q}^{(v)}_{ih} - \mathrm{Q}^{(w)}_{ih}$ è ovviamente un vettore normale alla varietà W_m e che Q_j è tangente a tale varietà, potremo sostituire le espressioni $\mathrm{Q}^{(\alpha)}_{ih} \times \mathrm{Q}_j$, $\mathrm{Q}^{(w)}_{ik} \times \mathrm{Q}_j$ rispettivamente con $\mathrm{Q}^{(v)}_{ih} \times \mathrm{Q}_j$, e $\mathrm{Q}^{(v)}_{ik} \times \mathrm{Q}_j$; inoltre se f è una funzione numerica, è chiaro che:

$$\frac{\partial_w f}{\partial u_k} = \frac{\partial_v f}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial u_k} ,$$

quindi avremo:

$$(ij\,,hk)_w = \frac{\partial_v}{\partial u_k}(\mathrm{Q}^{(v)}_{ih} \times \mathrm{Q}_j) - \mathrm{Q}^{(w)}_{ih} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{jk} - \frac{\partial_v}{\partial u_h}(\mathrm{Q}^{(v)}_{ik} \times \mathrm{Q}_j) + \mathrm{Q}^{(w)}_{ik} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{hj} .$$

Sviluppando le derivate, risulta:

$$(ij\,,hk)_w = \frac{\partial_v}{\partial u_k}\mathrm{Q}^{(v)}_{ih} \times \mathrm{Q}_j + \mathrm{Q}^{(v)}_{ih} \times \mathrm{Q}^{(v)}_{jk} - \mathrm{Q}^{(w)}_{ih} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{jk} -$$

$$- \frac{\partial_v}{\partial u_h}\mathrm{Q}^{(v)}_{ik} \times \mathrm{Q}_j - \mathrm{Q}^{(v)}_{ik} \times \mathrm{Q}^{(v)}_{jh} + \mathrm{Q}^{(w)}_{ik} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{hj} =$$

$$= \left(\frac{\partial_v}{\partial u_k}\frac{\partial^2_v \mathrm{Q}}{\partial u_h \partial u_i} - \frac{\partial_v}{\partial u_h}\frac{\partial^2_v \mathrm{Q}}{\partial u_k \partial u_i}\right) \times \mathrm{Q}_j +$$

$$+ \mathrm{Q}^{(v)}_{ih} \times \mathrm{Q}^{(v)}_{jk} - \mathrm{Q}^{(v)}_{ik} \times \mathrm{Q}^{(v)}_{jh} - \mathrm{Q}^{(w)}_{ih} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{jk} + \mathrm{Q}^{(w)}_{ik} \times \mathrm{Q}^{(w)}_{hj} .$$

Ora, se $\mathfrak{R}_v$ è l'omografia di Riemann relativa alla varietà V_n, applicando una formula analoga alla (1) ed indicando con $(ij\,,hk)_v$ il simbolo di Riemann a quattro indici di prima specie, relativo alla varietà V_n, si avrà:

$$(2) \quad (ij\,,hk)_w = (ij\,,hk)_v + \mathrm{Q}^{(v)}_{jk} \times (\mathrm{Q}^{(v)}_{ih} - \mathrm{Q}^{(w)}_{ih}) - \mathrm{Q}^{(v)}_{jh} \times (\mathrm{Q}^{(v)}_{ik} - \mathrm{Q}^{(w)}_{ik}) .$$

Si può dare a questa relazione una forma più simmetrica, osservando che:

$$Q_{jk}^{(w)} \times (Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)}) = 0$$

ed analogamente, $Q_{jh}^{(u)} \times (Q_{ik}^{(v)} - Q_{ik}^{(u)}) = 0$, e così la precedente diviene:

$$(2') \quad (ij,hk)_w = (ij,hk)_v + (Q_{jk}^{(v)} - Q_{jk}^{(w)}) \times (Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)}) - (Q_{jh}^{(v)} - Q_{jh}^{(w)}) \times (Q_{ik}^{(v)} - Q_{ik}^{(w)}),$$

che è la formula che volevamo ottenere. Essa stabilisce una relazione tra i simboli di Riemann relativi a due varietà, una immersa nell'altra.

2. Consideriamo ora n vettori unitari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$, ed a due a due ortogonali e tangenti alla varietà V_n nel punto Q; osservando poi che se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ sono vettori qualunque tangenti alla V_n in Q, si può scrivere:

$$\boldsymbol{x} = \sum_r \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{v}_r \quad , \quad \boldsymbol{y} = \sum_s \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{v}_s ,$$

ne segue:

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \sum_r \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{v}_r \times \sum_s \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{v}_s = \sum_r \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{v}_r .$$

Perciò la formula precedente assume la forma:

$$(3) \quad (ij\,,hk)_w = (ij\,,hk)_v + \sum_{r=1}^{n} \begin{vmatrix} (Q_{jk}^{(v)} - Q_{jk}^{(w)}) \times \boldsymbol{v}_r & (Q_{jh}^{(v)} - Q_{jh}^{(w)}) \times \boldsymbol{v}_r \\ (Q_{ik}^{(v)} - Q_{ik}^{(w)}) \times \boldsymbol{v}_r & (Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)}) \times \boldsymbol{v}_r \end{vmatrix}$$

Se, in particolare, si suppone che la varietà W_m sia una ipersuperficie della V_n (cioè $m = n - 1$), è facile vedere che la formula (2) coincide colla formula (10) di pag. 240 della citata *Geometria Differenziale*, che equivale alle formule di Gauss generalizzate.

Infatti, considerando la (2), osserviamo che il vettore $Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)}$ è normale alla ipersuperficie W_{n-1} in Q e quindi se $\mathbf{N}$ è un vettore unitario normale a W_{n-1} in Q, si ha:

$$Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)} = (Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)}) \times \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = Q_{ih}^{(v)} \times \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$$

ma è chiaro che $Q_i \times \mathbf{N} = 0$, e facendo la derivata superficiale:

$$(a) \qquad \frac{\partial_v Q_i}{\partial u_h} \times \mathbf{N} = - Q_i \times \frac{\partial_v \mathbf{N}}{\partial u_h} = - Q_i \times \frac{d_v \mathbf{N}}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial u_h},$$

perciò $$Q_{ih}^{(v)} - Q_{ih}^{(w)} = - \left(Q_i \times \frac{d_v \mathbf{N}}{dQ} Q_h \right) \mathbf{N} ;$$

similmente si ha:

$$Q_{ik}^{(v)} - Q_{ik}^{(w)} = - \left(Q_i \times \frac{d_v \mathbf{N}}{dQ} Q_k \right) \mathbf{N} .$$

Sostituendo nella (2) risulta:

$$(ij\,,\,hk)_w = (ij\,,\,hk)_v - Q^{(v)}_{ik} \times \mathbf{N} \cdot Q_i \times \frac{d_v \mathbf{N}}{dQ} Q_h + Q^{(v)}_{jh} \times \mathbf{N} \cdot Q_i \times \frac{d_v \mathbf{N}}{dQ} Q_k .$$

Ponendo $\sigma = \frac{d_v \mathbf{N}}{dQ}$ si ha, ricordando la (a):

$$(ij\,,\,hk)_w = (ij\,,\,hk)_v + Q_j \times \sigma Q_k \cdot Q_i \times \sigma Q_h - Q_j \times \sigma Q_h \cdot Q_i \times \sigma Q_k$$

la quale coincide appunto colla formula (10), p. 240, della citata *Geometria Differenziale.*

3. Osserviamo per ultimo che se la V_n è euclidea, cioè è un S_n, nella formula (3) sparisce $(ij\,,\,hk)_v$ e quindi la (3) si riduce a:

$$(ij\,,\,hk)_w = \sum_{r=1}^{n} \begin{vmatrix} (Q_{jk} - Q^{(w)}_{jk}) \times \boldsymbol{v}_r & (Q_{jh} - Q^{(w)}_{jh}) \times \boldsymbol{v}_r \\ (Q_{ik} - Q^{(w)}_{ik}) \times \boldsymbol{v}_r & (Q_{ih} - Q^{(w)}_{ih}) \times \boldsymbol{v}_r \end{vmatrix}$$

dove $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ sono n vettori costanti di S_n, unitari, a due a due ortogonali. Ora si vede molto facilmente che si ha, usando la notazione delle derivate covarianti, $(Q_{jk} - Q^{(w)}_{jk}) \times \boldsymbol{v}_r = q_{r\,|\,jk}$ perciò la formula precedente risulta identica ad una formula stabilita per tutt'altra via, e meno semplice, dal prof. Tonolo nella Nota: *Una espressione dei simboli di Riemann di prima specie per le varietà immerse negli spazi euclidei,* « Bollettino dell'Unione matematica italiana », a. VII, febbraio 1928.

Matematica. — *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac.* Nota di N. Théodoresco, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

§ 1. Soit $f(z) = u + iv$ une fonction continue de la variable $z = x + iy$. La condition

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

pour tout contour fermé intérieur à un domaine donné, rend cette fonction holomorphe, ce qui exprime, en même temps le fait que les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ admettent des dérivées partielles du premier ordre continues qui satisfont au système:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

On voit, de cette façon, que le théorème de Morera devient indépendant de l'opération $f'(z)$, qui d'ailleurs n'y joue aucun rôle dans la démonstration, comme l'a montré M. D. Pompeiu [2].

Cette remarque nous permettra d'étendre dans ce qui suit, ce résultat, *aux systèmes linéaires dont les intégrales sont des fonctions harmoniques d'un nombre quelconque de variables.*

§ 2. Soient ψ_α un système de $r = 2^k$ fonctions continues, admettant des dérivées partielles continues, par rapport aux variables $x^i (i = 1, \cdots, m)$ dont elles dépendent, et γ_i un système de p matrices à r lignes et r colonnes, qui satisfont aux relations de M. Dirac,

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\,\delta_{ij}\,e$$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$; e étant la matrice unité.

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) Thèse. Faculté des Sciences de Paris 1905.
La démonstration de M. D. Pompeiu ne fait appel qu'à la condition

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

et à quelques identités fondamentales. Elle est donc susceptible d'être étendue à des cas beaucoup plus généraux.

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles:

$$F\psi = 0 \tag{1}$$

où $F = \Sigma \gamma_i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

M. Gr. C. Moisil a montré [1] comment on peut étendre aux intégrales de ce système les théorèmes de Cauchy relatifs aux fonctions holomorphes:

Soit Ω un domaine simplement connexe, Σ sa frontière constituée par une surface régulière de l'espace x^i, n la normale intérieure à Σ.

On a pour toute surface fermée σ intérieure au domaine Ω

$$\int_\sigma (n_M \gamma)\, \psi_M \, d\sigma_M + \int_\Omega F\psi \, d\omega = 0 \tag{2}$$

ce qui se réduit dans le cas qui nous intéresse à

$$\int_\sigma (n_M \gamma)\, \psi_M \, d\sigma_M = 0 \tag{3}$$

M étant le point qui décrit σ.

On en déduit:

$$\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (n_M \gamma)\, \psi_M \, d\sigma_M = \begin{cases} S_m \psi_P & \text{pour P intérieur à } \Sigma \\ 0 & \text{pour P extérieur à } \Sigma \end{cases} \tag{4}$$

S_m désignant l'aire de la sphère unité dans l'espace à m dimensions.

Tout système d'intégrales du système (1) satisfait aux relations (3) et (4).

§ 3. On peut se proposer le problème inverse c'est-à-dire de montrer que:

Si les fonctions ψ_α continues dans un domaine Ω satisfont à la condition

$$\int_\sigma (n_M \gamma)\, \psi_M \, d\sigma_M = 0$$

pour toute surface fermée σ, intérieure au domaine considéré, elles admettent des dérivées partielles du premier ordre continues et vérifient le système d'équations aux dérivées partielles:

$$F\psi = 0.$$

A cet effet, calculons l'intégrale

$$\Psi = \int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (n_M \gamma)\, \psi_M \, d\sigma_M .$$

(1) Notes aux « Comptes Rendus », t. 191, p. 984 et p. 1292.

Décrivons une sphère σ_0 de centre P et de rayon ρ telle que l'on ait pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné $|\psi_{P'} - \psi_P| < \varepsilon$ pour tout point P′ intérieur ou de la surface. Désignons par ω_0, son volume.

Soit Q un point du domaine $\Omega - \omega_0$; désignons par δ la distance PQ.

Attachons à ce point la plus grande sphère σ, limitant un domaine sphérique ω, telle que l'on ait :

$$\frac{|\psi_{Q'} - \psi_Q|}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^m} < \varepsilon \qquad \text{pour tout point } Q' \text{ intérieur.}$$

On peut, de plus, s'arranger de manière que $r < \frac{\delta}{2}$ (r étant le rayon de σ).

Cela étant, il est possible de subdiviser le domaine $\Omega - \omega_0$ en régions satisfaisant à cette condition ; en particulier on peut le diviser en *un nombre fini* de cubes, chacun complètement intérieur à la sphère σ concentrique correspondante.

Il y en a qui sont écornés par les frontières Σ ou σ_0.

Calculons

$$I = \int_{\sigma_0} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (n_M \gamma) \psi_M \, d\sigma_M .$$

Remarquons les identités suivantes valables pour toute surface σ

$$\frac{1}{S_m} \int_{\sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (n_M \gamma) \, d\sigma_M = \begin{cases} 0 & \text{pour P extérieur à } \sigma \\ e & \text{pour P intérieur à } \sigma \end{cases} .$$

Par conséquent

$$I = \int_{\sigma_0} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (n_M \gamma) (\psi_M - \psi_P) \, d\sigma_M + S_m \psi_P .$$

On a donc

$$I - S_m \psi_P | < \frac{\varepsilon}{\rho^m} \int_{\sigma_0} |(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma) \cdot (n_M \gamma)| \, d\sigma_M < \frac{\varepsilon}{\rho^{m-1}} mr\Gamma \cdot mr\Gamma \int_{\sigma_0} d\sigma_M < m^2 r^2 \Gamma^2 S_m \varepsilon$$

où Γ est une borne supérieure des modules des éléments des matrices γ_i. Soit ω_h un des cubes intérieurs de la subdivision faite, dont le centre est au point Q ($PQ = \delta$).

Remarquons que par une division convenable, on peut s'arranger pour que $MP > \delta - r_h > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$.

Le triangle MPQ fournit la relation:

$$\overline{MP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{MQ}^2 - 2\overline{PQ}\cdot\overline{MQ}\cos\alpha \quad ; \quad \alpha = (MQ, QP)$$

ou bien $\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)\left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} - 2\cos\alpha\right) = 1 + k\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}; \quad |k| < 3.$

On peut donc écrire en vertu de la formule des accroissements finis

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^m = \left(1 + k\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{\frac{m}{2}} = 1 + \frac{m}{2}\left(1 + k\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\theta\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} \qquad (0<\theta<1).$$

On a d'ailleurs l'identité suivante:

$$\frac{\vec{MP}}{\overline{MP}^m} = -\frac{\vec{PQ}}{\overline{PQ}^m} + \frac{\vec{v}}{\overline{MP}^m} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \vec{MP} + \vec{PQ}\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^m.$$

En vertu de la relation ci-dessus

$$\vec{v} = \vec{MQ} + \frac{m}{2}\left(1 + k\theta\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\vec{PQ}.$$

Cela étant, calculons

$$I_h = \int_{\sigma_h}\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(n_M\gamma)\,\psi_M\,d\sigma_M = \int_{\sigma_h}\frac{(\vec{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(n_M\gamma)\,(\psi_M - \psi_P)\,d\sigma_M$$

$$= -\int_{\sigma_h}\frac{(\vec{PQ}\cdot\gamma)}{\overline{PQ}^m}(n_M\gamma)\,(\psi_M - \psi_P)\,d\sigma_M + \int_{\sigma_h}\frac{(\vec{MQ}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(n_M\gamma)\,(\psi_M - \psi_P)\,d\sigma_M$$

$$+ \frac{m}{2}\int_{\sigma_h}\left(1 + k\theta\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\cdot\frac{(\vec{PQ}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(n_M\gamma)\,(\psi_M - \psi_P)\,d\sigma_M$$

$$= i_h + i'_h + i''_h.$$

La première de ces intégrales est nulle par hypothèse pouvant être écrite sous la forme:

$$i_h = \frac{(\vec{PQ}\cdot\gamma)}{\overline{PQ}^m}\int_{\sigma_h}(n_M\gamma)\,(\psi_M - \psi_P)\,d\sigma_M.$$

D'autre part

$$|i'_h| \leq \int_{\sigma_h} (\overrightarrow{MQ} \cdot \gamma)(n_M \gamma) \left| \frac{\psi_M - \psi_P}{\overline{MP}^m} \right| d\sigma_M < \varepsilon\, m^2 r^2 \sqrt{m}\, \Gamma^2 r_h \int_{\sigma_h} d\sigma < m^2 r^2 \Gamma^2 \sqrt{m}\, \omega_k \lambda \varepsilon$$

en désignant par λ le nombre des faces du cube dans l'espace à m dimensions.

De même

$$|i''_h| < \frac{m}{2}(1 + k\theta)^{\frac{m}{2}-1} \varepsilon \int_{\sigma_h} |\overline{MQ}| \left| \left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overline{PQ}} \gamma \right)(n_M \gamma) \right| d\sigma_M < \frac{m\lambda}{4}(1 + k\theta)^{\frac{m}{2}-1} m^2 r^2 \sqrt{m}\, \Gamma^2 \omega_h \varepsilon ;$$

donc

$$|I_h| < m^2 r^2 \sqrt{m}\, \Gamma^2 \lambda \left[(1 + k\theta)^{\frac{m}{2}-1} \frac{m}{4} + 1 \right] \omega_h \varepsilon .$$

Le même raisonnement répété pour les portions écornées, va nous donner

$$|L_k| < m^2 r^2 \sqrt{m}\, \Gamma^2 \left[(1 + k\theta)^{\frac{m}{2}-1} \frac{m}{4} + 1 \right] (\lambda \omega_k + s r_k) \varepsilon$$

s étant l'aire de la portion de Σ qui traverse le cube considéré.

En ajoutant toutes ces inégalités, on voit que :

$$|\Psi - S_m \psi_P| < m^2 r^2 \sqrt{m}\, \Gamma^2 \left[(1 + k\theta)^{\frac{m}{2}-1} \frac{m}{4} + 1 \right] [\lambda \Sigma \omega_h + RS] \varepsilon$$

où R est une limite supérieure des rayons r_h, S l'aire de Σ.

Le premier membre est une constante indépendante de ε. Lorsque le nombre des subdivisions augmente indéfiniment, $\Sigma\omega_h$ tend vers le volume du domaine $\Omega - \omega_0$. Donc le second membre de l'inégalité est le produit d'un facteur fini et borné par ε qui peut être rendu aussi petit que l'on voudra.

On a donc rigoureusement $\Psi = S_m \psi_P$, ou bien :

$$\psi_P = \frac{1}{S_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (n_M \gamma)\, \psi_M\, d\sigma_M .$$

Or, il est facile de voir que lorsqu'un système de fonctions satisfait à cette relation, les dérivées partielles du premier ordre existent et sont continues.

Par l'application de la formule (2), on déduit que

$$\int_{\omega} F\psi\, d\omega = 0$$

pour tout ω et par conséquent : $F\psi = 0$ ce qui démontre le théorème énoncé.

Matematica (Analisi matematica). — *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche.* Nota di UGO BROGGI, presentata [1] dal Corrisp. L. BERZOLARI.

La teoria delle funzioni determinanti permette sempre di ricondurre il problema della risoluzione di un'equazione algebrica a quello della determinazione delle radici reali di un'equazione algebrica, di grado non maggiore.

$a_0 \neq 0$, $a_1, \cdots, a_{n-1}$ siano costanti reali e si tratti di determinare le n radici, reali o complesse, di

$$(1) \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0 .$$

È, in un semipiano che verrà definito,

$$(2) \qquad \frac{1}{P(x)} = \int_0^x e^{-tx} \varphi(t)\, dt ,$$

dove $\varphi(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

che corrisponde alle condizioni

$$y_0 = y_0' = \cdots = y_0^{(n-2)} = 0 \quad , \quad y_0^{(n-1)} = 1 \text{ (2)}.$$

Ed è pure, ove si ponga

$$y = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + c_n \frac{t^n}{n!} + c_{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

$$c_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \sum_{r}^{k} a_q \qquad (a_n = 1 , a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0)$$

dove $\sum_{r}^{k} a_q$ rappresenta la somma di tutti i prodotti del tipo $a_{q_1} . a_{q_2} . \cdots . a_{q_k}$,

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) «Rend. Ist. Lomb.», LXIII, fasc. XI-XV, pp. 968-974.

essendo $q_1, q_2, \cdots, q_k$ numeri interi positivi uguali o disuguali aventi per somma r, e

$$\sum_r^k a_q = 0, \quad \text{se} \quad k > r \,(1),$$

$$(3) \qquad \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^n} + \frac{c_n}{x^{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+2}} + \cdots$$

La (3) converge fuori del circolo

$$x^2 - \rho^2 = 0,$$

dove ρ è il modulo massimo delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ di $P(x)$. E poichè è anche, se $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_\nu(t)$ sono polinomi in t,

$$y = p_1(t)\, e^{\alpha_1 t} + p_2(t)\, e^{\alpha_2 t} + \cdots + p_\nu(t)\, e^{\alpha_\nu t},$$

l'integrale (2) converge nel semipiano

$$R(x) > \text{massimo della parte reale delle radici di } P(x).$$

Noti i coefficienti c_n della serie (3), riesce possibile, indipendentemente dalla conoscenza delle radici di $P(x)$, di determinare, oltre il raggio di convergenza della (3), l'ascissa di convergenza di (2). Sussiste infatti il teorema di Landau secondo il quale, se λ è il limite massimo del modulo di

$$\frac{1}{u} \log \int_0^u \varphi(t)\, dt$$

l'ascissa α di convergenza di

$$\int_0^\infty e^{-tx} \varphi(t)\, dt$$

non è maggiore di λ; e se α è positiva a nulla, essa coincide con λ (2).

(1) È, qualunque sia m, se

$$(I) \qquad \begin{cases} (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)^m = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots \\ \beta_r = \sum_{k=1}^{r} \binom{m}{k} \sum_r^k \alpha_q . \end{cases}$$

Lo si vede formando la derivata *resima* rispetto a x del primo membro della (I) a mezzo della formola che dà la derivata *resima* di una funzione di funzione, di Cesàro (Cesàro, *Analisi Algebrica*, p. 496).

(2) « Sitzungsberichte der kgl. bayr. Akad. der Wissenschaften », t. 36, p. 215. È d'altronde, se $\alpha < 0$

$$\alpha = \overline{\lim} \frac{\log \left| \int_0^u \varphi(u)\, du \right|}{u}$$

Cfr. Pincherle, « Atti del IV Congr. Int. dei Mat. », Roma 1909, vol. II, p. 45.

Può evidentemente supporsi sempre, che sia $\alpha \geqq 0$. Ove ciò non accada per il polinomio $P(x)$ - ove, cioè, si possono indicare valori positivi di k, tali che

$$\int_0^\infty e^{kt} \varphi(t)\, dt$$

converga – si dovrà considerare il polinomio

$$\pi(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^n x^n = 0$$

avente le radici $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_n$. Se $\psi(x)$ è la funzione generatrice che corrisponde alla determinante $\frac{1}{\pi(x)}$

$$\int_0^\infty e^{kt} \psi(t)\, dt$$

non può convergere in corrispondenza di valore positivo alcuno di k.

Ove sia $\alpha \geqq 0$, risulta nota una radice di $P(x)$, se è $\lambda = \rho$, o due radici complesse coniugate, se $\lambda \pm i\sqrt{p^2 - \lambda^2}$ sono radici di $P(x)$.

Ove ciò non accada, basterà sostituire $\lambda + i\mu$ a x in $Px)$. L'equazione

$$P(x) = 0$$

si risolve, se

$$P(\lambda + i\mu) = M(\mu) + iN(\gamma)$$

nelle due altre

$$M(\mu) = 0 \quad , \quad N(\mu) = 0$$

dove M e N sono polinomi in μ di coefficenti reali. Esistono evidentemente valori reali di μ che le soddisfano entrambe. Siano questi $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\beta$:

$$\lambda \pm i\mu_1, \lambda \pm i\mu_2, \lambda \pm i\mu_\beta$$

sono radici di $P(x)$.

È ora evidente che, determinate una o più radici di $P(x)$ potranno in modo perfettamente analogo venir determinate le altre. Si dovrà considerare, invece del polinomio $P(x)$, l'altro

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta, \cdots, (x-c)^\gamma}$$

se $a, b, \cdots, c$ sono radici di $P(x)$ e $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ rispettivamente i loro ordini.

Matematica (Geometria). — *Studi sintetici di geometria proiettiva differenziale.* Nota di R. Calapso, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

§ 1. – La proiettività π legata al punto di una superficie.

Sia P un punto di una data superficie S; l un'asintotica della superficie, passante per P; R la rigata costituita dalle tangenti ad l; se g è la tangente in P alla linea l, il complesso lineare che ha con R cinque rette comuni coincidenti in g è (per definizione) il complesso lineare osculatore in P all'asintotica l.

Più generalmente, vogliamo considerare un complesso lineare che abbia con R solo quattro rette comuni coincidenti in g; un siffatto complesso dipende *linearmente* da un parametro. Formeremo il complesso analogo (anch'esso dipendente da un parametro) operando sull'altra asintotica passante per P. Possiamo allora *individuare* i due complessi assegnando una retta Γ per P come direttrice della congruenza lineare comune ai due complessi. Infatti, nel caso in esame, il punto P ammette lo stesso piano corrispondente in entrambi i sistemi nulli relativi ai detti complessi (che è il piano tangente alla superficie); quindi una direttrice della congruenza lineare comune ai due complessi passa per P; disponendo dei parametri che intervengono nei sistemi nulli, si può farla coincidere con un'assegnata retta Γ per P.

Indicheremo con N_1, N_2 i sistemi nulli relativi ai due complessi, così individuati, e con π la proiettività prodotto dei due sistemi nulli.

2. *La seconda direttrice della congruenza lineare comune ai due complessi è la polare di* Γ *rispetto alla quadrica di Lie.*

Infatti sia M il punto in cui Γ incontra la detta quadrica, oltre P; il piano corrispondente ad M nel sistema nullo N_1 contiene tutte le rette del complesso passanti per M. Ma la generatrice della quadrica, che passa per M ed incontra g *è del complesso* [2], quindi il piano corrispondente ad M nel

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) A fondamento delle presenti ricerche mettiamo il teorema: *il complesso lineare osculatore in* P *alla asintotica* l *contiene tutto un sistema di generatrici della quadrica di Lie* (*cioè quelle che si appoggiano alla tangente* g *in* P *ad* l). Questo teorema da me dato nella precedente Nota: *Sui sistemi nulli osculatori alle asintotiche di una data superficie* (questi «Rendiconti», 1931), sussiste anche se invece di considerare il complesso lineare osculatore propriamente detto, si considera un complesso lineare che abbia solo quattro rette comuni, con la rigata R, coincidenti in g. Infatti si vede subito che il ragionamento esposto nella Nota citata è pure applicabile al caso presente.

sistema nullo N_1 contiene la detta generatrice. Similmente, il piano corrispondente di M nel sistema nullo N_2 contiene l'altra generatrice della quadrica presente per M; ma il punto M (poichè appartiene alla direttrice Γ) ammette lo stesso piano corrispondente nei due sistemi nulli, perciò detto piano coincide col piano tangente in M alla quadrica. Ed allora, se teniamo presente che anche il piano corrispondente a P nei due sistemi nulli è il piano tangente alla quadrica in questo punto, risulta stabilita la proposizione.

3. *La proiettività π trasforma in se stessa la quadrica di Lie.*

Infatti, consideriamo il sistema nullo N_1; per la proprietà ricordata, il relativo complesso lineare contiene tutte le generatrici della quadrica di Lie che si appoggiano a g; queste sono perciò autoreciproche e quindi trasformate in se stesse da N_1. Si conclude che per effetto di N_1 la quadrica di Lie si trasforma nel suo inviluppo; similmente per N_2 ed il teorema è dimostrato.

4. *La proiettività π è un'omografia biassiale armonica, avente per assi le direttrici della congruenza lineare comune ai due complessi.*

Infatti se H è un punto di una direttrice, esso ammette lo stesso piano corrispondente nei due sistemi nulli, perciò esso è unito per π. La omografia π è dunque biassiale. Che sia armonica, si può vedere così:

Sia M un punto della quadrica di Lie e si costruisca la retta per M che appoggia agli assi; siano H, K i punti di appoggio. Poichè per la proiettività π la quadrica di Lie si trasforma in se stessa, il punto M si trasformerà, per effetto di π, nel punto M', ulteriore intersezione della retta H K con la quadrica di Lie; ma i punti H e K sono coniugati rispetto alla quadrica, quindi H, K, M, M' formano gruppo armonico.

§ 2. – Caso in cui come retta Γ si assegni la prima direttrice di Wilczynski.

5. Se come retta Γ si assegna la prima direttrice di Wilczynski, i sistemi nulli N_1, N_2 sono *i sistemi nulli osculatori alle asintotiche* e la proiettività π è il prodotto dei detti sistemi nulli.

Sussistono intanto i teoremi superiormente dimostrati; si ha ancora:

La proiettività π trasforma in se stesso il quadrangolo di Demoulin (1).

Infatti siano P_1, P_2, P_3, P_4 i vertici del quadrangolo, in guisa che la retta $P_i P_{i+1}$ appartenga alla quadrica di Lie; di più le rette P_1P_2 e P_3P_4 si appoggino alla tangente asintotica g, le rette P_1P_4 e P_2P_3 si appoggino all'altra tangente asintotica t. Il piano corrispondente a P_1 nel sistema nullo N_1 contiene la generatrice della quadrica di Lie che appoggia a g e

(1) Il quadrangolo di Demoulin è costituito da quattro punti (oltre P) in cui la quadrica di Lie tocca il suo inviluppo (Vedi Fubini e Čech, *Geometria proiettiva diff.*, Zanichelli, 1926, p. 147, tomo I).

cioè la retta P_1P_2; ma contiene anche P_1P_3 perchè questa retta appartiene alla congruenza lineare comune ai due complessi osculatori (Bompiani) [1], dunque il piano corrispondente richiesto è il piano $P_1P_2P_3$. Similmente il piano corrispondente a P_3 nel sistema nullo N_2 contiene la generatrice della quadrica di Lie che appoggia a t, cioè la retta P_3P_2; ma contiene sempre P_1P_3, che appartiene alla detta congruenza lineare, dunque il piano corrispondente richiesto è ancora $P_1P_2P_3$. Si conclude che, per la proiettività π, il punto P_1 si trasforma in P_3; similmente P_2 si trasforma in P_4 e la proposizione è stabilita.

6. È da notare che i coni quadrici passanti per le tangenti asintotiche, ed aventi ivi come piani tangenti quelli proiettanti la prima direttrice, costituiscono un fascio; il cono del fascio sega la quadrica di Lie (oltre le tangenti asintotiche) secondo una conica, il cui piano taglia la direttrice in un punto H. Intanto la posizione del punto H *individua* il cono nel fascio, e poichè H è elemento unito della proiettività π (come pure le tangenti asintotiche ed i piani proiettanti da esse la direttrice) si conclude che:

Ogni cono passante per le tangenti asintotiche, ed avente ivi come piani tangenti quelli proiettanti la direttrice, è trasformato in se stesso dalla proiettività π.

7. Il cono, del fascio considerato al numero precedente, passante per la retta PP_1 *conterrà necessariamente la retta corrispondente* PP_3; similmente, il cono del fascio passante per PP_2 conterrà anche PP_4. Così, col sussidio del quadrangolo di Demoulin vengono definiti (in modo intrinseco invariante) due coni passanti per le tangenti asintotiche, che vengono trasformati in se stessi dalla proiettività π.

8. Si vede senza difficoltà che le quadriche passanti per le asintotiche e trasformate in sè dalla proiettività considerata costituiscono *una rete* (sistema lineare di dimensione 2); dopo quanto si è visto si può affermare che la detta rete è quella individuata dalla quadrica di Lie, da uno dei coni costruiti al numero precedente e dal piano tangente contato due volte.

9. Osserviamo in ultimo che i piani PP_1P_3 e PP_2P_4 proiettano da P due rette polari reciproche rispetto alla quadrica e quindi sono coniugati rispetto alla quadrica; segando questi piani col piano tangente in P si ottengono in esso due rette c_1, c_2 coniugate rispetto alla quadrica di Lie, *che sono perciò tangenti coniugate della superficie.*

Osservazione. — Al variare di P sulla superficie, le rette c_1, c_2 inviluppano una rete (sistema di linee coniugate). Vedremo in un prossimo lavoro che essa è rappresentabile analiticamente eguagliando a zero una forma differenziale, che può sostituirsi alla terza forma fondamentale [2].

(1) Vedi nella stessa pagina del loc. cit., il bel teorema di Bompiani che lega la direttrice di Wilczynski al quadrangolo di Demoulin.

(2) Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale.* tomo I, p. 78.

§ 3. – Caso in cui come retta Γ si assegni lo spigolo di Green.

10. Per trattare questo caso ci appoggeremo a dei risultati di G. Sannia (1), di cui richiamiamo gli enunciati che qui occorrono e cioè:

a) *Se per le tangenti asintotiche si costruiscono i piani* α_1, α_2 *che hanno per retta polare rispetto al cono (del 3° ordine) di Segre la tangente canonica* t_c; *e si costruiscono i piani* β_1, β_2 *che hanno come retta polare la coniugata* t'_c, *le rette* $\Gamma_1 \equiv \alpha_1 \alpha_2$ *e* $\Gamma_3 \equiv \beta_1 \beta_2$ *stanno in un piano con lo spigolo di Green*;

b) *Parimenti le rette* $\Gamma_2 \equiv \alpha_1 \beta_2$ *e* $\Gamma_4 \equiv \alpha_2 \beta_1$ *stanno in un piano con lo spigolo di Green.*

[Nella Nota citata trovasi enunciata soltanto la parte *a*); nondimeno la parte *b*) è facilmente deducibile dall'analisi dell'Autore].

11. Ciò premesso tagliamo le rette Γ_i con la quadrica di Lie e siano A_1, A_2, A_3, A_4 le ulteriori intersezioni; i punti A_1 ed A_2 appartengono al piano α_1, che passa per una generatrice della quadrica e quindi *la retta* $A_1 A_2$ *appartiene alla quadrica*; similmente le rette $A_2 A_3$; $A_3 A_4$; $A_4 A_1$ appartengono alla quadrica. Di più lo spigolo appartiene ai piani PA_1A_3 e PA_2A_4: quindi appoggia ad A_1A_3 e ad A_2A_4. Risulta perciò il teorema:

Le quattro rette di Sannia tagliano ulteriormente la quadrica di Lie in quattro punti, vertici di un quadrangolo di cui quattro lati appartengono alla quadrica; conducendo per P *la retta che appoggia ai rimanenti lati si ottiene lo spigolo di Green.*

12. Assegnando come direttrice Γ della congruenza lineare comune ai due complessi (vedi n. 1) lo spigolo di Green, i relativi sistemi nulli N_1, N_2 dànno luogo ad una proiettività π, e sussistono teoremi analoghi a quelli del paragrafo precedente, in cui il quadrangolo A_1, A_2, A_3, A_4 si comporta come quello di Demoulin.

Nel caso presente la rete delle quadriche passanti per le asintotiche e che si trasformano in se stesse con l'attuale proiettività π è individuata dalla quadrica di Lie, dal cono K_2 di Sannia (vedi nota citata) e dal piano tangente contato due volte.

Le rette analoghe alle c_1 e c_2 del n. 9 sono qui *la tangente di Čech e la sua coniugata.*

13. È da osservare che l'analogia tra il quadrangolo dedotto dagli elementi di Sannia ed il quadrangolo di Demoulin sussiste soltanto dal punto di vista della configurazione: vedremo che dal punto di vista analitico i due casi sono essenzialmente diversi.

(1) *Nuovi enti proiettivi nella stella che ha per centro un punto di una superficie* (« Rend. R. Accad. Lincei », vol. IX, serie 6ª, 1° sem., fasc. 12, 1929).

Matematica. — *Sull'integrazione delle equazioni lineari alle differenze con coefficienti costanti.* Nota di U. Broggi, pres. dal Corrisp. L. Berzolari.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Propagazione delle vibrazioni trasversali in una corda finita con resistenza del mezzo.* Nota di R. Serini, presentata [1] dal Corrisp. G. Giorgi.

L'equazione delle vibrazioni trasversali in una corda quando ci sia resistenza del mezzo si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{1}$$

essendo $b > 0$.

Il problema che mi propongo di risolvere è il seguente. Si ha una corda finita di lunghezza l, il cui estremo $x = l$ è fisso, mentre l'altro estremo $x = 0$ si muove trasversalmente alla corda di moto determinato e precisamente

$$u(0, t) = f(t), \quad \text{essendo} \quad f(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0,$$

$$u(l, t) = 0 \quad \text{per qualunque } t,$$

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$$

Ottengo la soluzione col metodo degli operatori $f(\Delta)$ essendo $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$ [2].

La (1) si può scrivere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}(\Delta^2 + 2b\Delta)u,$$

da cui integrando come se Δ fosse una costante

$$u(x, t) = e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 + 2b\Delta}} \cdot C_1(t) + e^{\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 + 2b\Delta}} \cdot C_2(t).$$

Ricordo ora il teorema di trasposizione [3]

$$f(\Delta + \rho) = e^{-\rho t} f(\Delta) e^{\rho t}:$$

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(2) Vedi G. Giorgi, *Lezioni di Fisica Matematica*, Cagliari, 1926-1927; ed anche G. Giorgi, *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, « Rendiconti di Palermo », 1928, pp. 265–302.

(3) G. Giorgi, *Lezioni* citate, p. 227.

di qui osservando che

$$\Delta^2 + 2b\Delta = (\Delta + b)^2 - b^2,$$

ottengo per $u(x,t)$ l'espressione

$$u(x,t) = e^{-bt} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \cdot e^{bt} C_1(t) + e^{-bt} e^{\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \cdot e^{bt} C_2(t).$$

Imponiamo ora le condizioni che per $x = 0$, $u = f(t)$ e per $x = l$, $u = 0$; dovrà essere

$$C_1(t) + C_2(t) = f(t),$$

$$e^{-\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \cdot e^{bt} C_1(t) + e^{\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \cdot e^{bt} C_2(t) = 0,$$

da cui ricaviamo

$$e^{bt} C_1(t) = \frac{e^{\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}}{e^{\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} - e^{-\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} \cdot e^{bt} f(t),$$

$$e^{bt} C_2(t) = \frac{-e^{-\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}}{e^{\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} - e^{-\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} \cdot e^{bt} f(t),$$

e quindi

$$(2) \qquad u(x,t) = e^{-bt} \frac{e^{\frac{l-x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} - e^{-\frac{l-x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}}{e^{\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} - e^{-\frac{l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} e^{bt} f(t).$$

Si verifica facilmente che la $u(x,t)$ definita dalla (2) soddisfa alle condizioni poste per $x = 0$, $x = l$. Ma per di più se dell'operatore che compare in essa si considera la valutazione fondamentale, che rispetta la regola di successione, si ha inoltre che, siccome $f(t) = 0$ per $t < 0$, $u(x,0) = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$. La (2) si può anche scrivere

$$(2') \qquad u(x,t) = e^{-bt} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \frac{1 - e^{-2\frac{l-x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} e^{bt} f(t),$$

e sotto questa forma si presta meglio alla valutazione.

Ricordo ora che (colla valutazione fondamentale) [1]

$$(3) \qquad e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} F(t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{bx}{a} \int_{\frac{x}{a}}^{\infty} \frac{I_1\left(b\sqrt{\theta^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{\theta^2 - \frac{x^2}{a^2}}} F(t - \theta)\, d\theta,$$

(1) Vedi G. Giorgi, *Lezioni* citate, p. 286; oppure «Rend. di Palermo», p. 285 formola (28).

(nel nostro caso $F(t) = e^{bt} f(t)$ ed è $F(t) = 0$ per $t < 0$) e che inoltre

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} = 1 + e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} + e^{-\frac{4l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} + \cdots$$

Per valutare l'operatore (2') cominciamo col supporre $t < \frac{l}{a}$: allora

$$e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} F(t) = F\left(t - \frac{2l}{a}\right) + b\frac{2l}{a}\int_{\frac{2l}{a}}^{\infty} \frac{I_1\left(b\sqrt{\theta^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{\theta^2 - \frac{x^2}{a^2}}} F(t - \theta) = 0$$

perchè $F\left(t - \frac{2l}{a}\right) = 0$ essendo $t < \frac{2l}{a}$ e $F(t - \theta) = 0$, perchè $\theta \geq \frac{2l}{a} > t$.

Ne viene che a maggior ragione i termini successivi dello sviluppo di $\frac{1}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - a^2}}}$ danno contributo nullo, dimodochè si può porre

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} = 1.$$

Per la stessa ragione $e^{-2\frac{l-x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} F(t) = 0$, perchè essendo $t < \frac{l}{a}$, $x < l$, $2\frac{l-x}{a} > t$: ne viene per $t < \frac{l}{a}$

$$(2'') \qquad u(x, t) = e^{-bt} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} e^{bt} f(t),$$

il che è fisicamente naturale perchè fino a quando la vibrazione non si è propagata fino ad l la corda si comporta come infinita e la (2'') è l'espressione della $u(x, t)$ corrispondente ad una corda seminfinita. All'istante $t_1 = \frac{l_1}{a} < \frac{l}{a}$ sono fermi tutti i punti per cui $x > l_1$; la fronte dell'onda si propaga con velocità a.

Supponiamo ora $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$: si avrà sempre $\frac{1}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} = 1$ e quindi

$$(2^{III}) \qquad u(x, t) = e^{-bt} \cdot \left(e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} - e^{-\frac{2l-x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}\right) e^{bt} f(t),$$

e i due operatori andranno calcolati in base alla (3).

Si può della (2^{III}) dare una interpretazione geometrica molto semplice. Consideriamo la corda seminfinita: all'istante t_0, tale che $\frac{l}{a} < t_0 < \frac{2l}{a}$, la vibrazione si sarà propagata fino al punto at_0 compreso tra l e $2l$: immaginiamo tracciato il diagramma corrispondente alla corda seminfinita. Allora, giusta la (2^{III}), per avere il diagramma per la corda finita, cioè $u(x, t_0)$, basta prendere la parte del diagramma primitivo che sta nel tratto $l, 2l$, farne il simmetrico rispetto al punto l, indi sommarlo colla parte primitiva tra 0 e l: appare così evidente che il punto l resta fermo: tutto accade come se l'onda tra l e $2l$ si riflettesse col segno cambiato.

Supponiamo $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$: allora col solito ragionamento

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}} = 1 + e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}}$$

e dalla $(2')$

$$(2^{IV}) \quad u(x, t) = e^{-bt} \cdot \left(e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} - e^{-\frac{2l - x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} + e^{-\frac{2l + x}{a}\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \right) e^{bt} f(t).$$

Quale ne è l'interpretazione geometrica? Consideriamo la corda seminfinita: all'istante t_1 tale che $\frac{2l}{a} < t_1 < \frac{3l}{a}$ la vibrazione si sarà propagata fino al punto at_1 compreso tra $2l$ e $3l$, e potremo tracciare il diagramma che rappresenta la forma della corda. Prendiamo la parte al diagramma tra l e $2l$ e riflettiamola rispetto al punto l, indi la parte del diagramma tra $2l$ e $3l$ e facciamole subire la traslazione $-2l$: otteniamo così nel tratto $0, l$ tre diagrammi: sommandoli si ha $u(x, t_1)$ per la corda finita. È evidente come si debba proseguire.

Il problema ora risolto comprende come caso particolare (per $b = 0$) quello della corda finita senza resistenza del mezzo [1] e dalla soluzione qui data si deduce quella: come la costruzione qui indicata è applicabile anche a quel caso più semplice: il lettore può facilmente vedere quale sarebbe (per $b = 0$) il moto della corda quando $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, come accade nella esperienza di Melde eccitando la corda con un diapason.

(1) R. Serini, *Teorie dell'esperienza di Melde*, questi «Rendiconti», serie 6ª, vol. XIII (1° sem., 1931) p. 62.

Astronomia. — *Un metodo diretto per determinare la* λ *eff. interferometrica.* Nota di M. Maggini, presentata [1] dal Socio E. Bianchi.

È noto che se si proiettano sulla fenditura di uno spettroscopio le frange in luce bianca date da un dispositivo interferenziale, quando la fenditura sia disposta normalmente alle frange, si ottiene uno spettro solcato in tutta la sua lunghezza da strie o frange oscure e luminose che vanno slargandosi a ventaglio passando dall'estremo violetto all'estremo rosso; semplici considerazioni d'ottica geometrica permettono di dedurre l'equazione di queste frange longitudinali.

Lo stesso si ottiene disponendo la fenditura di uno spettroscopio nel piano focale di un canocchiale munito d'interferometro, in modo che essa fenditura sia orientata secondo la congiungente le due aperture interferometriche: lo spettro di un astro risulta solcato da frange longitudinali. Per vedere queste frange, sullo spettro quasi lineare di un astro, occorre un ingrandimento assai forte, con scapito della luminosità, ma si può dilatare lo spettro nel senso della larghezza per mezzo di una lente cilindrica o adoperare addirittura la disposizione spettroscopica a visione diretta ideata dal P. Secchi [2].

Puntiamo ora l'interferometro così munito di spettroscopio su di un astro che presenti un disco o su di una stella doppia e variamo con alquanta lentezza la separazione delle aperture interferometriche fino ad ottenere la scomparsa delle frange: sullo spettro dell'astro le frange longitudinali non scompaiono per tutta la loro lunghezza, ma in una regione o banda più o meno larga, e tale banda si sposta dal violetto verso il rosso man mano che si aumenta la separazione delle aperture. Ciò risulta ricordando che, per uno stesso disco o per una stessa doppia, deve rispettivamente mantenersi costante il rapporto λ/d o $\lambda/2\,d$.

In particolare per una doppia, se l'interferometro è del modello rotante, dovrà mantenersi costante, per ogni valore di λ, il rapporto $\lambda/2\,d\cos\varphi$, essendo φ l'angolo che la congiungente i punti di mezzo delle aperture fa con la congiungente le componenti della doppia al momento della scomparsa delle frange. Una volta stabilita una distanza d fra le aperture interferometriche, si hanno dunque quattro momenti della rotazione nei quali la

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.
(2) A. Secchi, *Le stelle*. Milano 1877, p. 82.

banda di minima visibilità si sposta sullo spettro, per piccole variazioni dell'angolo φ, secondo la solita relazione:

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{\lambda_I} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_I}$$

Quindi se con λ s'intende la λ eff. della doppia corrispondente alla misura senza spettroscopio, e con $\lambda_I, \lambda'_I, \lambda''_I \cdots$ le varie regioni di spettro in cui spariscono le frange longitudinali ruotando lentamente l'interferometro, la (1) fornisce:

$$(2) \qquad \lambda = \lambda_I \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_I} = \lambda'_I \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'_I} = \lambda''_I \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi''_I} = \cdots$$

Questa combinazione dello spettroscopio e dell'interferometro permette di determinare direttamente la λ eff. della luce di un astro con un metodo che ricorda quello che adoperasi in pirometria per la misura della λ eff. degli schermi colorati [1]. Puntato l'interferometro su di un astro, disco o stella doppia, e raggiunta la scomparsa delle frange, si lascia invariato lo strumento e si proietta l'immagine dell'astro sulla fenditura dello spettroscopio; si cerca quindi per quale lunghezza d'onda scompariscono sullo spettro le frange longitudinali: tale lunghezza d'onda è la λ eff. interferometrica corrispondente all'astro. Infatti, per definizione, la λ eff. « interferometrica » della luce emessa da una sorgente luminosa è quel particolare valore della lunghezza d'onda « monocromatica » che sostituito alla luce complessiva per la quale l'interferometro mostra un dato aspetto delle frange, riproduce questo medesimo aspetto quando si lasci invariato lo strumento [2].

Per l'attuazione pratica della misura bisogna tener presente che dal tipo spettrale B al tipo M la λ eff. visuale di un astro varia entro limiti assai più ristretti di quelli entro cui varia la λ eff. fotografica; la differenza fra la λ eff. visuale corrispondente ai tipi spettrali estremi non supera i 30 $\mu\mu$. La lunghezza d'onda media della zona di spettro in cui scompariscono le frange longitudinali si determina meglio munendo l'oculare dello spettroscopio, anzichè del reticolo, di una piccola finestra rettangolare; facendo scorrere lo spettro davanti la finestra e stimando volta a volta la visibilità delle frange longitudinali, si può individuare a meno di 2 o 3 $\mu\mu$ la regione del minimo o della scomparsa totale delle frange.

(1) « Revue d'Optique théorique et instrum. », 7e année (1928) p. 196; 8e année (1929) p. 49.

(2) « Astroph. Journ. », vol. LIX (1924) ed in questi « Rendiconti », vol. VII, s. 6ª 1° sem., fasc. 1° 1928.

I metodi di misura usati da noi a Collurania, consistenti nell'interposizione di schermi colorati fra l'interferometro e l'occhio, trovano un più preciso e rapido uso nella combinazione dell'interferometro con lo spettroscopio; quando si scelga una dispersione appropriata alla larghezza delle aperture interferometriche e si tenga la fenditura dello spettroscopio assai larga – giacchè, come è evidente, non interessano le righe – la perdita di luce nella combinazione non supera quella prodotta dagli schermi colorati.

In particolare il metodo per stelle doppie [1] ha presentato per noi notevole interesse. Per ciascun valore della distanza d fra le aperture interferometriche, la formula (2) ne fornisce tanti del rapporto $\cos\varphi_1/\cos\varphi$ quante sono le regioni λ_1 di spettro scelte per osservare la scomparsa delle frange longitudinali; prese quindi per ascisse le λ_1 e per ordinate i rapporti $\cos\varphi_1/\cos\varphi$ è facile tracciare la retta che perequa le misure, come può aversi dalle (2): su questo grafico, l'ascissa che corrisponde all'ordinata 1 dà, evidentemente, il valore della λ eff. Siccome, come si è mostrato altra volta, le distanze d si possono far variare per un intervallo notevole, si vede come con questo metodo si ottengano numerosi valori capaci di dare col loro medio la λ eff. entro qualche $\mu\mu$; e poichè con la lamina di quarzo tutte le stelle possono trasformarsi in doppie, si vede anche come il metodo possa applicarsi a tutte le stelle, rendendo così possibile lo studio dell'assorbimento selettivo atmosferico (da noi accennato in una Nota precedente) per regioni di spettro più nùmerose e meglio definite di quanto potesse ottenersi coi filtri.

Le osservazioni eseguite con questo metodo a Collurania si siferiscono a sistemi lucidi aventi separazioni da 1″ a 2″ ed a stelle di prima grandezza rese doppie da lamine di quarzo. Tale limitazione in distanza e splendore è stata imposta dalla piccola apertura (m. 0.118) del rifrattore cui al momento attuale è applicato l'interferometro; lo spettroscopio è un Browning a cinque prismi, di cui si è diminuita la dispersione sopprimendo due prismi, e può avvitarsi sull'interferometro al posto del micrometro; quantunque l'immagine interferometrica sia abbastanza estesa, si è creduto opportuno dilatarla con una lente cilindrica.

Riporto qui sotto le misure eseguite la sera del 26 novembre 1930 sulle due stelle α *Orionis* (Sp. Ma) e β *Orionis* (Sp. B 8 p); la lamina di quarzo impiegata dà, nel rifrattore di m. 0,118, una separazione di 1″.31 in $\lambda_1 = 500\ \mu\mu$. Una serie di misure in ciascun valore di λ_1 che trovasi nella prima colonna della tabella consisteva nella doppia rotazione dell'interferometro per ciascuna delle rivoluzioni della tamburella azionante il cono separatore, da 5^R a 36^R; si ottennero così, per ciascuna λ_1, trentadue valori del rapporto $\cos\varphi_1/\cos\varphi$, il cui medio trovasi nella seconda colonna; per mezzo della riduzione grafica sono state quindi ottenute le λ eff. delle due

(1) Cfr. questi «Rendiconti», vol. VIII, s. 6ª, 2° sem., fasc. 9, 1928.

stelle. A queste λ eff. dovrà applicarsi una correzione dipendente dalla distanza zenitale.

α Orionis (Ma)		*β Orionis (B 8 p)*	
λ_I μμ	$\cos \varphi_I / \cos \varphi$	λ_I μμ	$\cos \varphi_I / \cos \varphi$
650	1.140	640	1.177
570	1.007	590	1.075
550	0.960	545	1.003
510	0.875	500	0.916
465	0.820	475	0.862
430	0.752	430	0.775
410	0.710	400	0.713
λ eff = 570 μμ		λ eff = 547 μμ	

Fisica. — *Sulla tecnica degli spettrografi magnetici per elettroni lenti.* Nota di G. Bernardini, presentata [1] dal Socio A. Garbasso.

Per certe ricerche iniziate sulla diffusione degli elettroni lenti sulle superfici metalliche mi è stato necessario studiare in modo particolare il comportamento dei così detti spettrografi magnetici poichè nell'uso di questi, per elettroni al disotto dei 50 volt, si presentano spesso dei fenomeni di oscura interpretazione che possono falsare quelli direttamente ricercati o perlomeno renderne difficile la rivelazione.

Ho quindi cercato di eliminare il più possibile, con una serie di tentativi, queste perturbazioni e contemporaneamente di conoscere, per quanto mi era necessario, il comportamento delle lastre [2] che dovevano servirmi per le suddette ricerche.

Poichè la rivelazione fotografica degli elettroni è spesso un utile se non necessario complemento di quella ottenuta con metodi elettrici, possono forse avere un certo interesse alcune notizie di tecnica raccolte in questa Nota.

1. Lo spettrografo è analogo a quello già usato in una ricerca eseguita da B. Rossi e da me [3] salvo una più accurata compensazione del campo magnetico realizzata con delle bobine di Helmolz e un diverso dispositivo di commutazione.

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.
(2) Lastre Cappelli al bromuro bleu ultrasensibili.
(3) Questi «Rendiconti», vol. X, serie 6ª, p. 182.

Gli elettroni emessi da una spirale di tungsteno toriato [1] situata lungo l'asse di una placca cilindrica, accelerati da questa, attraversano una sola fenditura (20 × 0.2 mm.) e sotto l'azione flettente di un campo magnetico uniforme cadono, focheggiandosi, su una lastra situata nello stesso piano della spirale dopo aver percorso una semicirconferenza il cui diametro varia da 6 a 8 cm.

L'azione perturbatrice della corrente di accensione è stata eliminata mediante un commutatore elettromagnetico che esclude periodicamente, per corto circuito, la corrente dalla spirale stabilendo contemporaneamente la tensione. Tale sistema di interruzione è stato adottato per evitare delle scintille nel circuito del filamento.

2. Una delle maggiori difficoltà che s'incontrano nell'uso degli spettrografi magnetici è determinata dalla scarsa definizione delle immagini. Questa può essere difettosa per una serie di cause fra le quali essenzialmente un cattivo focheggiamento.

Superata la difficoltà di ottenere una buona focheggiatura, la quale può essere controllata impiegando degli elettroni discretamente veloci (100 – 150 volt) dato che il focheggiamento ha un carattere puramente geometrico, si deve aver cura di usare una fenditura realmente buona a bordi molto taglienti specialmente se, come nel mio caso, si fa uso di una sola fenditura. La fotografia I mostra, p. es., una delle lastre ottenute con una fenditura a bordi molto spessi con elettroni di 50 volt. La lastra, come molte altre di quelle qui riprodotte, era stata oliata a metà onde poter studiare contemporaneamente le lastre non sensibilizzate e quelle sensibilizzate in diretto confronto.

Spesso poi la mancanza di una perfetta definizione delle righe è dovuta a una posa troppo prolungata. Oltre al consueto effetto di sopraesposizione si rivela allora anche la presenza di un corteggio di elettroni che hanno subìto delle piccole perdite di velocità ($1 - \frac{1}{2}$ volt) e che allargano considerevolmente la riga dalla parte delle basse velocità. Quest'effetto è messo in evidenza dalle fotografie II e III (positiva ingrandita 3 volte) rispettivamente ottenute con elettroni di 50 e di 40 volt, con pose variate fra un minuto e 10 secondi. Quando poi si lavori con una sola fenditura e non con due o più successive (che permettono ovviamente una maggiore definizione ma che sono causa di complicazioni pratiche notevoli, che richiedono intensità di correnti molto più forti, e non si prestano per dare degli spettri estesi) una ulteriore causa di scarsa definizione può essere l'estensione della sorgente. Per es. la lastra IV mostra la scissione di una riga dovuta a due sorgenti disposte lungo l'asse della placca.

(1) Cortesemente fornito dalla Ditta Zenith di Monza.

È quindi opportuno in queste condizioni l'uso di una sorgente pressochè puntiforme, che è stata realizzata avvolgendo una spirale di tungsteno su due cilindretti di rame affacciati e disposti lungo l'asse della placca. In questo modo solo la parte centrale della spirale emette elettroni mentre le parti in contatto col metallo rimangono fredde e agendo come molle impediscono che la spirale si fletta e conseguentemente sfochi le immagini.

3. Riguardo alle lastre ho potuto verificare esattamente l'esistenza di quella specie di soglia di sensibilità già osservata precedentemente [1] per elettroni di 45 volt; però contrariamente a quanto si era allora creduto, questa soglia non segna un limite per la velocità degli elettroni al disotto del quale questi sono assolutamente incapaci di impressionare la gelatina sensibile, dato che anche per elettroni di gran lunga più lenti le lastre manifestano una debole sensibilità residua. La fotografia V mostra le righe ottenute con lastra non oliata per elettroni da 45 a 30 volt con pose di 10′ e una corrente totale di 5×10^{-8} ampère. La cosa può sembrare naturale se si pensa che l'energia posseduta da elettroni di velocità molto più bassa è assai più grande di quella necessaria per decomporre una molecola di bromuro.

Questa soglia è analoga a quella che presentano le lastre oliate per 17 volt, soglia che si crede dipendere dall'improvviso cessare della fluorescenza dell'olio.

Non è improbabile che gli elettroni abbiano un'efficace azione attivante solo per tramite della fluorescenza ch'essi eccitano ora nell'olio, ora nella gelatina e che solo la sensibilità residua, rivelata anche al disotto delle due soglie, sia dovuta a un'azione diretta. Per es. la fotografia VI che è stata ottenuta con una lastra a metà oliata mostra la riga (*a*) ottenuta con elettroni di 25 volt, con una posa di 3′ e una corrente di circa 5×10^{-8} ampère per cm^2 e accanto a questa la riga (*b*) ottenuta con elettroni di volt 12.7 con una posa di 1^h e 30′ e una corrente di 2×10^{-8} ampère.

Come si vede anche per elettroni così lenti la lastra si è impressionata, e si è impressionata anche dove non era oliata (pur presentando una sensibilità un po' più grande nella parte oliata).

Sull'azione sensibilizzante dell'olio resta da dire che questa è, fino alla soglia di 17 volt, veramente enorme. Lo mostrano le fotografie VII e VIII (positiva ingrandita) ottenute con lastre a metà oliate rispettivamente con elettroni di 45 e 50 volt con una corrente incidente sulla lastra di $1{,}5 \times 10^{-8}$ ampère. La prima con pose di 30 - 15 - 5 - 3 - 1.5 secondi; la seconda con pose di 1′ e 2″.

Questa sensibilizzazione dipende dallo spessore dello strato di olio e può far raggiungere per uno strato sufficientemente spesso, una sensibilità circa cento volte maggiore di quella della lastra non oliata.

(1) B. Rossi e G. Bernardini, loc. cit.

A mio avviso però, quando sia possibile, ossia con elettroni da 45 volt in su, è conveniente utilizzare delle lastre non oliate perchè l'oliatura, che non è mai perfettamente uniforme, può guastare l'immagine. La fotografia IX ottenuta con elettroni di 45 e 50 volt permette un confronto in questo senso.

4. Avanti di iniziare la serie di fotografie, fu eseguita una serie di misure elettriche per determinare il rapporto fra la corrente di placca e quella incidente sulla lastra per i vari voltaggi. A questo scopo al posto della lastra fu situato un apposito pozzetto di Faraday.

Queste misure permisero contemporaneamente di determinare con esattezza quali fossero i valori che dovevano assumere sia l'intensità della corrente inviata nelle bobine di compensazione del campo magnetico terrestre, sia di quella che dava origine al campo magnetico flettente, affinchè le immagini venissero a collocarsi simmetricamente nel centro della lastra.

Queste misure furono particolarmente necessarie per elettroni al disotto di 16 volt.

Le lastre furono oliate il più delle volte con una soluzione di olio minerale in acetone onde ottenere uno strato sensibilizzante sottile e omogeneo, e avendo constatato come l'olio arrestasse in modo notevole lo sviluppo esse furono sempre lavate in acetone prima di essere sviluppate.

Fisica (Fisica teorica). — *Intorno alla «teoria unitaria» della gravitazione e dell'elettricità. – I. Base fisico–geometrica per una conseguente deduzione delle equazioni di campo.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata [1] dal Socio T. LEVI–CIVITA.

Intendo come *problema unitario* la ricerca di una sintesi nella struttura geometrica del continuo *spazio–tempo*, del **completo** svolgimento di **tutti** i fenomeni fisici macroscopici; sintesi che potrà esser analoga, ma sarà evidentemente più ampia di quella che, per quanto riguarda lo svolgimento del solo aspetto gravitazionale dei fenomeni stessi, Einstein aveva raggiunta nel 1916 colla sua classica *teoria relativista della gravitazione*.

In cotesto ordine di idee Einstein formulò, in differenti modi, varie nuove teorie, finchè giunse nell'ultima esposizione [2] a un sistema di equazioni veramente avvincente dal punto di vista matematico, ma che, dal punto di vista fisico, lascia molto perplessi. Lo stesso autore dichiara di non potersi ancora pronunziare su tale punto.

Le teorie unitarie di Einstein, dal 1928 in poi sono tutte essenzialmente fondate sulla nozione di *parallelismo assoluto*.

(1) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

(2) A. EINSTEIN, *Auf die Riemann-Metrik und den Fernparallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie*, «Mathem. Annalen», *102* (1929).

Occorre tenere presente che il fatto di imporre allo *spazio–tempo* un *parallelismo assoluto* significa togliere ad esso ogni curvatura; così che lo sfondo della fisica dovrebbe essere un continuo, eventualmente *distorto, ma punto curvo*; proprio l'inverso del continuo della teoria einsteiniana della gravitazione notoriamente *curvo, ma mai distorto*.

Volendo rendermi conto dell'opportunità di una tale innovazione, veramente rivoluzionaria, ho studiato a fondo la questione ed ho trovato che si può soddisfare a tutte le esigenze del problema unitario, come è stato sempre concepito dal 1918 in poi, senza così radicali innovazioni, utilizzando del nuovo criterio einsteiniano solamente l'idea di ricorrere alla considerazione di una *torsione nello spazio–tempo*, senza per altro arrivare fino ad imporgli il *parallelismo assoluto* e conseguentemente togliergli ogni curvatura.

In questa prima Nota discuto la base fisico-geometrica della questione e pongo i criteri per la deduzione delle equazioni di campo, deduzione che, per ragione di spazio, rimando ad una prossima Nota.

Richiami sulla genesi del problema unitario.

1. – È noto il concetto che condusse Einstein alla sua teoria relativista della gravitazione. Lo *spazio-tempo* della relatività ristretta, il noto continuo pseudo-euclideo di Minkowski, poteva esser opportunamente generalizzato e divenir uno sfondo fisico capace: 1°) del principio della covarianza generale delle leggi in rapporto al sistema di riferimento, e 2°) della sintesi geometrica del fenomeno fisico della gravitazione.

Ma cotesta generalizzazione, come è noto, fu prevalentemente considerata solo in rapporto alla metrica.

Dell'opportunità di generalizzare, o non, il rimanente che era annesso alla nozione del continuo pseudo–euclideo, e in particolare di ciò che diveniva la nozione del suo parallelismo, non ci si curò affatto. E così all'atto pratico si finì di considerare lo sfondo della fisica come un *puro spazio riemanniano*.

2. – Circa nello stesso tempo, con scopi prevalentemente geometrici, veniva introdotta da Levi–Civita, generalizzata da Cartan e Weyl e rapidamente studiata a fondo da molti geometri la nozione di *parallelismo assoluto*.

Sulle teorie relativiste essa però non ebbe sensibili ripercussioni, se si eccettua quella notevole, ma assai indiretta, fondata su una acuta osservazione di Weyl, per la quale risultava la possibilità di aggiungere, nello *spazio–tempo* alla consueta forma *differenziale quadratica* del suo ds^2, una nuova forma *differenziale lineare* $dl = -l\,\psi_i\,dx^i$, che come è noto esprime la variazione della lunghezza di un vettore per un suo trasporto ciclico infinitesimo per parallelismo.

3. – Ed è appunto sul fatto che tale forma, per ragioni geometriche, deve sempre equivalere alla forma $dl = -l\left(\psi_i - \frac{\partial \log \lambda}{\partial x^i}\right) dx^i$ (la cui analogia con note formule della teoria del potenziale è evidente), che Weyl fondò il primo tentativo di risolvere il problema unitario, conservando l'interpretazione einsteiniana della gravitazione, ma interpretando inoltre coteste ψ_i come le componenti del potenziale elettromagnetico. Ma cotesta teoria di Weyl, pur essendo per varie ragioni notevole, non risultò accettabile dal lato fisico, così che la questione del problema unitario rimase da allora sempre aperta.

Neppure il tentativo, anch'esso sotto certi aspetti assai pregevole, fatto poco dopo da Eddington, non riuscì a miglior conclusione.

E così, sorvolando su altri tentativi fondati su artificiosi allargamenti dello sfondo, giungiamo alla ricordata concezione di fondar la sintesi unitaria sulla *metrica* e sul *parallelismo* nello *spazio–tempo*, origine di questo studio.

Richiami geometrici.

4. – Gli studi di Cartan e dei suoi seguaci ci forniscono la più efficace possibilità di caratterizzare, non solo la struttura del continuo *spazio–tempo* che ci interessa, ma anche quella delle eventuali teorie *fisico–geometriche* che in esso si possono logicamente porre.

In base all'accennata genesi dello *spazio–tempo* per generalizzazione di quello della relatività ristretta, ammettiamo che in ogni suo punto possa ancor sempre concepirsi *un continuo pseudo–euclideo tangente ad esso*, e, con Cartan, consideriamo poi senz'altro cotesto *spazio–tempo* come costituito da infinite particelle di continuo pseudo-euclideo opportunamente *connesse* l'una all'altra mediante una **legge** atta a definire tutte le possibili variazioni geometriche al passaggio da una qualsiasi particella ad un'altra ed essa vicina. Coteste connessioni e le rispettive leggi possono esser di natura varia, a partire da una più semplice di tutte, la connessione euclidea, fino a connessioni di indole illimitatamente elevata e complessa.

Ora noi sappiamo, potremmo quasi dire « l'esperienza ci insegna » che per giungere ad uno *spazio–tempo* adatto alla nostra fisica, sia pur esso concepito nella forma più generale, basterà che ci eleviamo al più fino alla *connessione affine*, ma in generale basterà già la *connessione euclidea. Ci proporremo quindi di ricercare le caratteristiche dello spazio–tempo della teoria unitaria fra quelle del continuo costituito da elementi pseudo euclidei* (o anche semplicemente euclidei, attribuendo alla coordinata di indice 4 un valore immaginario) *legati fra di loro dalla connessione affine*; del continuo cioè che Cartan ha studiato a fondo e chiamato *spazio a connessione metrica* [1].

(1) *Sur les variétés à connexion affine ecc.* « Ann. École Normale », 1923–24–25.

5. – È ormai diffusissimo il criterio di studiare la struttura di ogni continuo attraverso i vari tensori irriducibili che in esso possono sussistere in base alle ammesse sue proprietà fondamentali.

Nel nostro caso di una *varietà metrica*, la teoria di Cartan, per mezzo del ricordato trasporto per parallelismo, determina con notevole facilità, dapprima il tipo del suo tensore più complesso, poi lo scinde nettamente in un *tensore generale di torsione*, in un *tensore di curvatura di omotetia*, e in un *tensore generale di curvatura di rotazione*, che in fine scompone rispettivamente nei loro *tensori irriducibili*.

E più precisamente nel caso di una varietà metrica a n dimensioni, il tensore completo di $\frac{n(n^3 + n - 2)}{4}$ componenti si scinderà dapprima in un tensore di torsione di $\frac{n^2(n-1)}{2}$ componenti, in un tensore di curvatura di omotetia di $\frac{n(n-1)}{2}$ componenti e in un tensore di curvatura di rotazione di $\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ componenti. Ciascuno di essi si scomporrà poi nei suoi elementi irriducibili, e precisamente il tensore di torsione in tre tensori rispettivamente di

$$\frac{n(n^2-4)}{3} \quad , \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad , \quad n$$

componenti, il tensore di curvatura di rotazione in sei tensori rispettivamente di

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12} \quad , \quad \frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad , \quad 1 \quad ,$$

$$\frac{n(n-1)(n+2)(n-3)}{8} \quad , \quad \frac{n(n-1)}{2} \quad , \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

componenti, mentre il tensore di curvatura di omotetia sarà in generale irriducibile.

Per qualche eccezionale valore di n e segnatamente per $n = 4$ qualcuno dei precedenti tensori diviene ulteriormente riducibile.

Non potendo, per ragioni di spazio, dare le espressioni generali di cotesti tensori, ricordiamo solamente che, se manca la torsione, vale a dire, se sono nulli i tre tensori di torsione, dovranno esser identicamente nulli il 4° e il 6° tensore di curvatura di rotazione, mentre il 5° verrà a coincidere col tensore di curvatura di omotetia.

Lo spazio a *connessione metrica senza torsione* rimane quindi caratterizzato dai soli tensori di

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12} , \frac{(n-1)(n+2)}{2} , 1 , \frac{n(n-1)}{2}$$

componenti e quello a *connessione euclidea* (*curvatura d'omotetia nulla*) *senza torsione* dai soli primi tre di essi.

Sono appunto questi primi tre tensori, per la loro struttura intimamente legati alla metrica, quelli che permettono la caratterizzazione dello *spazio–tempo* einsteiniano della relatività generale.

6. – Passiamo ora al caso $n = 4$ che particolarmente ci interessa, e riuniamo nella seguente tabella l'indicazione del numero delle componenti dei tensori irriducibili risultanti dalla scomposizione del tensore generale:

$n = 4$ Tensore generale (66)
- Tensore di torsione (24) . . . . . $8 + 8, 4, 4.$
- Tensore di curvatura (42)
  - di omotetia $\overline{3 + 3}.$
  - di rotazione $5 + 5, 9, 1, \underline{9}, \overline{3 + 3}, \underline{1}.$

I numeri corrispondenti ai tensori che si annullano colla torsione sono stati sottolineati; quelli che si identificano all'annullarsi della torsione sopralineati.

Brevi considerazioni fisiche.

7. – Non sarà forse inutile accennare come si innestino nello schema tracciato i ricordati tentativi di Weyl e di Eddington, la recente teoria di Einstein e la nuova teoria che proponiamo.

I due primi autori supposero *a priori* nulla la torsione; Weyl conservò la curvatura di omotetia e di rotazione e così, all'atto pratico, finì di operare coi tensori di curvatura di rotazione 1°, 2°, 3° (della teoria della gravitazione primitiva) e 5°.

Quest'ultimo di $6 = 3 + 3$ componenti, corrispondendo a quella eventuale possibile variazioni nel trasporto delle lunghezze che abbiamo ricordato al n. 3, possiede i requisiti per una congruente interpretazione elettromagnetica. Ma la sua sussistenza, nelle dette condizioni, implica quella del tensore di curvatura di omotetia, e quindi la necessità di attribuire al continuo *spazio–tempo* un *carattere nettamente affine* la cui opportunità non appare praticamente giustificata.

Eddington si pose pure dal punto di vista della connessione metrica senza torsione. Non attribuì però il ruolo elettromagnetico al tensore usato da Weyl, ma si servì di tutti i quattro tensori di curvatura di rotazione.

La scomponibilità del loro complesso gli suggerì un'ottima interpretazione elettromagnetica, la quale però porta con se l'inevitabile conseguenza di alterare gravemente la parte gravitazionale della teoria.

8. – Passiamo ora a considerare come possa in questo schema logicamente inserirsi una nuova teoria unitaria *secondo la sua originaria concezione.*

In primo luogo annulliamo identicamente il tensore di curvatura di omotetia, con che passiamo senz'altro dalla connessione metrica a quella euclidea.

Il 3° tensore di torsione a 4 componenti (il più semplice, il solo che potrebbe esistere e venir interpretato per $n = 2$), come risulta dagli studi di Cartan e ha rilevato per altra via anche Einstein, possiede *tutti* i requisiti che occorrono per poterlo porre in rigorosa correlazione col potenziale elettromagnetico. Conserviamolo, ma annulliamo i due primi.

Le caratteristiche della teoria della gravitazione einsteiniana sono tutte connesse ai primi tre tensori di curvatura di rotazione, alla precisa condizione che siano identicamente nulli gli altri. La presenza del 4°, 5° e 6° di essi perturberà quindi inevitabilmente l'aspetto gravitazionale della teoria, ma tale perturbazione potrà sparire al caso limite in cui divenga nullo anche il tensore di torsione che abbiamo conservato.

Opereremo quindi in definitiva con *sette* tensori: *uno* di torsione a 4 componenti e *sei* di curvatura con complessive 36 componenti. Secondo me, *solo per mezzo di cotesti tensori si può soddisfare completamente e esattamente alle premesse costantemente poste e formulate anche dallo stesso Einstein.*

9. – A questo punto giova ricordare che Egli ha ultimamente seguita una via che, nel nostro schema, equivale a conservare i soli tre tensori di torsione, annullando identicamente **tutti** i tensori di curvatura. Il lato elettromagnetico della questione viene così formulato senza troppe perturbazioni; ma il lato gravitazionale viene inesorabilmente compromesso, almeno in rapporto a ogni nostra precedente concezione.

Determinatezza della nuova teoria.

10. – Una teoria, conseguentemente fondata sulle basi esposte, è determinata.

Sia $L^{\alpha}_{\mu\nu}$ una connessione metrica, nel senso di Cartan, nel continuo a 4 dimensioni che ci proponiamo di caratterizzare come sfondo per la nostra teoria, e siano $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $\Omega^{\alpha}_{\mu\nu}$ le sue parti simmetrica e emisimmetrica rispettivamente a 40 e 24 componenti. Come è noto la seconda si interpreta come il *tensore di torsione generale* della varietà, a 24 componenti indipendenti, che nel nostro caso si scomporrà in 3 tensori irriducibili rispettiva-

mente a 16, 4 e 4 componenti. Quest'ultimo è il notissimo tensore $\Omega^{\alpha}_{\alpha\nu} = \Omega_{\nu}$ che si dimostra comportarsi come un vettore.

In base alla connessione L è definito il tensore generale di curvatura $L^{\alpha}_{\mu\nu\varrho}$ di complessive 42 componenti indipendenti, e scomponibile come fu detto al n. 6. Sono in complesso $24 + 42 = 66$ componenti di tensori irriducibili da esprimere per mezzo delle $40 + 24 = 64$ L. Fra le 66 equazioni che si dovranno porre, dovranno esistere almeno 3 *identità*: sono quelle che corrispondono ai casi ricordati al n. 5, che annullandosi la torsione, 1°) si annullano due tensori di curvatura, 2°) coincidono il tensore di curvatura di omotetia e uno dei tensori di curvatura di rotazione.

Abbiamo poi detto di annullare identicamente la curvatura di omotetia e i due primi tensori di torsione. Ciò equivale a porre $6 + 20$ equazioni fra le L.

Ricordiamo finalmente che la teoria della gravitazione di Einstein è notoriamente basata sul tensore contratto di Ricci-Einstein $G_{\mu\nu}$, e sul fatto *essenziale* che fra le 10 equazioni gravitazionali esistono 4 identità, le quali fanno sì che le $g_{\mu\nu}$ risultino in ogni caso determinabili a meno dell'arbitraria scelta del sistema di riferimento, come vuole il principio di relatività generale. Quindi, *se noi vorremo poter ritrovare le equazioni gravitazionali come caso limite*, dovremo cercar di operare su tensori analogamente contratti, e porre delle equazioni di tipo simile, sia pur generalizzato in conseguenza della connessione *più generale e dissimetrica* che abbiamo ammessa.

Contraiamo quindi tutti i tensori di curvatura che ci rimangono di complessive 36 componenti. Ciò equivarrà a scrivere altre 18 equazioni fra le L. Se dopo ciò riusciremo finalmente a legare fra loro da una parte i tensori di curvatura contratti con 16 equazioni (non più 10 essendo ormai sparita la simmetria) ragionevolmente analoghe a quelle einsteiniane e implicanti le consuete 4 identità (annullamento di divergenze); e dall'altra, le derivate covarianti del vettore di torsione Ω_{ν} rispetto alla nostra connessione, con 8 equazioni analoghe (possono esser senz'altro identiche) alle 8 equazioni di Maxwell, colle 2 note identità, *potremo aver risolto il nostro problema*. Infatti tutto il procedimento esposto equivale a porre $6 + 20 + 18 + 16 + 8 = 68$ equazioni con $3 + 4 + 2 = 9$ identità. Son questi appunto i numeri esatti per determinare le 64 variabili di campo L a meno dell'arbitraria scelta delle 4 coordinate e per quanto riguarda Ω_{ν} a meno di un gradiente addittivo di uno scalare.

Il fatto che coll'annullarsi della torsione si debbano annullare anche i 3 tensori che, con Ω_{ν}, determinano, nel caso generale, il divario fra $L^{\alpha}_{\mu\nu\varrho}$ e il consueto tensore di Riemann $R^{\alpha}_{\mu\nu\varrho}$, favorisce *in modo evidente* la possibilità di ottenere al limite la coincidenza delle nostre 16 equazioni colle equazioni gravitazionali di Einstein, coincidenza che invano si sono sempre posta come meta ideale tutte le teorie prececenti.

Chimica. — *Derivati mercurici di bromofenoli bivalenti* [1]. Nota di M. Amadori, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Tra i fenoli bivalenti solamente con la resorcina il mercurio forma derivati. A seconda delle condizioni di operazione si possono avere composti che hanno legati al carbonio del nucleo uno o due gruppi —HgOCOCH o —HgCl, e composti che, oltre al gruppo acetomercurico legato al nucleo, hanno i due OH salificati con mercurio [3].

Con la pirocatechina e con l'idrochinone il mercurio non dà composti, perchè questi fenoli vengono ossidati dal sale mercurico.

Con gli alogenoderivati di questi tre fenoli bivalenti non sono stati preparati composti di mercurio allo stato mercurico.

Ho ritenuto degna di studio la formazione di composti mercurici dei di– e dei tri–bromoderivati dei due fenoli bivalenti pirocatechina e resorcina. Nei bromoderivati, come risulta dalle ricerche che riferisco in questa Nota, si manifesta una maggiore possibilità a dare composti rispetto ai fenoli non bromurati; si riscontra inoltre una diversità nel tipo di composti che si formano per i derivati bromurati, in confronto ai non bromurati.

Derivati della dibromopirocatechina.

Mescolando dibromopirocatechina (1 mol.) e acetato di mercurio (1 mol. o più) disciolto in acqua, a freddo, si ottiene una sostanza colorata in verde che si mantiene inalterata se viene lasciata a sè nel liquido freddo; se invece questo viene scaldato la sostanza verde si trasforma in altra colorata in rosso. La sostanza verde anche se raccolta su filtro a freddo, lavata con acqua, e posta ad essiccare si trasforma in rossa.

Se si opera in soluzione acida acquosa (10–20 % di acido acetico) con le stesse quantità di sostanze, il prodotto verde che dapprima si forma si trasforma nel prodotto rosso anche a freddo; a caldo si forma subito il prodotto rosso, che non si altera se lavato con acqua, o con acido acetico, o con alcool.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(3) Dimroth, « Berichte », *35*, p. 2865 (1902); Leys, « Journ. pharm. Chimie », *21*, p. 388 (1905).

Questo prodotto rosso fu raccolto, lavato, essiccato, ed analizzato:

		C	H	Br	Hg
	trovato %	15.32	0.57	33.70	43.49
per $C_6H_2O_2Br_2Hg$	calcolato	15.44	0.44	34.26	43.01

Corrisponde quindi al composto $C_6H_2O_2Br_2Hg$.

Operando in soluzione alcoolica, neutra o acida, a freddo non si manifesta alcuna reazione; solo a caldo si ha formazione del composto rosso; ma non presenta alcun vantaggio l'operare in soluzione alcoolica nella preparazione di questo composto.

Derivati della tribromopirocatechina.

Mescolando tribromopirocatechina (1 mol.) con soluzione acquosa di acetato mercurico (1 mol.), in soluzione neutra e a freddo, si ottiene anche per questo bromoderivato una sostanza verde che si mantiene inalterata se il liquido viene lasciato a freddo; riscaldando la miscela la sostanza si trasforma in altra colorata in rosso.

In soluzione acquosa acida per acido acetico (10–20 %) a freddo e a caldo si ottiene il composto di colore rosso vivo, molto simile a quello del dibromoderivato, e che filtrato può essere lavato con soluzione acetica, o con acqua, o con alcool senza alterazione.

Venne analizzato il prodotto ottenuto dopo riscaldamento della soluzione acquosa acetica a bagnomaria per circa 20 minuti.

		C	H	Br	Hg
	trovato %	13.58	0.26	44.13	36.98
per $C_6HO_2Br_3Hg$	calcolato	13.20	0.18	43.96	36.78

Corrisponde quindi al composto $C_6HO_2Br_3Hg$.

Anche per il tribromoderivato la reazione con acetato mercurico in soluzione alcoolica si manifesta incompleta, dando prodotti poco definiti.

Derivati della dibromoresorcina.

Mescolando 10 gr. di dibromoresorcina (1 mol.) con soluzione acquosa di 12 gr. di acetato mercurico (1 mol.) in soluzione neutra a freddo, si ottiene un precipitato rosso che passa assai lentamente a verde; a caldo si ottiene subito un precipitato verde oliva cupo che dopo esser stato scaldato a bagnomaria per circa 20 minuti venne raccolto, lavato con acqua, essiccato ed analizzato:

		C	H	Br	Hg
	trovato %	15.52	0.54	33.97	43.41
per $C_6H_2O_2Br_2Hg$	calcolato	15.44	0.44	34.26	43.01

Corrisponde quindi al composto $C_6H_2O_2Br_2Hg$.

Se si opera in soluzione acquosa acida che contenga 10 % di acido acetico, non si nota una reazione visibile tra i componenti.

Operando in soluzione alcoolica con le stesse quantità di sostanze sciolte in 100 cc. di alcool, mescolato a 5 cc. di acido acetico, a freddo si forma in breve un precipitato giallo; che a caldo non si altera. Dopo aver riscaldato la miscela per $^1/_4$ d'ora a bagnomaria il deposito ottenuto fu separato per filtrazione, e lavato con alcool acidificato con acido acetico, essiccato ed analizzato:

	C	H	Br	Hg
%	15.20	0.47	34.34	43.48.

Anche questo prodotto corrisponde al composto $C_6H_2O_2Br_2Hg$.

La composizione dei due prodotti che si ottengono in soluzione acquosa ed in soluzione alcoolica è quindi la stessa, nonostante il diverso aspetto dei due prodotti.

Gli stessi composti, oliva cupo in soluzione acquosa e giallo in soluzione alcoolica si ottengono impiegando un eccesso di acetato mercurico.

Derivati della tribromoresorcina.

Mescolando tribromoresorcina e una soluzione acquosa di acetato di mercurio in rapporti equimolecolari, o con eccesso di sale mercurico, in soluzione neutra a freddo si ottiene un prodotto giallo, che diventa più scuro se si riscalda la miscela. Questo prodotto raccolto, lavato con acqua ed essiccato, venne analizzato:

		C	H	Br	Hg
	trovato %	13.64	0.21	43.60	36.25
per $C_6HO_2Br_3Hg$	calcolato	13.20	0.18	43.96	36.78

Corrisponde quindi al composto $C_6HO_2Br_3Hg$.

La stessa sostanza si ottiene operando con eccesso di acetato mercurico in soluzione acquosa neutra.

Se si opera in soluzione acquosa acida per acido acetico non si manifesta reazione. Così pure operando in soluzione alcoolica si ottengono prodotti non ben definiti.

Proprietà e caratteri generali di questi mercurioderivati.

Si osserva anzitutto che le presenza di bromo attaccato al nucleo fenolico rende possibile la formazione di derivati di mercurio per la pirocatechina, poichè il mercurio non agisce ossidando sui derivati bromurati di questo fenolo, ciò che invece avviene per la pirocatechina non bromurata.

Per i derivati mercurici della dibromopirocatechina si ottiene dapprima un prodotto verde che passa a rosso, stabile; per la tribromopirocatechina

si ottiene pure un prodotto prima verde che passa a rosso, stabile. Per i derivati della dibromoresorcina si ottiene dapprima un prodotto rosso che passa a giallo, stabile; per la tribromoresorcina si ottiene direttamente il prodotto giallo. Vi è quindi la tendenza a formarsi dapprima un composto poco stabile che poi si trasforma in altro più stabile, sopratutto a caldo e in soluzione acida.

I composti stabili sopra descritti e analizzati sono tutti solubili in idrati alcalini. Reagiscono violentemente con acido nitrico fumante, sopratutto i derivati delle bromoresorcine che sviluppano un gas che s'infiamma. Con acido solforico concentrato danno colorazioni intense caratteristiche: il derivato della dibromopirocatechina dà colorazione viola che, più facilmente a caldo, passa ad azzurra, quello della tribromopirocatechina dà colorazione viola a freddo e a caldo; il derivato della dibromoresorcina dà colorazione verde a freddo e a caldo, quello della tribromoresorcina dà colorazione rosa a freddo, e a caldo rosso sangue.

Riguardo la loro costituzione, risulta dalle analisi che queste sostanze derivano dai corrispondenti fenoli bi– e tri–bromurati, per sostituzione di 2 H con 1 Hg. È possibile che in essi il mercurio sostituisca 2 H dei due ossidrili, oppure 1 H di un ossidrile e 1 H legato al C del nucleo. Mi propongo di compiere altre ricerche per stabilire la natura di questo legame.

Altre ricerche ho pure in corso sui prodotti qui descritti; ed altre sui composti mercurici dei bromoderivati degli eteri di questi fenoli bivalenti.

Chimica. — *Nuove ricerche sui molibden–otto–cianuri* [1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata [2] dal Socio R. Nasini.

Se si tratta a caldo $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ con acido nitrico concentrato si ottiene una sostanza di color rosso–pietra quasi insolubile nell'acqua, solubilissima negli alcali.

Questa reazione descritta nel 1904 da A. Chilesotti [3] venne studiata nel 1927 da W. R. Bucknall e W. Wardlaw [4] che analizzarono la sostanza rosso–pietra e trovarono che per un atomo di molibdeno essa contiene due radicali CN e che, trattata in soluzione solforica con permanganato, consuma per ogni atomo di molibdeno un equivalente di ossigeno.

In base ai risultati analitici e al fatto che la sostanza è solubile negli alcali, i detti Autori ritennero di poter attribuirle la formula

$$H[\overset{V}{M}oO_2(CN)_2 \cdot 2H_2O] .$$

Si tratterebbe dunque, a loro parere, di un biossi–biciano–acido del molibdeno pentavalente. Non parendomi tale interpretazione sufficientemente giustificata, preparai la sostanza rosso–pietra, secondo le indicazioni di Bucknall e Wardlaw, allo scopo di sottoporla a qualche reazione che ne avesse potuto chiarire la natura.

Gr. 10 di $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ vennero introdotti in un grosso tubo d'assaggio con 10 cc. di una soluzione circa sei volte normale di acido nitrico e si scaldò a b. m. per non più di quindici minuti. All'inizio del riscaldamento si notò un forte sviluppo di vapori rossi: il liquido prima giallo, si colorò in rosso–aranciato, poi in rosso–bruno, e dopo circa 10' cominciò a formarsi un deposito rosso–pietra che aumentò durante il raffreddamento. Il deposito venne separato per filtrazione alla pompa e lavato con acqua fredda fino ad eliminazione di tutto il nitrato di potassio, e infine seccato nel vuoto su acido solforico. All'analisi il prodotto così ottenuto diede risultati abbastanza concordanti con i calcolati in base alla formula proposta da Bucknall e Wardlaw; soltanto il consumo di ossigeno, nell'ossidazione con permanganato del composto prima sciolto in ammo-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », *34*, 497, (1904).

(4) « J. Chem. Soc. », (1927), 2992.

niaca, poi acidificato con acido solforico, risultò appena un quarto del calcolato: cioè si trovò che la sostanza consumava un equivalente di ossigeno per quattro atomi di molibdeno.

Alcune reazioni, ch'ebbi campo di osservare eseguendo l'analisi del prodotto, mi confermarono nel sospetto che la sua struttura dovesse essere molto diversa da quella espressa dalla formula su riportata. La soluzione del composto in ammoniaca è colorata in giallo–chiaro, come le soluzioni dei sali $Me_4^{I}Mo^{IV}(CN)_8$ e quando viene acidificata con acido solforico assume la colorazione rosso–bruna che l'acido $H_4Mo^{IV}(CN)_8$ forma con l'acido molibdico [1]. Ciò faceva supporre che il composto contenesse l'ione $[Mo^{IV}(CN)_8]''''$ e dell'acido molibdico. Tale supposizione venne confermata dalle seguenti reazioni. La soluzione solforica rosso–bruna per aggiunta di nitrato d'argento diede un precipitato gelatinoso giallastro che venne riconosciuto per $Ag_4Mo(CN)_8$; e per aggiunta di solfato di rame diede il precipitato rosso-violetto caratteristico di $Cu_2Mo(CN)_8$. D'altra parte, la soluzione rosso-bruna addizionata con ferrocianuro potassico diede il precipitato rosso-bruno caratteristico che i ferrocianuri dànno con l'acido molibdico. Infine se la soluzione veniva prima ossidata con permanganato, l'aggiunta di nitrato d'argento produceva un precipitato rosso-aranciato ch'era il sale di argento dell'acido $H_3Mo(CN)_8$ formatosi per ossidazione di $H_4Mo(CN)_8$ mediante permanganato.

Da tutti questi fatti risulta chiaro che alla reazione tra $K_4Mo(CN)_8$ e acido nitrico va data la seguente interpretazione: l'acido nitrico dopo di aver liberato l'acido complesso $H_4Mo(CN)_8$ ne ossida una parte ad acido molibdico, e questo combinandosi col resto dell'acido $H_4Mo(CN)_8$ forma il composto insolubile rosso-pietra, il quale non è che un prodotto analogo a quello ben noto di colore rosso-bruno che l'acido $H_4Fe(CN)_6$ forma con l'acido molibdico.

Nel composto rosso-pietra formatosi nelle condizioni su descritte si deve ammettere in base al rapporto atomico $Mo : N = 1 : 2$ e al suo potere riducente pel permanganato, che siano contenute tre molecole di acido molibdico per una molecola di $H_4Mo(CN)_8$.

Ammessa tale interpretazione per il composto rosso-pietra, era prevedibile che lo stesso composto si sarebbe potuto ottenere anche trattando semplicemente $K_4Mo(CN)_8$ con un molibdato in soluzione acida. Ciò è stato pienamente confermato dall'esperienza.

A gr. 3.7 di molibdato di ammonio sciolti in 12 cc. di acqua, si aggiunse a freddo e a goccia a goccia acido nitrico (1 : 1) fino a ridissoluzione completa del precipitato bianco prima formatosi, e poi in sostanza gr. 3.5 di $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$. Il liquido dapprima rosso-sangue, si rap-

(1) G. A. Barbieri, «Rend. Accad. Lincei», [6], 12, *11*, 149, (1930).

prese dopo pochi minuti in una melma rossa che venne spremuta alla pompa. La sostanza rossa così ottenuta dà tutte le reazioni di quella preparata per azione dell'acido nitrico concentrato sul molibdencianuro a caldo. Il suo colore, a seconda delle condizioni di preparazione, può variare dal rosso-pietra al rosso-bruno, e anche il rapporto $Mo^{IV} : Mo^{VI}$ varia da 1 : 2.5 a 1 : 3.5 . Si tratta evidentemente di miscele di prodotti amorfi. Esse contengono inoltre quantità variabili di potassio. Si verifica insomma per questi prodotti ciò che è stato già constatato per i prodotti della reazione tra il ferrocianuro potassico e l'acido molibdico [1].

Chimica. — *Sopra i neri di azopirrolo* [2]. Nota IV di A. Quilico e M. Freri, presentata [3] dal Socio G. Bruni.

Nella III Nota su questo argomento [4] sono stati riassunti i risultati delle esperienze eseguite su alcuni metilpirroli, per stabilire il loro comportamento di fronte ai diazocomposti, ciò che presentava uno speciale interesse per chiarire il modo di formazione e la probabile struttura dei neri che in questa reazione si originano. In questo lavoro sono descritte le esperienze stesse ed è data la composizione dei prodotti ottenuti.

N–metilpirrolo e diazo di paranitroanilina in soluzione acetica. — Si diazotano al solito, col metodo di Hantzsch, con nitrito di amile in soluzione acetica, gr. 2.8 (2/100 di gr. mol.) di paranitroanilina, ed il solfato di diazonio cristallizzato, dopo la consueta purificazione con etere, viene disciolto in 70 cm^3 di acido acetico glaciale. Alla soluzione, raffreddata con ghiaccio, e mantenuta in continua agitazione, si aggiungono a piccole porzioni gr. 1.6 (2/100 di gr. mol.) di N–metilpirrolo preparato secondo Kurt Hess [5], disciolto in 20 cm^3 di acido acetico glaciale.

Si ha subito colorazione rossa che in breve passa al nero. Il giorno dopo si ritrova un liquido scurissimo con in sospensione una polvere nera; si diluisce con egual volume di acqua, si filtra alla pompa, e si lava abbondantemente con acido acetico al 20 % poi con acqua. Ottenuti gr. 1.1 di nero grezzo, che venne purificato per estrazione in Sohxlet con acido acetico glaciale e poi con alcool. Si ottenne così un prodotto nero–bruno, in parte

(1) Wyrouboff, « Ann. Chim. Phys. », [5], *8*, 481, (1876); Atterberg, « Berichte », *9*, 1475, (1876).

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(3) Nella seduta del 15 febbraio 1931.

(4) « Rend. Acc. Lincei », 1° semestre (1931).

(5) « Ber. », *47*, p. 1422 (1914).

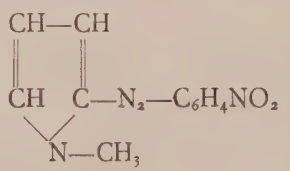
sotto forma di polvere, in parte come granuli, che dopo essicamento vennero analizzati separatamente:

		Polvere		Granuli
trovato °/₀:	C	49.44	49,47	49.77
»	H	5.13	4.72	4.90
»	N	16.42	—	16.57

e risultarono avere la stessa composizione.

Il prodotto ha un aspetto simile ai neri di pirrolo; riscaldato non fonde, ma emette vapori che danno la reazione del fuscello d'abete. È completamente solubile negli alcali, che non si colorano anche per prolungato contatto.

N–metilpirrolo e diazo di p·nitroanilina in soluzione acquosa. — P·nitrobenzolazo N–metilpirrolo:



Un comportamento completamente diverso si nota operando in soluzione acquosa acida per acido acetico. Si diazotano nel modo ordinario con nitrito sodico in soluzione acquosa gr. 1.4 di p·nitroanilina, si aggiungono 4 gr. di acetato sodico per eliminare l'acidità minerale, e nella soluzione raffreddata con ghiaccio e continuamente agitata, si fanno gocciolare gr. 0.8 di N–metilpirrolo sciolto in 20 cm³ di alcool. Si nota subito la separazione di un precipitato rosso fioccoso. Dopo qualche ora si filtra alla pompa, si lava ripetutamente con acqua, si secca su piatto poroso, e si ricristallizza ripetutamente dall'alcool, dopo trattamento con nero animale. Si ottiene così in scagliette scintillanti rosso-brune, che ricordano la p·nitrofenilidrazina, e fondono a 124°-125°. Analisi:

trovato N °/₀: 24.44
per $C_{11}H_{10}O_2N_4$ calcolato » : 24.34

Questo azopirrolo era già stato descritto da Ciusa [1], che non ne aveva dato il punto di fusione.

N–metilpirrolo e diazo di o·p·dinitroanilina in soluzione acetica. — Ad una soluzione di solfato di dinitrobenzendiazonio in 70 cm³ di acido acetico glaciale ottenuta da gr. 2.0 di o·p·dinitroanilina, si aggiungono a

(1) «Gazz. Chim. It.», *51*, 1° semestre p. 51 (1920).

piccole porzioni e sotto continua agitazione e raffreddamento, gr. 1.00 di N–metilpirrolo sciolti in 20 cm³ di acido acetico glaciale. Si ha colorazione bleu scurissima che subito passa al nero. La mattina dopo si diluisce con acqua, e si filtra alla pompa il nero, che dopo lavaggio ed essicamento pesava gr. 0.9. Per la purificazione questo venne diviso in due porzioni: la prima venne sottoposta ad estrazione in Sohxlet con acetone fino a che questo passava incoloro, la seconda venne purificata al solito mediante estrazione con acido acetico glaciale e con alcool. L'analisi delle due porzioni diede gli stessi risultati:

		1ª porzione		2ª porzione	
trovato °/₀:	C	53.86	53.39	53.68	53.87
»	H	5.51	5.33	4.96	5.02
»	N	16.81	—	—	—

Anche questo nero è completamente insolubile negli alcali.

β–metilpirrolo e diazo di p·nitroanilina in soluzione acetica. — Il β–metilpirrolo impiegato in queste esperienze fu preparato dal magnesilpirrolo, secondo B. Oddo [1], e dopo accurato frazionamento bolliva a 141°–143°.

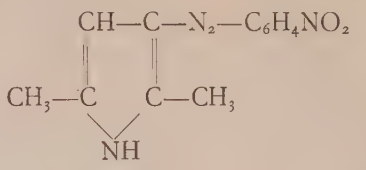
Ad una soluzione di solfato di p. nitrobenzendiazonio cristallizzato (preparato da gr. 2.7 di p·nitroanilina) in 70 cm³ di acido acetico glaciale, raffreddata e mantenuta in agitazione, si aggiungono a porzioni gr. 0.8 di β-metilpirrolo sciolto in 20 cm³ di acido acetico glaciale. Intensa colorazione rossa che diviene subito scurissima per separazione di nero. Dopo 18 ore di permanenza al freddo, si diluisce con egual volume di acqua, si filtra alla pompa e si lava sul filtro con acido acetico al 20 °/₀ e poi con acqua. Resa gr. 1.7 di nero grezzo, seccato a 100°. Per la purificazione si sottopone al solito ad estrazione in Sohxlet con acido acetico e con alcool. Rimangono gr. 1.2 di nero (una piccola parte passa attraverso il filtro). Il prodotto così purificato è una polvere nerissima, di aspetto omogeneo, in tutto simile ai neri ottenibili con il pirrolo stesso. All'analisi dà i seguenti valori:

trovato °/₀:	C	52.59	52.57	—	—
»	H	4.50	4.25	—	—
»	N	—	—	17.67	18.12

Anche questo nero è insolubile negli alcali che non si colorano anche per lungo contatto. Operando in soluzione acquosa, acida per acido acetico, nel modo indicato per l'N–metilpirrolo, abbiamo ottenuto prodotti amorfi, solubili nei solventi organici con colorazioni rosse intense, che non ci fu possibile di purificare per cristallizzazione e che non abbiamo ulteriormente esaminati.

(1) B. Oddo e R. Mameli, «Gazz. Chim. It.», *43*, II, p. 504 (1913).

α-α''-dimetilpirrolo e diazo di p·nitroanilina in soluzione acetica. — P·nitrobenzolazo α-α'-dimetilpirrolo:



Si diazotano con nitrito d'amile gr. 1.40 di p·nitroanilina, e nella soluzione acetica glaciale del diazo, mantenuta raffreddata, si fanno gocciolare gr. 1.00 di α-α'-dimetilpirrolo preparato secondo Paal [1], disciolto in 10 cm³ di acido acetico glaciale. Si ha subito colorazione rossa, e si nota la separazione di una polvere cristallina rosso minio. Dopo qualche ora si filtra alla pompa il prodotto separato, che pesava gr. 1.7; altro se ne può ricavare diluendo con acqua le acque madri acetiche. Il prodotto di copulazione si presenta come una polvere microcristallina rosso chiara, quasi insolubile anche a caldo nei solventi organici (alcool, benzolo, acido acetico); riscaldato, non fonde nettamente, ma si scompone con forte annerimento tra 185° e 190°. Il prodotto così ottenuto non è altro che un solfato dell'azopirrolo; trattato con soluzione di Na_2CO_3, cambia nettamente di aspetto, trasformandosi in una polvere scarlatta con sviluppo di CO_2, mentre nel liquido alcalino si può riconoscere la presenza di acido solforico. Ricristallizzata dall'alcool, nel quale è facilmente solubile a caldo, forma bellissimi aghi rossi scintillanti a riflessi verdi, che riscaldati a 202° passano nettamente al verde e a 208° fondono con decomposizione [2]. All'analisi diede:

	trovato N °/₀:	22.45
per $C_{12}H_{12}O_2N_4$	calcolato » :	22.85

Il prodotto che si ottiene direttamente nella copulazione è probabilmente il solfato $C_{12}H_{12}N_4O_2 \cdot H_2SO_4$. La prima analisi eseguita sul prodotto semplicemente lavato con alcool diede infatti:

	trovato °/₀:	C	42.06	H	4.69
per $C_{12}H_{12}N_4O_2 \cdot H_2SO_4$	calcolato :		42.10		4.10

Questo azopirrolo non era ancora stato descritto nella letteratura.

Anche con diazo di o·p·dinitroanilina in soluzione acetica non si ebbe formazione di nero, ma si ottenne una polvere cristallina rosso mattone contenente acido solforico, che non venne ulteriormente esaminata, ma che indubbiamente era il solfato dell'azoico corrispondente.

(1) «Ber.», *18*, p. 2254 (1885).

(2) Questo composto somiglia molto nell'aspetto e nel comportamento al p·nitrofenilidrazone della p·dimetilamminobenzaldeide. Anche questo dà un solfato ben cristallizzato, ed esiste in due modificazioni cromoisomere, una rossa ed una verde.

α-metilpirrolo e diazo di p·nitroanilina in soluzione acetica. — L'α–metilpirrolo impiegato in queste prove, fu preparato secondo A. Pictet [1] per trasposizione pirogenica dell'N–metilpirrolo, facendone passare lentamente i vapori in un lungo tubo di quarzo, riempito di frammenti dello stesso materiale, e riscaldato al rosso scuro. Il liquido bruno condensato ottenuto da 50 gr. di N–metilpirrolo, venne lavato in imbuto separatore con HCl molto diluito, poi con soluzione di Na_2CO_3 ed infine seccato su KOH solida. Per eliminare l'N–metilpirrolo inalterato, il liquido venne bollito con potassio metallico, ed il pirrolato di potassio, dopo lavaggio con etere, venne decomposto con acqua e sottoposto ad estrazione con vapore.

L'α-metilpirrolo grezzo, dopo essicamento su KOH, venne sottoposto ad un accurato frazionamento, fino ad ottenere gr. 5–6 di un prodotto p. e. 147°–148°, sufficientemente puro [2].

Alla soluzione acetica del solfato di p·nitrobenzendiazonio ottenuto da gr. 2.8 di p·nitroanilina, si aggiungono a porzioni, gr. 1.5 di α–metilpirrolo sciolto in acido acetico glaciale; si ha colorazione aranciata che passa al rosso-bruno.

Il giorno dopo si ritrova un liquido scuro, e contro le pareti del pallone, un deposito di sostanza solida peciosa. Si filtra su filtro ordinario, ed il filtrato si versa in una soluzione acquosa di acetato sodico, con che si separa un precipitato fioccoso, bruno, completamente solubile nei solventi organici e negli acidi minerali che non venne ulteriormente esaminato.

La crosta solida rimasta nel pallone, venne bollita a ricadere nel pallone stesso con alcool, per togliere le parti peciose; dopo di aver ripetuto tre volte questo trattamento, il residuo diviene polveroso. Si completa la purificazione lavandolo con soluzione diluita di Na_2CO_3, e con estrazione in Soxhlet con alcool fino a che questo passa incoloro. Ottenuti gr. 1.5 di prodotto indisciolto. Questo, dopo essicamento nel vuoto su H_2SO_4 si presenta in granuli leggeri di un colore bruno a riflessi bronzei. All'analisi diede:

trovato °/₀:	C	47.04	47.64	47.86	—	—
»	H	4.56	4.76	4.77	—	—
»	N	—	—	—	20.03	19.90

Il prodotto è completamente solubile negli alcali diluiti, con colorazione bruna (a differenza dei neri da pirrolo, N–metilpirrolo e β-metilpirrolo) e viene da queste soluzioni riprecipitate in forma fioccosa per aggiunta di acidi. Riscaldato, rigonfia ed emette vapori giallastri che danno la reazione del fuscello di abete.

(1) «Ber.», *37*, p. 2792 (1904).

(2) Quando l'α–metilpirrolo contiene l'isomero β o omologhi, si ha la formazione nella reazione col diazo di p·nitroanilina, di *neri insolubili negli alcali* mentre che se il prodotto è puro, si ottengono sostanze solubili completamente negli alcali.

α–metilpirrolo e diazo di p·nitroanilina in soluzione acquosa acida per acido acetico. — L'α-metilpirrolo reagisce facilmente in soluzione acquosa col diazo di p·nitroanilina, ma si formano spesso dei prodotti di resinificazione. Le migliori condizioni per giungere ad un prodotto definito sono le seguenti: gr. 2.8 di p·nitroanilina vengono diazotati nel modo solito in soluzione acquosa ed alla soluzione del diazo, addizionata di 5 gr. di acetato sodico cristallizzato si fanno gocciolare gr. 1.5 di α–metilpirrolo sciolto in 20 cm³ di alcool. La soluzione si colora subito in un bel rosso aranciato, che però va rapidamente scurendosi. Dopo qualche ora si filtra alla pompa il precipitato, si lava con acqua e si secca su H_2SO_4 nel vuoto. Si ottiene una polvere amorfa nero–verde, completamente solubile in alcool, acetone, benzolo, ottenibile per evaporazione del solvente solo in forma peciosa. Il modo migliore di purificarlo, consiste nel far bollire il prodotto grezzo con etere di petrolio, che lo discioglie pochissimo ed asporta invece le impurezze; rimane sul filtro una polvere verde bottiglia, di aspetto omogeneo, che riscaldata fonde non nettamente tra 91° e 95°, e che data l'impossibilità di ottenerla allo stato cristallino fu analizzata tal quale:

	trovato °/₀:	C	57.26	56.60	H 5.52	4.65	N 23.24
per $C_{11}H_{10}O_2N_4$	calcolato		57.38		4·37		24·34

I valori ottenuti si avvicinano molto a quelli richiesti per l'azoico, ed è molto probabile che si tratti di questo, allo stato impuro.

Un analogo comportamento abbiamo constatato nelle prove con diazo di o·p·dinitroanilina.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza dei composti del sodio.* Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio R. Nasini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti maschi castrati.* Nota di A. Galamini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

— *Decorso del digiuno e della rialimentazione in femmine di ratti castrate.* Nota di A. Galamini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *L'azione dell'alcool sul metabolismo basale e sul quoziente respiratorio nell'uomo normale.* Nota di V. Monaldi, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

FRIDTJOF NANSEN

Commemorazione fatta dal Socio L. De Marchi,
nella seduta del 1° marzo 1931.

Il 13 maggio scorso Fridtjof Nansen, seduto sul balcone della sua villa, senza nè una parola nè un lamento, si spense per paralisi cardiaca.

Gli eroi della mitologia erano assunti all'Eliso senza subire l'umiliazione del decadimento: Nansen meritava quella morte. Egli fu il tipo più completo di un eroe moderno, eroe non solo della forza e della volontà, ma anche del pensiero e del sentimento, tesi alle più luminose idealità della scienza e dell'umanità. Nell'accingersi a parlar di Lui si deve frenar la parola, onde non si perda nella frase che, volendo esaltare, diminuisce: il semplice racconto è una saga.

Nansen nacque il 10 ottobre 1861 in una piccola casa di campagna presso Oslo. Nella sua famiglia erano tradizionali ardimento e patriottismo: un suo trisavo, danese, lo precedette nei mari polari, l'avo nella lotta per il diritto di parità della Norvegia di fronte alla Svezia. Il padre era un tranquillo studioso, ma la madre, donna forte, aveva turbato il suo alto mondo borghese, come una delle prime donne sciatrici. Da lei il figlio ereditò la passione per gli sport, in palestra e in aria libera, sul mare e sui ghiacciai: così si temprò quel rude e agile strumento di nervi, di muscoli, d'occhio e di cuore, al quale parvero facili imprese, che facevano scrollare la testa ai più arditi.

Da giovane si dedicò soprattutto agli studi biologici: fu anche in Italia alla Stazione Zoologica di Napoli e al laboratorio istologico del Golgi in Pavia, dove frequentava anche quel vivace maestro di zoologia che fu Pietro Pavesi. Quando io presi soggiorno in quella città, nel 1888, mi ricordavano quella figura asciutta e agile di giovane scandinavo, il cui nome sonava già per il mondo per la temeraria traversata della Groenlandia.

Del suo indirizzo bio–istologico sono testimoni, assai pregiati dai competenti, i lavori sull'*Anatomia e l'Istologia del sistema nervoso dei Mysostomi* [1],

(1) « Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft », XXI Bd. N. F. (*Summary in English* in « Bergens Museum Skrifter », 1885).

sulla *Istologia del sistema nervoso centrale* [1], e sulla *Myxine glutinosa L.* come vertebrato ermafrodito [2]. Più tardi, dopo le prime navigazioni nei mari polari si dedicò prevalentemente a studi faunistici, come quello sullo *sviluppo del Delfino*, in collaborazione con Gustavo Guldberg, del 1887, e quelli sui *Protozoi* e sugli Uccelli dell'Artide, pubblicati nei volumi dei *Results* della grande spedizione polare.

Ma l'attività d'esploratore sviluppò in lui specialmente il senso fisico, nell'osservazione e nello studio dei grandiosi problemi che gli si affacciavano.

La traversata della Groenlandia era stata tentata invano da provetti esploratori dei ghiacci, come Whymper e Nordenskjöld, e il progetto di un nuovo tentativo era sembrato ai più esperti assurdo. Nansen confidava in sè stesso, e nella novità del suo piano. La traversata era stata tentata dai predecessori partendo dalla costa occidentale, spoglia di ghiaccio e con centri abitati, verso la costa orientale tutta ghiacciata fino al mare e sbarrata da una vasta fascia di ghiacci natanti. Egli si propose il cammino inverso: superare al principio, nella pienezza dei mezzi fisici e logistici, questa zona orientale sconosciuta e difficile, e avviarsi attraverso il deserto ghiacciato alla meta conosciuta, come a premio della superata fatica. In questo programma non c'era soltanto un fondamento logico, ma anche un proposito di intranisgenza eroica: o riuscire, o perdersi nell'ignoto, perchè la ritirata era impossibile. Fu suo motto espresso: « o la costa occidentale, o la morte ».

Lo stesso dilemma dominò nel progetto più grandioso di spedizione artica. Non senza emozione si rilegge il discorso: *Come può essere attraversata la regione polare artica?* da Lui pronunciato davanti alla Società Geografica di Londra nel novembre 1892 (« The Geographical Journal », january 1893) e la vivace discussione che ne seguì con alcuni dei più noti esploratori delle regioni polari: Mac Clintock, Nares, Inglefield, Young, Wiggins. All'ammiraglio Nares che alle linee del programma obbiettava, con altri gravi dubbi idrografici e tecnici, il difetto di non assicurarsi una linea di ritirata presumibilmente sicura, Nansen rispondeva: « Io sono dell'opinione opposta. Nella « mia spedizione in Groenlandia, io ho provato che *è possibile far qualche cosa « quando non vi è possibilità di ritirata*; noi avevamo bruciato i vascelli dietro « di noi e, a dispetto di ciò, attraversammo la Groenlandia. Io spero di riu- « scire anche stavolta bruciando il ponte alle spalle, se non intervengono « altre circostanze ad arrestarci ». E chiamò la nave, che doveva portarlo, *Avanti!* (*Fram*).

(1) *Foreløbig meddelelse om undersøgelser over centralnervesystemets histologiske bygning hos Ascidierne samt hos Myxine glutinosa*, in « Bergens Museum Årsberetning », for 1885, Bergen 1886; *The structure and combination of the histological elements of the Central Nervous System*, « Bergens Museum Årsberetning », for 1886, Bergen 1887.

(2) *A protandric Hermaphrodite* (Myxine glutinosa L.) *amongst the vertebrates*, « Bergens Museum Årsberetning », for 1887, Bergen 1888.

È un eroismo tranquillo, perchè appoggiato a una grande speranza di riuscita; speranza che a sua volta trovava fondamento in uno studio approfondito del problema e nella logica presumibile dei fatti naturali. Vi è una corrente di ghiacci che scende da nord a sud lungo le coste orientali della Groenlandia; questa corrente *deve* provenire dal mare a nord dello stretto di Behring e tagliare la regione artica forse attraverso il polo.

Gli argomenti addotti dal Nansen a sostegno di questa affermazione apparivano assai probativi: gli avanzi della nave americana *Jeannette*, che era stata schiacciata fra i ghiacci del mare Siberiano, frammenti di legname, polveri andesitiche, fanghiglie e diatomee provenienti dai mari, dai fiumi e dalle coste della Siberia orientale o dell'Alaska, tutte raccolte sulle coste della Groenlandia. Non c'era quindi, com'Egli disse, che *da prendere il biglietto* sul ghiaccio: quello che era stato un pericolo per le precedenti spedizioni, l'imprigionamento fra i ghiacci, era invece il suo programma. Se la *Jeannette* era stata schiacciata dalle potenti pressioni del *pack*, il *Tegetthoff* era stato invece portato a galla dalla pressione stessa, ed egli aveva fatto costruire il *Fram* di forma e solidità tali, da resistere non opponendo resistenza, lasciandosi cioè sollevare.

Tutto il prevedibile era stato provveduto: attrezzamento nautico e scientifico, mezzi di locomozione e di quartieramento sul ghiaccio, provvigioni per cinque anni e armi da caccia e da pesca per la provvista di carne fresca, eliminando le carni salate, presunta causa dello scorbuto. Sperava che la deriva dei ghiacci lo facesse passare per il polo, ma, se anche non vi passava, l'importante non era di toccare quel punto matematico, ma di *esplorare le ignote regioni polari.*

Tutto il prevedibile era preveduto: ma l'imprevedibile potèva riservare sorprese spaventose per chi non fosse preparato anche al sacrificio. Di queste sorprese ne aveva incontrate nella spedizione di Groenlandia: la banchisa costiera che parve precludergli l'approdo alla terra, trascinandolo per 500 chilometri alla deriva verso sud, e il crepaccio nel quale per un attimo non si inabissò la piccola flotta di slitte a vela, che scivolava giù dalla cupola di ghiaccio alla meta già in vista.

Nella campagna polare l'imprevisto peggiore fu che la corrente di deriva manteneva il *Fram* a troppa grande distanza dal polo. Nansen ebbe allora il suo gesto d'eroismo più disperato: con un solo compagno, il Johanssen (forse ancor più eroico di lui, eroismo di pura devozione e disciplina), con ventotto cani, tre slitte, due kayak e viveri per cento giorni, abbandonò la nave e si spinse sui ghiacci galleggianti verso nord. Era nel marzo 1895, dopo diciannove mesi di deriva. In ventitrè giorni raggiunse quel *record* della latitudine, a 86° 14', che fu solo qualche anno dopo superato dal nostro Cagni. La mancanza assoluta di cacciagione, che li obbligò a rivalersi sulla scorta dei cani, li persuase al ritorno, e nell'agosto raggiunsero una delle isole Francesco Giuseppe. Qui furono costretti a passare l'inverno, in una rozza capanna di pietre, vivendo quasi esclusivamente di carne d'orso. Nella primavera successiva si affidarono

ancora ai ghiacci che li portarono verso le Spitzberg, e il 17 giugno 1896 ebbero l'insperata fortuna di imbattersi nella nave *Windward* della spedizione *Jackson–Harmworth*, che li riportò ad Hammerfest, in patria; pochi giorni dopo vi arrivava il *Fram* che aveva compiuto la prevista deriva. In epoca mistica si sarebbe detto che un nume aveva protetto e guidato Lui e i suoi compagni.

Il trionfo con cui tutto il mondo civile salutò il Suo ritorno, dopo averlo pianto morto, non intaccò la fibra del suo carattere. Il segretario della Società Geografica di Londra Hugh Robert Mill, che fu per quarantun'anni in rapporto di amicizia con lui, scrive («Nature», June 21, 1930): « Io conobbi quasi tutti « i grandi esploratori del mio tempo: Nansen fu il solo sul quale l'onda « travolgente del successo non lasciò alcuna traccia di menomazione: il suo « comportamento rimase modesto, il suo sorriso avvincente come prima ».

E veramente si può dire che non dormì sugli allori. Per parecchi anni attese alla raccolta dei *Risultati scientifici* (*The Norwegian North–Polar Expedition* 1893–1896, *Scientific Results*, vol. I–VI, London 1900-1906) della gloriosa campagna polare. Vari capitoli furono affidati a specialisti, ma tutta la parte che si riferisce alla idrografia e alla fisica del mare fu svolta da lui.

Nel 1900 fu uno dei fondatori del Consiglio internazionale per lo studio del mare e ne volle il laboratorio centrale in Norvegia; tra il 1900 e il 1910 prese parte a varie campagne oceanografiche nel mare di Norvegia su navi di Stato o sul proprio yacht, solo o in collaborazione con esperti, come Helland-Hansen e Hjort, e ne riferì in parecchie opere e memorie [1]. Nel 1912 fece col suo yacht una spedizione all'Isola degli Orsi e allo Spitzberg [2]. Nel 1913, a cinquantadue anni, accettò di partecipare a una spedizione che, attraverso il mar di Kara, giunse tra i ghiacci alla foce del fiume Jennissei, ne risalì tutto il corso fino a Krasnojansk, e di lì si estese in una larga ricognizione della Transbaicalia e dell'Amur fino a Wladiwostok, donde ritornò per la Transiberiana a Pietroburgo e in patria. Un dettagliato diario di tale spedizione pubblicò alla fine del 1914, ma parecchie edizioni ne furono riprodotte in Germania dopo la guerra [3]. Lo scopo di esso, più che geografico, fu economico e politico: rivelare al mondo una grande parte di mondo che rimane ancor fuori dalla storia e dalla economia mondiale, un'immensa riserva di territorio per l'umanità futura. Dice nella prefazione: « Mi diede coraggio « e fede nella vita vedere co' miei occhi quanto spazio la terra ancora riserva a « milioni di case per uomini felici ». Ciò scriveva alla fine del 1914, quando già infuriava il turbine della guerra, ed Egli getta un grido di dolore per questa distruzione di forze e di civiltà, che avrebbero potuto rivolgersi alla messa

(1) Principali tra queste sono l'opera *The Norwegian Sea*, in collaborazione con Helland–Hansen, del 1909, e *The Waters of the North-eastern North Atlantic.* («Intern. Revue der ges. Hydrobiologie und Hydrographie») del 1913.

(2) Ne pubblicò la relazione (*Spitzbergen Waters*) nel 1915 e in 2ª edizione tedesca nel volume *Spitzbergen* del 1922.

(3) *Sibirien, ein Zukunftsland*, 4. Aufl., Leipzig 1922.

in valore di tanta terra ancora vergine. Doveva invece assistere, prima di morire, al chiudersi non solo di quella, ma di tante altre estensioni di territori fecondi al libero sfruttamento della crescente umanità per i privilegi di un industrialismo e di un nazionalismo monopolizzatori.

Lo spirito di avventura e di ricerca non isolava il Nansen dai problemi vivi del mondo moderno, politici e sociali. Egli era animato da un patriottismo fervente; i suoi ardimenti, più che alla soddisfazione di una esuberanza e di un'ambizione personale, miravano all'affermazione di un primato della sua patria. Sul grande ghiacciaio groenlandese spiegò la *bandiera pura* della Norvegia, cioè senza il simbolo dell'unione alla Svezia, e più tardi fu uno dei capi, il più autorevole e popolare, della rivoluzione pacifica, che nel 1905 portò alla separazione. Se fosse stato ambizioso, avrebbe potuto assumere, tanta era la sua popolarità, la dittatura o la presidenza del nuovo Stato, ma credette più sicura garanzia, per la consistenza di questo, il ritorno alla forma dell'antica indipendenza, col suo re nazionale. Egli accettò per dovere di disciplina la carica di Ministro presso il Re d'Inghilterra, nel quale ufficio contribuì fortemente, col suo fascino personale e per l'amicizia di Edoardo VII, al consolidamento diplomatico del nuovo Stato. Ma, appena si convinse che questo aveva preso salda base fra le potenze, si liberò dalle cerimonie per tornare alla sua cattedra di Oceanografia fisica in Oslo, al suo laboratorio, alle sue esplorazioni marine.

L'amore della patria e l'amore del mare mantevano attorno al suo solido razionalismo scientifico un'atmosfera di poesia e di leggenda, di cui spesso è soffuso il racconto delle sue gesta, e che ispirò in modo speciale l'opera *Nelle nebbie del Nord* (1911), dove racconta la parte che ebbero gli antichi Norvegesi, i Normanni, nell'esplorazione artica e nella scoperta dell'America.

Ma il suo patriottismo non era egoismo nazionale, che imprigionasse il suo più vasto spirito di umanità. Di questo diede prove, oserei dire, non meno eroiche di quelle date fra i ghiacci dell'Artide, negli anni del dopoguerra. Durante la guerra le condizioni del suo paese, al quale veniva chiusa la principale fonte di vita, il mare, reclamarono tutta l'opera sua. Come ambasciatore a Washington nel 1917 e 1918 seppe, con un intesa cogli Stati Uniti, salvare il paese dalla soffocazione.

Dopo la guerra fu, si può dire, il più attivo agente internazionale di pace fra le nazioni e di riparazione ai vasti dolori dei popoli, vinti e vincitori. Come rappresentante della Norvegia nella Lega delle Nazioni si assunse tre còmpiti giganteschi: l'organizzazione del rimpatrio dei milioni di prigionieri dispersi nella vastità della Russia e della Siberia, disorganizzate dalla rivoluzione e dalla guerra civile; l'organizzazione dei soccorsi alla popolazione russa devastata dalla carestia; il salvataggio dei residui delle comunità Armene dallo sterminio. Egli ottenne risultati di cui le popolazioni beneficate conservano tuttora memoria, personificata nel Suo nome, e li ottenne non solo coll'autorità del mandato e col prestigio del nome, ma con quel sacrificio

di sè, con quello spirito di avventura e con quel genio di organizzazione che trent'anni prima lo avevano fatto tornare vincitore dai cimenti artici. Già più che sessantenne, per formarsi una cognizione diretta delle condizioni e dei bisogni, sfidò i disagi e i pericoli di lunghi e non facili viaggi in paesi in completa disorganizzazione economica e politica.

Il premio Nobel per la pace, conferitogli nel 1923, non ebbe mai conferimento più giustificato.

Una così intensa attività umanitaria non lo distrasse dalla sua passione per l'avventura polare. Nel 1924 accettò la presidenza della Società internazionale *Aeroarctic* per l'esplorazione della regione artica col dirigibile, e nella primavera del 1930 avrebbe dovuto dirigere una spedizione al polo col dirigibile Zeppelin, spedizione che, per imprevedute difficoltà amministrative, fu rimandata. Sarebbe altrimenti morto sul campo della sua gloria.

Qui dovrebbe chiudersi l'epicedio, perchè nessun minore dettaglio della sua attività, o episodio della sua vita, può accrescere o diminuire una figura così fortemente scolpita in opere di grandezza e di umanità.

Ma io non debbo dimenticare che parlo a uomini di scienza e che come tale Fridtjof Nansen fu nostro collega. Debbo quindi mettere in evidenza anche il significato scientifico della sua grandiosa opera di esploratore e della sua tenace opera di maestro dell'Oceanografia fisica. Sento con ciò di compiere anche un dovere personale, perchè in tale opera io trovai più volte ispirazione o conferma alla mia tanto più modesta.

Le impressioni e le osservazioni scientifiche raccolte nella traversata della Groenlandia ci danno una visione del paesaggio e del clima, che dovevano dominare su gran parte dei continenti boreali nell'èra glaciale e, ciò che più importa, delle condizioni che li mantennero così a lungo, e che tuttora li mantengono in quel relitto di invasione glaciale. Le osservazioni meteorologiche, benchè in breve serie, diedero a H. Mohn [1] la base per conclusioni veramente generali sulla distribuzione degli elementi meteorologici sul continente groenlandese, che per la sua permanente glaciazione è centro di un polo di freddo e sede di alta pressione, che tendono mutuamente a conservarsi.

Non è qui il caso di diffondersi sui risultati della triennale campagna polare, raccolti nei sei grossi volumi dei *Scientific Results*. Il loro valore consiste principalmente nella durata della campagna stessa, nella vastità del campo esplorato, e nel rigore di metodo, tanto di raccolta che di critica, delle osservazioni. Si può dire che quanto si conosce della regione artica,

(1) Möhn u. Nansen, *Wissenschaftliche Ergebnisse von Dr. F. Nansens Durchquerung von Grönland 1888*, in « Petermann's Mittheil. », Ergänzungsheft 105, Gotha, 1892. Ne presi argomento per il mio articolo *Il più grande ghiacciaio del mondo* in « Boll. Club Alpino Ital. », n. 59, vol. XXVI, 1892, dove arrivo a conclusioni alquanto diverse e faccio qualche induzione, in base alla forma della calotta di ghiacchio, sulla struttura del rilievo sepolto.

sia dal punto di vista geografico che da quello fisico e idrografico e biologico, è nella massima parte frutto di questa campagna. E io credo di non errare affermando che, se si vorrà conquistare una visione definitiva delle condizioni topografiche, fisiche, meteorologiche, idrografiche e biologiche del bacino artico, bisognerà tornare al suo metodo, di navi imprigionate e trascinate alla deriva dai ghiacci lungo trasversali diverse e contemporanee. Già le osservazioni raccolte dal *Fram* e discusse colle osservazioni contemporanee di stazioni circostanti permisero al Mohn un tentativo di isoterme e di isobare mensili attorno al polo, per quel periodo.

Alcune conclusioni più notevoli meritano d'essere segnalate:

1° l'esistenza di un mare circumpolare molto profondo. Nansen veramente traversò questo mare, con molti zig zag, lungo una corda a distanza dal polo, e non afferma che come probabile la mancanza di terre o di bassi fondi attorno a questo. Le spedizioni aeree di Amundsen-Nobile, di Byrd e di Wilkins, le misure di marea nel mare Siberiano, compiute da Sverdrup, e la profondità di m. 5440 misurata da Wilkins a grande distanza dalla rotta di Nansen, confermarono tale induzione. Questo profondo mare artico, in contrapposto al forte rilievo antartico, sono caratteri morfologici che dànno un particolare significato alla posizione attuale dell'asse terrestre, e ne segnalano la relativa stabilità;

2° la grande estensione della piattaforma continentale attorno al bacino artico, sulla quale sorgono i grandi arcipelaghi nord–americani e nord-euroasiatici, e dalla quale si discende con ripidissimo gradino alle grandi profondità centrali. Nella piattaforma russo–siberiana il Nansen rilevò valli sommerse, evidentemente scavate da fiumi in un periodo anteriore di emersione, fatto che assunse un significato più vasto quando tracce analoghe di un'antica idrografia furono riscontrate in altre remote piattaforme sommerse, come nei mari della Sonda e nell'alto Adriatico[1], a prova di un generale abbassamento del livello del mare, dovuto al fissarsi sui continenti delle immense calotte glaciali;

3° la prima dimostrazione, data dalle misure pendolari compiute sui ghiacci galleggianti, del mantenersi della *gravità normale* anche su mare profondo, cioè dell'equilibrio isostatico anche in mare.

Le osservazioni e misure di oceanografia fisica furono continuate nei decenni successivi nei mari circostanti di Kara, d'Islanda, di Norvegia e attorno allo Spitzberg, con metodi e strumenti più raffinati, secondo le norme del Consiglio internazionale per lo studio dei mari. Fu così determinato il ricambio d'acque fra i bacini nordici separati da rilievi subacquei, e localizzata l'area dalla quale l'acqua raffreddata in superficie discende a formare

(1) Molengraaf G. A. F., *Modern deep-sea research in the East-Indian Archipelago*, « Geogr. Journ. », 1921; De Marchi L., *Variazioni del livello dell'Adriatico in corrispondenza colle espansioni glaciali*, « Atti dell'Accad. Scient. Veneto–Trentino–Istriana », Padova, 1922.

il fondo freddo della massa Atlantica. Notevole è la conferma meglio documentata di un legame fra la variazione annua della quantità di calore trasportato dalle correnti atlantiche colla temperatura media invernale della Norvegia, coi raccolti, e coi prodotti della pesca.

Importanti fenomeni di dettaglio, da lui messi in luce, sono la così detta *acqua morta* che inceppa la navigazione e le *onde interne*, fenomeni fra loro connessi, perchè legati alla formazione di uno *strato di salto* fra due acque di densità alquanto diversa. In alcune di queste onde il Nansen riconobbe l'onda di marea, com'ebbi modo di rilevare anch'io in modo evidentissimo nelle acque dell'Adriatico settentrionale lungo lo strato di salto estivo[1].

In tutti i campi svariatissimi delle sue vaste esplorazioni egli è sempre vigile a sorprendere il fatto nuovo: le forme caratteristiche del terreno, dei ghiacci, delle spiagge, del corso e delle rive dei fiumi, della vegetazione, e a cercarne la spiegazione geologica, climatologica, antropica, economica. È una passione logica che lo anima, e che si trasfonde nella forma sempre semplice e rigorosa, ma spesso calda ed emozionata del racconto. È anche una passione umana che dà spesso calore al racconto, quando si trova tra popolazioni primitive, con gli Esquimesi, i Samojedi, gli Ostiaki ecc. che vanno estenuandosi, più che per inclemenza di clima e povertà di terreni, per il contatto con civiltà superiori, ma più corrotte, o fra popolazioni come l'armena, vittima delle lotte barbariche di razza e di religione. Volumi interi dedicò a queste tragedie umane.

Non è qui il luogo di scendere a dettagli: il poco che ho detto credo basti a dimostrare che Egli non lascia soltanto il ricordo di una vita eroica, ma anche documenti seri e duraturi di una vita scientifica lunga e feconda. Della Geografia artica fu, si può dire, il fondatore; nell'Oceanografia fisica fu maestro tra i primi; nella Geografia umana fu apostolo.

La Sua Patria riconosce in Lui un genio nazionale: l'Umanità lo onora soprattutto come Uomo, perfetto nell'equilibrio delle attività fisiche, razionali e morali; l'Uomo che si dovrebbe porre a modello dei giovani, perchè imparino che si arriva a grandi cose quando ad una corroborante disciplina fisica si accompagni una rigorosa preparazione di scienza e di carattere, e la coscienza di dover dedicare la propria opera a un ideale superiore: quando l'eroe dell'azione si fonde coll'eroe del pensiero.

(1) De Marchi L., *Onde interne e propagazione di marea nell'Adriatico Superiore*, « Atti R. Istituto Veneto », tomo LXXV, 1916.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il triste annuncio della morte del Socio Straniero Alberto Brachet, professore d'anatomia nell'Università di Bruxelles. Dello scomparso si terrà una degna commemorazione in una delle prossime sedute.

Il Socio De Marchi legge la commemorazione del Socio Straniero Fridtjof Nansen.

Il Presidente ringrazia il Socio De Marchi per la bella commemorazione pronunciata.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario Parravano presenta i libri giunti in dono, segnalando la raccolta dei lavori dell'anno 1929-30 dell'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Milano, fatti sotto la direzione del Corrisp. Rondoni: « La teoria fenomenologica del campo elettromagnetico » del Socio G. A. Maggi; « Il passato e il presente delle principali teorie geometriche » del Corrisp. G. Loria; il vol. III ser. I della Spedizione italiana de Filippi: « Geofisica, meteorologia aerologia e pireliometria » a cura di E. Alessandri e N. Venturi–Ginori.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. Dionisi, legge anche a nome dei Soci Bottazzi e Baglioni, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di C. Cattaneo: « Osservazioni sulla struttura del vitreo ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta all'Accademia un plico suggellato, depositato presso la Segreteria dell'Accademia, dall'avv. Manferoce a nome di un anonimo indicato con lo pseudonimo « Homo nemo ».

Si decide di accettare il plico come presentato dall'avv. Manferoce a richiesta del quale soltanto potrà venire dissuggellato.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: Armellini, Baglioni, Nasini, Petri.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° marzo 1931

ALDRICH J. M. — Notes on the types of American two-winged flies of the genus Sarcophaga and a few related forms, described by the early authors. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°, pp. 1–3.

ALESSANDRI C. e VENTURI GINORI N. — Geofisica, meteorologia, aerologia e piroliometria. (Spedizione italiana de Filippi nell'Himalaia, Caracorum e Turchestan Cinese, (1913–4). Vol. III. Bologna, Edit. Nicola Zanichelli. 4°, pp. I-XIX, 1-565.

BARELLI LUIGI — L'adiposi nucleare e nucleolare della cellula epatica. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Zellforschung und mikroskopische Anatomie ». Band XII, pp. 470–82). Berlin, 1931. 8°.

BORGHI BRUNO — I carboidrati come autigeni incompleti. (Estr. da « Biochimica e terapia sperimentale », 1930). Milano, 1930. 8°, pp. 1–10.

BORGHIBRUNO — La reazione attuale dei tessuti articolari. (Estr. da « Minerva medica ». Vol. II). Torino, 1930. 8°, pp. 1–16.

BORGHI B. — Ueber di Folgen der Insektion von arteigenen und artfremden Leukozyten (Sonderdruck aus der « Krankheitsforschung ». Bd. VIII, 1930, pp. 308–13). Leipzig, 1930. 8°.

BRAMBILLA SILVIO. — Le alterazioni del sistema nervoso centrale in alcune avitaminosi. (Estr. da « Lo Sperimentale Archivio di Biologia normale e patologica ». Anno LXXXIV, pp. 537-451). Siena, 1930. 8°.

BROWN VIRGINIUS. — Hypermastigote flagellates from the termite Reticulitermes: Torquenympha octoplus gen. nov., sp. nov.; and two new species of Microjoenia (From « University of California Publ, in Zoology ». Vol. 36, pp. 67–80). Berkeley, 1930. 8°.

CARTAN ÉLIE. — Notice sur les travaux scientifiques. Paris, 1931. 4°, pp. 1-117.

CHINI VIRGILIO. — Dell'azione dinamica specifica alimentare del fegato. (Estr. da « Biochimica e terapia sperimentale », 1930). Milano, 1930. 8°. pp. 1-7.

CHINI VIRGILIO. — Di alcuni fattori che possono influire sulla patogenesi della pleurite cosidetta pneumotoracica. (Estr. dalla « Rivista di patologia e clinica della tubercolosi ». Anno IV, fasc. IX). Bologna, 1930. 8°, pp. 1-7.

CHINI VIRGILIO. — Ricerche istologiche sull'azione generale dell'acido urico. (Estr. dall'« Archivio italiano di anatomia e istologia patologica ». 1930). Milano, 1930. 8°, pp. 1-17.

CHINI VIRGILIO. — The influence of uric acid on the permeability. (Reprinted from the « Journal of experimental Medicine ». Vol. 53). Baltimore, 1931. 8°, pp. 1-9.

CHINI V. — Ueber die lokale Einwirkung der Harnsäure auf die Gewebe. (Sonderdruk aus der « Krankheitsforchung ». Bd. VIII, pagine 301–7). Leipzig, 1930, 8°.

GERHARTZ (von) H. — Belastungsproben der Atmung. (Sonderdruck aus « Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden ». Abt. V, Theil IX, 1928). Berlin, 1928. 8°. pp. 1–88.

GERHARTZ (von) H. — Belastungsproben des Kreislaufes. (Sonderdruck aus

« Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden ». Abt. V, teil IX, 1928, pp. 89–190). Berlin, 1928. 8°.

Gliozzi Mario. — Origini e sviluppi delesperienza Torricelliana. Torino, 1931. 8°, pp. 1-84.

Hough Walter. — Exploration of ruins in the White Mountain Apache indian Reservation, Arizona. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°, pp. 1-10.

Hutchinson George E. — Restudy of some Burgess Shale fossils. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°, pp. 1-24.

Loria Gino. — Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia. Padova. Edit. Antonio Milani, 8°. pp. 1-xxiii, 1-467.

Maggi Gian Antonio. — Teoria fenomenologica pel campo elettromagnetico. Lezioni di fisica matematica. (Manuali Hoepli). Milano. Edit. Ulrico Hoepli. 1931. 8°, pp. 1-xvi, 1-319.

Malloch F. R. und Rohwer S. A. — New forms of sphecoid wasps of the genus Didineis Wesmael. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-7.

Mansfield Wendell C. — Some peculiar spiral forms from California and Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-3.

Mosna Ezio. — Ricerche sulla spermatocitica alla tubercolina secondo Long. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto sieroterapico Milanese ». fasc. IV-V, 1930). Milano, 1930. 8° pp. 1-11.

Rathbun Mary J. — Fossil decapod crustaceaus from Mexico. (From. the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Vashington, 1930. 8°. pp. 1-10.

Riley J. H. — Birds from the small islands of the north east coast of Dutch Borneo. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 77). Washington, 1930. 8°, pagine 1-23.

Riley J. H. — Birds collected in inner Mongolia, Kansu, and Chihli by the national geographic Society's central China expedition under the direction of F. R. Wulsin. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°. pp. 1-39.

Rondoni Pietro. — Experimentelle Untersuchungen über Beziehungen der Harnsäure zur Allergie. (Abdruck aus « Verhandlungen der Deutschen pathologischer Gesellschaft ». Band XXV, pp. 119-25). Berlin, 1930. 8°.

Rondoni Pietro. — L'azione inibente della digitonina sullo sviluppo dell'adenocarcinoma del topo. (Estr. dal « Bollettino della Società italiana di Biologia sperimentale ». Vol. V, fase. V). Milano, 1930. 8°. pp. 1-3.

Rondoni Pietro. - Le basi chimico-fisiche della tecnica istologica (Estr. dall' « Archivio italiano di anatomia e istologia patologica ». Milano, 1930. 8°. pp. 1-17.

Rondoni Pietro. — La chimica del cancro (Estr. dal « Giornale di Chimica industriale ed applicata ». Anno XII). Milano, 1930. 8°. pp. 1-20.

Rondoni Pietro. — Le moderne vedute eziologiche sui tumori e loro critica (Estr. dal volume degli « Atti del II Convegno della Lega italiana per la lotta contro il cancro ») Bologna, 1930. 8°. pp. 1-42.

Rondoni Pietro. — Se esista una azione litica degli essudati di fronte al bacillo di Koch. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto sieroterapico milanese ». Fasc. IV-V. 1930). Milano, 1930. 8°. pp. 1-8.

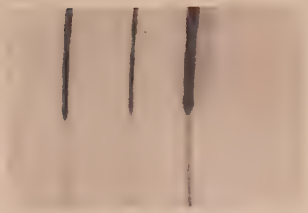
Wetzel Rudolf. — A new species of trematode worm of the genus Ornithobilharzia from a Canadian goose. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°. pp. 1-4.

N. P.

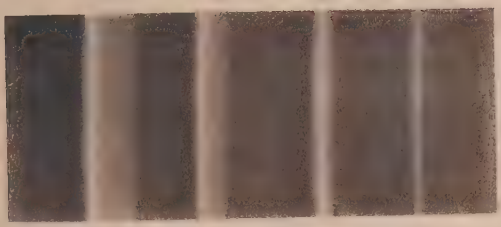
SCANNED 1 of 14

I

II



III



b

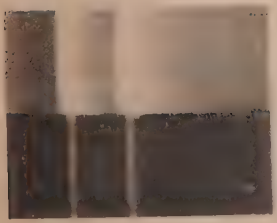
IV

V

VI

VII

VIII



IX

ANEI SI – ROMA

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 marzo 1931 (anno IX)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Determinazione della funzione di variabile complessa regolare in una corona circolare note: la parte reale sulla circonferenza esterna e la parte immaginaria sull'interna.* Nota [1] del Corrisp. U. Cisotti.

1. In questioni idromeccaniche, che sto trattando, interessa il seguente problema. Si consideri nel piano della variabile complessa $z = x + iy$, con x e y variabili reali, la corona circolare definita dalle seguenti limitazioni:

$$q \leq |z| \leq 1 .$$

Designi $f(z)$ una funzione di z regolare entro la predetta corona circolare; si tratta di determinare f in modo che, posto

$$f = \varphi + i\psi , \tag{1}$$

con φ e ψ funzioni reali di x, y, si abbia:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 \text{ per } |z| = 1 , \\ \psi = \psi_q \text{ per } |z| = q , \end{cases} \tag{2}$$

(1) Presentata nella seduta del 15 marzo 1931.

rappresentando φ_1 e ψ_q funzioni preventivamente assegnate dei punti delle due circonferenze, esterna e interna, sviluppabili in serie di Fourier (1).

2. La supposta regolarità di $f(\zeta)$ nella corona circolare, implica la sua sviluppabilità, in serie di Laurent, di potenze positive e negative di ζ:

$$f(\zeta) = a_0 + \sum_1^\infty{}_n \, (a_n \zeta^n + b_n \zeta^{-n}), \tag{3}$$

essendo i coefficienti a_0, a_n, b_n a priori incogniti.

Posto

$$a_0 = \alpha_0 + i\alpha_0' \quad , \quad a_n = \alpha_n + i\alpha_n' \quad , \quad b_n = \beta_n + i\beta_n' \quad \text{e} \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \tag{4}$$

la precedente può scriversi

$$f(\rho e^{i\theta}) = \varphi + i\psi = \alpha_0 + i\alpha_0' + \sum_1^\infty{}_n \, [(\alpha_n + i\alpha_n')\rho^n e^{in\theta} + (\beta_n + i\beta_n')\rho^{-n} e^{-in\theta}],$$

dalla quale, separando la parte reale dalla parte immaginaria, si ricava:

$$\varphi = \alpha_0 + \sum_1^\infty{}_n \, [(\alpha_n \rho^n + \beta_n \rho^{-n}) \cos n\theta - (\alpha_n' \rho^n - \beta_n' \rho^{-n}) \operatorname{sen} n\theta],$$

$$\psi = \alpha_0' + \sum_1^\infty{}_n \, [(\alpha_n' \rho^n + \beta_n' \rho^{-n}) \cos n\theta + (\alpha_n \rho^n - \beta_n \rho^{-n}) \operatorname{sen} n\theta].$$

Facendo nella prima di queste $\rho = 1$ e nella seconda $\rho = q$, e tenendo presenti le (2), poniamo

$$\varphi_1 = \alpha_0 + \sum_1^\infty [(\alpha_n + \beta_n) \cos n\theta - (\alpha_n' - \beta_n') \operatorname{sen} n\theta],$$

$$\psi_q = \alpha_0' + \sum_1^\infty{}_n \, [(\alpha_n' q^n + \beta_n' q^{-n}) \cos n\theta + (\alpha_n q^n - \beta_n q^{-n}) \operatorname{sen} n\theta],$$

(1) Il Villat (*Sur un problème mixte de la théorie des fonctions harmoniques dans une aire annulaire*, «C. R.», t. 153, (1911), p. 518) ha proposto la seguente formula:

$$\Omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \, d \left[\log \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)} \right] - \frac{q}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \log \frac{S(\zeta e^{-i\theta})}{S\left(\frac{1}{\zeta} e^{i\theta}\right)} \, d\theta,$$

con

$$S(u) = \frac{(1 - qu)(1 - q^5 u) \cdots (1 - q^{4n+1} u) \cdots}{(1 - q^3 u)(1 - q^7 u) \cdots (1 - q^{4n+3} u) \cdots}$$

essendo i periodi 2ω e $2\omega'$ delle funzioni ellittiche legati a q dalla relazione $q = e^{-\frac{\pi\omega'}{2i\omega}}$. Essa dovrebbe definire la funzione $\Omega(\zeta) = P + iQ$ regolare entro la corona essendo $\varphi(\theta)$ i valori che la parte reale P assume sulla circonferenza $\zeta = e^{i\theta}$ e $\psi(\theta)$ i valori che sull'altra circonferenza $\zeta = qe^{i\theta}$ assume la derivata normale di P. Manifestamente la succitata formula del Villat è diversa dalla mia (7).

nelle quali, come si disse, i primi membri sono a ritenersi funzioni note di θ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Supponendole sviluppabili in serie di Fourier si ha:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1 \, d\theta \quad , \quad \alpha_n + \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1 \cos n\theta d\theta \quad ,$$

$$\alpha'_n - \beta'_n = \frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1 \operatorname{sen} n\theta d\theta \quad ;$$

$$\alpha'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_q \, d\theta \quad , \quad \alpha'_n q^n + \beta'_n q^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_q \cos n\theta d\theta \quad ,$$

$$\alpha_n q^n - \beta_n q^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_q \operatorname{sen} n\theta d\theta \quad .$$

Ricavando α_n, α'_n, β_n, β'_n si ottiene:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi(q^n + q^{-n})}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 q^{-n} \cos n\theta + \psi_q \operatorname{sen} n\theta) \, d\theta \quad ,$$

$$\alpha'_n = \frac{-1}{\pi(q^n + q^{-n})}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 q^{-n} \operatorname{sen} n\theta - \psi_q \cos n\theta) \, d\theta \quad ,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi(q^n + q^{-n})}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 q^n \cos n\theta - \psi_q \operatorname{sen} n\theta) \, d\theta \quad ,$$

$$\beta'_n = \frac{1}{\pi(q^n + q^{-n})}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 q^n \operatorname{sen} n\theta + \psi_q \cos n\theta) \, d\theta \quad .$$

Sostituendo nelle (4) si ricava:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 + i\psi_q) \, d\theta \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi(q^n + q^{-n})}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 q^{-n} + i\psi_q) e^{-in\theta} \, d\theta \, ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi(q^n + q^{-n})}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 q^n + i\psi_q) e^{in\theta} \, d\theta \, .$$

Per queste la (3), posto:

$$(5) \quad H = \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1 + q^{2n}}\left[\left(\frac{z}{q}\right)^n e^{-in\theta} + \left(\frac{z}{q}\right)^{-n} e^{in\theta}\right] \quad , \quad K = \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1 + q^{2n}}\left[z^n e^{-in\theta} + z^{-n} e^{in\theta}\right] ,$$

diviene:

$$(6) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 + i\psi_q) \, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi_1 H + i\psi_q K) \, d\theta \, .$$

È questa la formula che risolve il problema propostoci.

3. Se nelle (5) si pone $q = 0$, avendosi, sempre per $|\zeta| < 1$,

$$H = \sum_1^\infty{}_n \zeta^n e^{-in\theta} = \frac{\zeta e^{-i\theta}}{1 - \zeta e^{-i\theta}} \quad , \quad K = 0 ,$$

la (6) diviene

$$f(\zeta) = i\psi_q + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1 \frac{1 + \zeta e^{-i\theta}}{1 - \zeta e^{-i\theta}} d\theta .$$

Questa non è altro che la formula di Schwarz definiente la funzione $f(\zeta)$ regolare nei punti $|\zeta| < 1$ e la cui parte reale φ assume sul contorno $|\zeta| = 1$ i valori φ_1 [1]; $i\psi_q$ rappresenta il valore che assume per $\zeta = 0$ la parte immaginaria di f.

4. H e K si possono esprimere mediante funzioni ellittiche. Introduciamo le funzioni ellittiche di periodo reale 2ω e di periodo immaginario $2\omega'$, legati a q dalla relazione

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}} .$$

Si consideri la funzione p di Weierstrass e lo sviluppo [2]

$$1 + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\omega} = \frac{2\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - p(u + \omega')},$$

essendo $e_1 = p\omega$. Ponendo nella precedente: una prima volta

$$u = \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega\theta}{\pi} - \omega' ,$$

si ottiene:

$$H = 2\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\omega} = \frac{\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega\theta}{\pi}\right)} - \frac{1}{2},$$

e una seconda volta

$$u = \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega\theta}{\pi},$$

si ricava:

$$K = 2\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\omega} = \frac{\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega\theta}{\pi} + \omega'\right)} - \frac{1}{2} .$$

(1) Cfr. ad es. la mia *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini, 1921-22, p. 14, formula (1).

(2) G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1886, première partie, p. 431, penultima delle formule (43).

Portando nella (6) queste espressioni di H e K si ottiene in definitiva:

$$(7) \qquad f(z) = \frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \varphi_1 \sqrt{e_1 - p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega\theta}{\pi}\right)}\, d\theta + \cdots$$

$$+ \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \psi_1 \sqrt{e_1 - p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega\theta}{\pi} + \omega'\right)}\, d\theta .$$

Nella precedente formula si possono far intervenire le funzioni σ a mezzo della formula [1]

$$\sqrt{e_1 - p(u + \omega')} = i\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u},$$

essendo $e_2 = p(\omega + \omega')$.

Astronomia (Astrofisica). — *Nuova prova dell'influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce. - Spiegazione balistica della legge di Miss Leavitt.* Nota I [2] del Corrisp. M. La Rosa.

1. Alcuni recenti scritti [3] sulla validità del « principio balistico » nella propagazione della luce, mi danno l'occasione di tornare su questo argomento di cui mi sono a lungo occupato.

Il fine che mi propongo in questa Nota, è quello di esaminare se lo schema di spiegazione dei fenomeni della variabilità delle stelle che da tale principio discende [4] sia capace di dare ragione dell'interessante legge scoperta di Miss Leavitt e riguardanti le « cefeidi » appartenenti ad uno stesso ammasso stellare.

E mi sono tanto più volentieri lasciato indurre a tornare sulle idee che da anni ho sostenute, perchè ho fiducia che i miei sforzi troveranno oramai meno sfavorevole accoglienza da parte di coloro che della questione si sono interessati, e meno scettica da parte degli altri.

I cambiamenti profondi che dal 1923 ad oggi sono intervenuti nelle teorie sulla « luce », e più particolarmente le idee fondamentali della « meccanica quantistica » e di quella « ondulatoria » hanno sgombrato il terreno dai presupposti essenziali della classica teoria delle onde, a cui il pensiero

(1) Cfr. Halphen, loc. cit. e ancora p. 194, prima delle formule (48*a*).

(2) Presentata nella seduta del 15 marzo 1931.

(3) Cfr. Timpanaro S., « Rend. Lincei », XII, p. 334 (1930); Crenna M., id., XIII, p. 124 (1931).

(4) Come ripetutamente ho scritto questa deduzione si ricava in modo così immediato e necessario da consentirci di considerare i risultati delle osservazioni come un sistema fortissimo di prove in suo favore.

fisico era rimasto per tanto tempo tenacemente attaccato ed hanno con ciò stesso fatto giustizia di parecchie obiezioni a me rivolte e che furono quasi universalmente considerate come « decisive » ed « insuperabili » contro l'applicazione del principio balistico alla luce.

Alludo specialmente alle obiezioni basate sullo effetto Doppler, a proposito delle quali non solo riuscirono vani – ed a torto – i miei ripetuti richiami, che avvertivano avere esse valore *solamente* nel campo della classica teoria delle onde, cioè *nell'ambito di quella teoria, contro cui il postulato balistico insorgeva* (e che perciò bisognava prudentemente mettere in mora, non appena *si fossero voluti esaminare gli elementi di fatto che potessero militare pro o contro l'applicabilità del principio alla luce*), ma riuscì perfino vana la esplicita dichiarazione contenuta nella chiusa della Nota [1] dei professori Levi-Civita e Corbino la quale avvertiva non potersi ritenere valide le considerazioni sviluppate nel loro scritto sul terreno delle teorie nuove.

Ed infatti le spiegazioni dell'effetto Doppler che sono state date in seguito nell'ambito di queste teorie, mentre portano a risultati esattamente concordanti con quelli della teoria classica, per quanto si riferisce all'*effetto di velocità*, non lasciano posto a quel tale *effetto di accelerazione*, che fece credere, con la enorme misura che avrebbe dovuto assumere nel caso di certe stelle variabili, clamorosamente smentita l'ipotesi balistica [2].

Delle altre obiezioni che mi sono state rivolte nessuna ebbe carattere pregiudiziale e concettuale. Segnalavano esse discordanze concrete che sarebbero risultate fra certe particolarità che il mio abbozzo teorico [3] del fenomeno di variabilità stellare prevedeva ed i dati diretti dell'osservazione. E di tali obiezioni malgrado la loro debolezza, dipendente soprattutto dalla incertezza di quei « dati », ho fatto un ampio e minuto esame; e mi è riuscito sempre di eliminarle, e qualche volta di trarre da esse nuovi argomenti, vere brillanti prove in favore del principio balistico.

Un punto solo è rimasto finora senza mia risposta, perchè non mi è parso meritasse il prolungare una polemica che cominciava a divenire acre e stancante, ma non mancherò di chiarirlo, ora che se ne presenta l'occasione, dopo che avrò esposto quanto costituisce l'oggetto principale di queste Note.

2. Secondo Miss Leavitt esiste una relazione fra le grandezze effettive ed i periodi delle Cefeidi appartenenti ad uno stesso ammasso stellare. Precisamente: per tali variabili le grandezze stellari effettive risultano sensibilmente proporzionali al logaritmo del periodo del cambiamento di luce.

(1) « Rend. Lincei » III, p. 707 (1926).

(2) Cfr. in proposito G. Giorgi, *Sul fenomeno Doppler d'accelerazione*, « Rend. Lincei », vol. VI, p. 261 (1927).

(3) È superfluo dire che non ho la presunzione di ritenere « perfetto » il mio schizzo teorico, che dovrà certamente essere ancora migliorato e completato per potere adattarsi a tutti i casi concreti.

Questa importante legge, scoperta per le Cefeidi della Piccola Nube di Magellano, è stata confermata da altri, anche sopro stelle di altri ammassi stellari, e forma una di quelle strane e misteriose regolarità – nel campo delle variabili – di cui invano si è cercato d'intuire un qualsiasi elemento di giustificazione; e di cui, invece, riesce subito di dare una ragione *semplice* ed *immediata*, non appena ci si metta dal punto di vista della spiegazione balistica del fenomeno della « variabilità ».

Per raggiungere questo fine occorre premettere alcune semplici ed interessanti proposizioni che scaturiscono immediatamente dal mio schema teorico.

Comincerò, pertanto, col ricordare che secondo tale schema ogni stella variabile sarebbe una « doppia » (o una « stello complessa ») e, che la rotazione di ciascuno dei corpi costituenti la stella attorno al comune centro di massa può dare origine a cambiamenti dell'intensità luminosa solo allorchè fra le grandezze che caratterizzano il moto passano certe relazioni [1]. Mettendoci nel caso più semplice in cui il moto dell'astro centrale sia trascurabile (per lo meno ai fini, del cambiamento di luce che potrebbe derivarne) ed in cui il moto del compagno rispetto al centro dell'altro astro si possa considerare come circolare ed uniforme, e chiamando con

d, la distanza del centro di rotazione dall'osservatore;

v, il valore numerico della velocità orbitale;

τ, il tempo della rotazione;

c, la velocità della luce (da un corpo in quiete rispetto all'osservatore);

si trova che la variabilità dell'intensità di luce, e perciò della grandezza stellare, può avvenire solo quando fra le superiori grandezze passa la relazione:

$$Kb \sim \frac{1}{2\pi}$$

essendo:

$$K = \frac{c\tau}{d} \qquad ; \qquad b = \frac{v}{c}$$

e dove il segno $\sim$ sta ad indicare che il prodotto Kb può variare dentro limiti piuttosto ampi, attorno al valore $\frac{1}{2\pi}$; il quale è quello per cui il fenomeno di variabilità assume il massimo sviluppo, presentando la massima ampiezza e massimi di luce spostati di un quarto di periodo rispetto ai massimi della velocità radiale.

Ricorderò ancora che la particolare forma della curva di luce e l'ampiezza del cambiamento risultano legate fra loro e dipendenti insieme dal

(1) Cfr. M. La Rosa, « Nuovo Cimento », gennaio 1924; « Zeitschr. f. Phys. », *31*, p. 333; C. Cannata, « Rend. Lincei », VI, p. 296 (1927); id., VII, p. 337 (1928).

valore del nostro prodotto, in modo che in base ai valori di questo si dovrebbe poter fare una classificazione razionale delle variabili, e viceversa. Possiamo dunque dire – sempre secondo il mio schema – che per tutte le variabili di uno stesso tipo, se la classificazione è fondata in modo esatto sui criteri anzidetti, si deve avere approssimativamente uno stesso valore di Kb [1].

In altre parole, la relazione:

$$Kb = \frac{p_0}{2\pi} \tag{1}$$

non solo esprime la condizione necessaria e sufficiente alla comparsa del fenomeno di « variabilità » in dipendenza del moto, ma con l'intesa che p_0 abbia uno piuttosto che un altro valore numerico, serve a determinare i « diversi tipi » di variabili, in modo che ad ogni tipo corrisponda un certo p_0 e viceversa. Chiameremo perciò questo fattore p_0, il « parametro » del tipo [2].

Si supponga ora che fra le variabili, di un certo tipo si vogliano considerare separatamente quelle che appartengono ad un « ammasso stellare » assai lontano; basta allora introdurre nella (1) la condizione che la d sia anch'essa praticamente costante, e si ha la condizione:

$$\frac{v}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\gamma p_0 \tag{2}$$

essendo $\gamma = \frac{c^2}{d}$ una quantità *sensibilmente costante* che per brevità *chiameremo* la « *costante dell'ammasso* ».

Moltiplicando la (3) per 2π e ponendo $\frac{2\pi}{\tau} = \omega$ e $v = \omega r$ avremo:

$$\omega^2 r = \gamma p_0 . \tag{3}$$

Queste formole esprimono due deduzioni estremamente importanti della teoria balistica.

La (2) dice che:

Fra tutte le stelle doppie presenti in un ammasso possono apparirci come « variabili » di un determinato tipo, solo quelle per le quali il rapporto $\frac{v}{\tau}$

(1) In realtà, volendo stabilire dei criteri più esatti di classificazione occorrerà tenere conto anche del moto dell'astro centrale, ed eventualmente degli altri compagni, e costruire la curva di luce risultante dalla somma dei cambiamenti di intensità dei singoli corpi. In generale, però, si potrà procedere nel modo da noi supposto, prendendo a base il cambiamento più cospicuo ed apportando le modificazioni, dipendenti dal moto degli altri corpi le quali prendono il carattere di perturbazioni.

(2) L'ellitticità delle orbite complica queste considerazioni, in quanto rende variabile la p_0, ma si può senza gravi difficoltà fare l'estensione, riferendoci ai valori medi.

è uguale al prodotto della costante dell'ammasso per il parametro del tipo diviso per 2π.

La (3) dice che *possono apparirci come variabili di un dato tipo solo quelle doppie dell'ammasso per le quali l'accelerazione media*; a cui è soggetto il compagno girevole per parte dell'altro astro, *è uguale al prodotto della costante dell'ammasso per il parametro del tipo.*

E poichè questa accelerazione è quella del moto del compagno rispetto al centro della stella principale, avremo che essa dipende dalla massa di questi corpi e dalla loro mutua distanza, nel modo espresso dalla legge di Newton, sicchè possiamo dare alla (3) l'espressione seguente:

$$\frac{\gamma M}{r^2} = \gamma p_0 \tag{4}$$

dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema ed r il raggio dell'orbita descritto dal compagno nella rotazione attorno all'altro astro.

Scrivendo poi nella (2) $2\pi \frac{r}{\tau}$ al posto di v ed eliminando fra essa e la (4) la r, troviamo la notevolissima relazione:

$$\frac{M}{\tau^4} = p$$

dove p è una nuova costante (che chiamerò « costante di Leavitt ») data da

$$p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \gamma^3 p_0^3 .$$

Quest'ultima relazione ci dice che fra tutte le doppie di un ammasso possono apparirci come *variabili di un dato tipo, solo quelle per cui avviene che la massa totale dei corpi costituenti sia proporzionale* alla quarta potenza del periodo di rotazione del compagno (ossia del « cambiamento di luce »; la costante di proporzionalità essendo uguale alla costante di Leavitt (calcolata per quel tipo e per quell'ammasso).

Ora fra tutte le variabili conosciute, il gruppo delle Cefeidi risponde molto bene ai criterii di classificazione sopra accennati, per esse cioè si può supporre che sia soddisfatta (praticamente) la condizione Kb = costante. Si tratta di un insieme di stelle che hanno curve di luce assai distintamente caratterizzate, ed ampiezze di variazioni poco diverse fra loro.

Se dunque ci fermiamo a considerare le *cefeidi* di uno *stesso ammasso* dobbiamo – secondo lo schema balistico – aspettarci che sia soddisfatta la (5) cioè che sia:

$$M = p\tau^4$$

e potremmo di più prevedere l'esistenza di un legame fra la *grandezza stellare assoluta* (che come si sa è data da $2.5 \log \cdot E$, essendo E la quantità totale di luce irradiata della stella) ed il periodo di variabilità τ qualora fosse possibile rilegare fra loro la M e la E.

L'esistenza di un legame fra queste due grandezze, relative ad una stessa stella, è oramai un fatto indubitabile, e ci riserbiamo di riferirne in una successiva Nota, e di trarne partito per stabilire la desiderata relazione fra la grandezza stellare assoluta ed il periodo.

Chimica. — *Nitroso-ditiocarbammati del cobalto* [1]. Nota [2] del Corrisp. L. Cambi e di A. Gagnasso.

Recentemente abbiamo descritto alcuni composti appartenenti ad una nuova serie di nitroso-complessi del ferro, corrispondenti alla formola generale

$$[(R_2N \cdot CS \cdot S)_2 Fe \cdot NO]$$ [3].

Notavamo allora che i ditiocarbammati ferrosi e quelli del cobalto bivalente si auto-ossidano con grande facilità, passando a sali ferrici e cobaltici, come risultava anche dalle ricerche di Delépine [4].

In eccesso di ditiocarbammato ammonico od alcalino, la reazione nel caso del cobalto procede secondo lo schema seguente, come noi stessi abbiamo verificato:

$$2\,[(R_2N \cdot CS_2)_2 Co] + 2\,(R_2N \cdot CS_2)' + \\ + H_2O + 0.5\ O_2 \rightarrow 2\,[(R_2N \cdot CS_2)_3 Co] + 2\,OH'$$

L'analogo comportamento dei ditiocarbammati di cobalto rispetto a quelli del ferro faceva prevedere un'elevata reattività dell'NO anche per i sali cobaltosi.

Infatti, in sospensione acquosa od acquoso-alcoolica, in assenza d'aria, i ditiocarbammati del cobalto bivalente assorbono con grande attività NO per dar luogo a complessi in tutto analoghi a quelli su accennati del ferro:

$$[(R_2N \cdot CS_2)_2 Co] + NO \rightarrow [(R_2N \cdot CS_2)\,Co \cdot NO]$$

La reazione si compie in modo praticamente quantitativo.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 1° marzo 1931.

(3) Questi «Rendiconti». (6), 13 (1931) 254.

(4) «Bull. Soc. Chim.» (4), 3 (1908) 643.

I nitroso–ditiocarbammati da noi finora indagati hanno comportamento simile a quello dei corrispondenti derivati del ferro. Sono solubili in cloroformio, benzolo, solfuro di carbonio. Allo stato cristallino hanno colore nero–rossastro: le soluzioni assumono colore giallo–bruno intenso. Resistono all'azione del solfato di rame, ma si decompongono a caldo con soluzione di solfato d'argento sviluppando N_2O ed NO. Hanno peso molecolare semplice.

In merito alla costituzione dei nuovi complessi che descriviamo, osserveremo che sono noti i seguenti nitroso–complessi del cobalto:

$[(NH_3)_5\,CoNO]\,X_3$; $[(S_2O_3)_2\,Co\,(NO)_2]\,K_3$; $[(R_2N\cdot CS_2)_2\,Co\cdot NO]$

serie nera e serie rossa — giallo–bruno — giallo–bruno

Dalle recenti ricerche di Rây, Bhar e Bose [1] si deduce che per lo meno i sali della serie rossa delle nitroso–pentammine sono cobaltici. Le diverse indagini di L. Cambi [2] inducono pure ad individuare il cobalto trivalente nel nitroso–tiosolfato. L'insieme dei caratteri dei nitroso–ditiocarbammati, che presentano anche notevolissime analogie con i sali cobaltici $[R_2N\cdot CS_2)_3\,Co]$, porterebbe alle stesse conclusioni sulla valenza del metallo contenuto nei nuovi complessi.

Queste considerazioni conducono ad interessanti rilievi su gli aggruppamenti — NO a funzione alogenoidica. Cioè, nei nitroso–complessi che descriviamo, la cui grandezza molecolare risponde alla formola semplice, sarebbe contenuto un residuo (NO′) nettamente distinto da quello dell'acido iponitroso propriamente detto, $(N_2O_2)''$, ben noto.

Rimandiamo ad altra Nota l'ulteriore discussione sulla struttura cui accenniamo, allorchè riferiremo sui diversi dati delle ricerche che abbiamo in corso.

Parte sperimentale (con la collaborazione di A. Tanara).

Nitroso-N · N–*dimetil-ditiocarbammato* $[(CH_3)_2\,N\cdot CS_2)_2Co\cdot NO]$. Alla soluzione al 2 % circa di acetato di cobalto, in atmosfera di NO ed a 0°, venne gradatamente aggiunta quella pure acquosa di dimetil-ditiocarbammato ammonico o di dimetilammonio, in rapporto di poco eccedente due molecole per una di acetato. La sospensione del sale cobaltoso, che immediatamente precipita, venne mantenuta in viva agitazione in corrente di NO. Dopo circa un'ora l'assorbimento è completo.

Il nitrosocomplesso insolubile, di colore bruno–verdastro, venne separato per filtrazione, lavato, essicato a freddo nel vuoto, infine cristallizzato

(1) « J. Indian. Chem. Soc. ». 5 (1928) 499.
(2) Questi « Rendiconti » (6), 6 (1927) 448.

da soluzioni cloroformiche diluite, per lenta evaporazione nel vuoto a freddo. Il nitroso–ditiocarbammato si presenta in minuti cristalli, neri–rossastri. La soluzione in cloroformio è giallo–bruna.

All'analisi è risultato:

	Co	S	N
calcolato	17.91 %	38.95	12.75
trovato	18.12 %	39.25	12.71

La determinazione del peso molecolare venne compiuta in bromoformio:

solvente gr. 43.12 ; sostanza gr. 0.1830 ; $\Delta t = 0°.170$
peso molecolare calcolato 329 ; trovato 359

Nitroso-N–*piperidil–ditiocarbammato* $[(C_5H_{10}N \cdot CS_2)_2Co \cdot NO]$. Il nitroso–complesso piperidilico venne preparato con lo stesso metodo del precedente, impiegando piperidil–ditiocarbammato d'ammonio o di piperidil-ammonio. Possiede caratteri analoghi a quelli del derivato dimetilico. Venne pure purificato dal cloroformio.

L'analisi ha fornito i seguenti risultati:

	Co	S	N
calcolato	14.41 %	31.33	10.26
trovato	14.24 %	31.48	10.20

Il peso molecolare venne pure determinato in bromoformio. È risultato:

solvente gr. 44.61 ; sostanza gr. 0.2160 ; $\Delta t = 0°.180$
peso molecolare calcolato 409 ; trovato 390.

Entrambi i nitrosoderivati che descriviamo posseggono elevata stabilità allo stato cristallino.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo.* Nota di F. Tricomi, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. Il prof. Levi-Civita, in una sua recente Nota [2], ha richiamata l'attenzione del pubblico matematico su alcune semplici e interessanti proprietà dell'insieme Γ dei baricentri (geometrici) delle ∞^3 sezioni piane di un corpo omogeneo e finito S, ch'è curioso fossero finora rimaste inosservate. In particolare l'A. si è occupato di determinare le *direttrici ortobariche* del corpo, cioè le linee tali che, guidando per un loro punto generico G il piano normale alla curva, la corrispondente sezione del corpo S ha proprio G come baricentro; distinguendo tre casi, tutti parimenti possibili *a priori*, secondochè l'insieme Γ è una varietà a tre dimensioni (nel qual caso il corpo S verrà detto *barosterico*) oppure a due dimensioni (caso del corpo *baropipedo*) o infine a una dimensione soltanto (corpo *barogrammico*).

Come esempi di corpi baropipedi o barogrammici, il prof. Levi-Civita ha rispettivamente indicato le *piastre* cilindriche di spessore infinitesimo e i *tubi* infinitamente sottili, nei quali, *a meno d'infinitesimi d'ordine superiore*, i baricentri di *pressochè* tutte le sezioni piane appartengono alla sezione mediana della piastra o, rispettivamente, all'asse del tubo. Ciò però, si badi bene, vale solo nell'ambito approssimato suaccennato, che è quello in cui occorre mettersi p. es. dal punto di vista tecnico, chè se invece si vogliono considerare le cose da un punto di vista rigoroso, esse cambiano sostanzialmente. Invero dimostrerò, nella presente Nota che, *rigorosamente parlando*, sotto condizioni assai poco restrittive, *ogni corpo finito è barosterico*. Anzi si può ulteriormente precisare che l'insieme Γ comprende almeno *quasi* tutti i punti interni ad S, coincidendo con S sempre che questo sia un corpo *convesso*. La « *densità* » dei baricentri G (nel senso che sarà in appresso spiegato) è però, come vedremo in una Nota che seguirà prossimamente, ben lungi dall'essere costante nelle varie regioni del corpo S. In particolare se

(1) Nella seduta del 15 marzo 1931.

(2) *Sezioni piane di un corpo e direttrici ortobariche*, questi «Rendiconti» (6), *12*, (1930^2), pp. 535-541.

questo è un ellissoide infinitamente schiacciato (e quindi una specie di *piastra*) o infinitamente allungato (una specie di *tubo*) vedremo che detta densità è *praticamente nulla* (infinitesima del sesto ordine!) fuori del piano equatoriale della piastra o rispettivamente dell'asse del tubo ellissoidico, conformemente a quanto osservato dal prof. Levi-Civita.

2. *Ogni corpo finito* S *tale che le coordinate del baricentro* G *della sua sezione con un piano* ω *siano funzioni continue delle coordinate del piano* ω, *è barosterico, e ciò ancorchè la continuità di dette coordinate venga a mancare in un insieme discreto* E *di piani* ω *eccezionali.*

Infatti detto O un punto *generico* interno ad S, e cioè fuori degli eventuali piani eccezionali di E, consideriamo una sfera Π, di raggio qualsiasi, con centro in O e facciamo corrispondere a ciascun piano (orientato) ω della stella (O) il punto P in cui Π è incontrata dalla normale positiva ad ω condotta per O, e viceversa. Saremo così venuti a stabilire una corrispondenza biunivoca e continua senza eccezioni fra i piani orientati ω della stella (O) e i punti P della sfera Π. Ma, d'altra parte, ogni piano ω dà luogo (indipendentemente dalla orientazione di cui ci è giovato supporlo provvisto) ad un'intersezione τ col solido S avente come baricentro un ben determinato punto G del piano stesso, cioè ad esso è associato un ben determinato vettore parallelo al piano $\boldsymbol{g} = \mathrm{G} - \mathrm{O}$; dunque ad ogni punto P della sfera Π possiamo associare un ben determinato vettore tangenziale $\boldsymbol{g}$, funzione continua *senza eccezioni* del posto, considerato che O è stato scelto fuori degli eventuali piani eccezionali dell'insieme E.

Ma, per un teorema topologico di Brouwer [1], un vettore tangenziale funzione univoca, continua e finita del posto su di una superficie chiusa, bilatera, semplicemente connessa, deve annullarsi in almeno un punto; dunque esisterà almeno un punto P_0 della sfera Π in cui sarà $\boldsymbol{g} = 0$, cioè esisterà almeno un piano ω_0 della stella (O) il cui baricentro cade proprio in O. Ne segue che *la varietà* Γ *dei baricentri delle sezioni piane di* S *comprende almeno tutti i punti interni a questo corpo* (*ma fuori degli eventuali piani eccezionali* E) *ciò che assicura che essa è sempre tridimensionale.*

3. Dal teorema precedente discende immediatamente che, *se il corpo* S *è convesso* (*e manca la varietà eccezionale* E) *il corpo* Γ *dei baricentri coincide col corpo* S *stesso*, come il prof. Levi-Civita aveva già osservato nel caso della sfera. Infatti, basta osservare che, se il corpo S è convesso, il baricentro di qualsivoglia sua sezione dev'essere interno alla sezione stessa e quindi anche ad S, epperò la varietà Γ non può estendersi al di fuori di S.

Invece se il corpo S non è convesso, la varietà Γ comprende anche punti esterni ad S. Per esempio, se il corpo S ha una cavità interna chiusa, è chiaro che tutti i punti O di questa appartengono a Γ, potendosi

(1) L. E. J. Brouwer, *On continuous vector distributions on surfaces* (1ª comunicazione) « Procedings K. Akademie van Wetensch. te Amsterdam », *11*² (1909), pp. 850–858, Theor. 2.

per ciascuno di essi ripetere le considerazioni del § 2, dato che *tutti* i piani della stella (O) sono necessariamente piani secanti di S.

A proposito della varietà Γ nel caso di un corpo S non convesso, ci limiteremo per ora ad osservare che *se* π *è un piano bitangente* (*nei due punti* A e A′) *della frontiera* σ *di* S *che lasci il corpo* S *tutto da una stessa banda, e se inoltre* A *e* A′ *sono due punti ellittici della superficie* σ*; allora tutti i punti del segmento rettilineo* AA′ *appartengono alla frontiera della varietà* Γ.

Infatti è ovvio anzitutto che i punti del segmento AA′ non possono essere interni in senso ristretto a Γ perchè questa non può aver punti da banda opposta di S rispetto al piano π. Dico però che a ciascun punto M di AA′ sono infinitamente prossimi quanti si vuole punti di Γ. Invero, detti ε ed ε' due infinitesimi, consideriamo il piano π_1, infinitamente prossimo a π, passante pei due punti $A + \varepsilon \boldsymbol{n}$ e $A' + \varepsilon' \boldsymbol{n}$, dove $\boldsymbol{n}$ denota il versore normale a π e diretto dalla banda del corpo S, e pel punto improprio dell'*asse* del segmento AA′ nel piano π. Avendo supposto che i due punti A e A′ siano due punti ellittici di σ, il piano π_1 segherà questa superficie secondo due piccole curve chiuse che, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, potremo identificare con due piccole ellissi aventi i centri in due punti infinitamente prossimi rispettivamente ad A e ad A′ e per lunghezze dei semiassi rispettivamente:

$$\sqrt{\rho_1 \varepsilon} \quad , \quad \sqrt{\rho_2 \varepsilon} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\rho_1' \varepsilon'} \quad , \quad \sqrt{\rho_2' \varepsilon'} \, ,$$

avendo indicati con ρ_1, ρ_2 e ρ_1', ρ_2' i raggi principali di curvatura della superficie σ in A ed A′. Ne segue che, sempre a meno dei soliti infinitesimi d'ordine superiore, l'intersezione del corpo S col piano π_1 può riguardarsi come costituita da due aree di misura

$$\pi\varepsilon\sqrt{\rho_1 \rho_2} \qquad \text{e} \qquad \pi\varepsilon'\sqrt{\rho_1' \rho_2'}$$

cioè di misura

$$\frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{K}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi\varepsilon'}{\sqrt{K'}} \, ,$$

avendo indicato con K e K′ la curvatura di Gauss della superficie in A e A′, aventi per baricentri rispettivamente i punti A e A′. Pertanto il baricentro di tale intersezione è un punto infinitamente prossimo al punto che divide internamente il segmento AA′ nel rapporto

$$\frac{\varepsilon'}{\sqrt{K'}} \, : \, \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}} \, ,$$

e quindi infinitamente prossimo ad M se ε ed ε' sono stati scelti in modo che sia

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{K'}{K}} \, \frac{AM}{MA'} \, .$$

Per esempio, con l'ausilio del teorema precedente è facile vedere che se il corpo S è costituito da due sfere esterne l'una all'altra, il corpo Γ è costituito da tutti i punti compresi fra il cono tangente alle due sfere non avente il vertice compreso fra i loro centri, e le due calotte più lontane fra loro determinate sulle due sfere dai paralleli di contatto col cono predetto.

4. Ci proponiamo ora di esaminare più da vicino la portata dell'ipotesi fondamentale che le coordinate del baricentro dell'intersezione di S con un piano ω siano funzioni continue, almeno generalmente, delle coordinate del piano. La cosa non è superflua in quanto, se il corpo S non è convesso sì che il piano ω, pur mantenendosi secante, possa toccare in qualche punto la superficie σ, tale continuità delle coordinate del baricentro non è cosa evidente *a priori*; anzi, se la superficie σ contiene delle faccette piane, si vede subito che essa verrà invece certamente a mancare quando il piano ω venga a passare per una di tali faccette.

Allo scopo indicato studiamo i piccoli spostamenti del baricentro G della sezione τ del corpo S col piano ω, al variare infinitamente poco di quest'ultimo, ossia, più precisamente, cerchiamo di maggiorare le coordinate $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ del baricentro G' del piano ω', infinitamente prossimo ad ω, rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y, z) con l'origine in G e il piano ω come piano $x\,y$; nell'ipotesi che, rispetto a detti assi, l'equazione di ω' sia

$$z = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 , \tag{1}$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 sono tre infinitesimi. A tal uopo osserviamo anzitutto che basterà occuparci di Δx e Δy soltanto perchè, essendo G' un punto del piano ω', dovrà essere

$$\Delta z = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 , \tag{2}$$

epperò Δz tenderà certamente a *zero* per $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 tendenti a *zero*. Ciò premesso osserviamo che, poichè in ogni proiezione parallela fra due piani, il baricentro di un'area si proietta nel baricentro dell'area proiettata, Δx e Δy possono interpetrarsi come le coordinate nel piano $x\,y$ del baricentro G'' dell'area τ'', proiezione ortogonale sopra ω dell'intersezione τ' del piano ω' col corpo S, epperò sussisteranno le formule

$$\tau'' \Delta x = \iint_{\tau''} x\, dx\, dy \quad , \quad \tau'' \Delta y = \iint_{\tau''} y\, dx\, dy , \tag{3}$$

accanto alle quali possono mettersi le altre analoghe:

$$0 = \iint_{\tau} x\, dx\, dy \quad , \quad 0 = \iint_{\tau} y\, dx\, dy \tag{4}$$

che esprimono che l'origine G è il baricentro dell'intersezione τ di S col piano ω. Sottragghiamo membr'a membro le (4) dalle (3), avremo così le formule più espressive:

$$(5) \qquad \tau'' \Delta x = \iint_{\Delta\tau} x\,dx\,dy \quad , \quad \tau'' \Delta y = \iint_{\Delta\tau} y\,dx\,dy ,$$

dove $\Delta\tau$ denota l'area compresa fra i due contorni s ed s'' di τ e τ'' rispettivamente considerata come *positiva* o *negativa* secondochè, nella regione che si considera, s'' è esterna ad s o viceversa.

Giunti a questo punto osserviamo ulteriormente: 1° che, essendo il corpo S finito, esisterà certamente un numero positivo N tale che, entro tutto S e nelle immediate vicinanze della sua frontiera (regione occupata dalle curve come la s'') sia sempre $|x| < N$, $|y| < N$; 2° che, se si suppone che la curva s', intersezione della frontiera σ di S col piano ω', sia tutta interno al solido generata da una sferetta di raggio η il cui centro percorra la curva s, allora la *larghezza* del campo $\Delta\tau$ non sarà mai maggiore di 2η, epperò l'area complessiva di questo campo, considerata indipendentemente dai segni che affettano eventualmente le sue regioni, non sarà certo superiore a $2\eta l$, dove l denota la lunghezza della curva s. Ne segue che, ferma l'ultima ipotesi, dalle (5) può dedursi che

$$|\Delta x| < \frac{2Nl}{\tau''}\eta \quad , \quad |\Delta y| < \frac{2Nl}{\tau''}\eta$$

epperò, per $\eta \to 0$, Δx e Δy tenderanno certamente a *zero* e se ne conclude che:

Le coordinate del baricentro dell'intersezione di un corpo finito S *con un piano variabile* ω *sono certo funzioni continue delle coordinate del piano se, dato il numero positivo* η *piccolo a piacere, si può sempre determinare un intorno del piano* ω *tale che, detto* ω' *un piano qualsiasi di tale intorno, i punti della curva* s', *intersezione di* ω' *con la frontiera* σ *di* S, *non distino mai più di* η *dalla curva* s, *intersezione della superficie* σ *col piano* ω.

In una successiva Nota esamineremo alcune altre conseguenze delle (5) e studieremo, come si è accennato in principio, la « *densità* » della distribuzione dei baricentri G nelle varie regioni del corpo Γ.

Matematica. — *Sull'operatore di Laplace e sulle equazioni dell'Elasticità negli spazi curvi.* Nota di T. Boggio, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Nello spazio ordinario, l'operatore di Laplace applicato ad un vettore $\boldsymbol{u}$, cioè $\Delta' \boldsymbol{u}$, si esprime colla nota formula [2]:

$$\Delta' \boldsymbol{u} = \text{grad div } \boldsymbol{u} - \text{rot rot } \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

Se lo spazio è *curvo*, la formula precedente va completata con un termine dipendente dalla curvatura dello spazio; ciò è mostrato in questa Nota, ove ne faccio poi l'applicazione alle equazioni dell'Elasticità negli spazi curvi; per ultimo espongo alcune formule utili per il calcolo del grad, div, e rot, mediante elementi intrinseci dello spazio curvo.

1. Consideriamo una varietà V_n ad n dimensioni, e sia $\boldsymbol{u}$ un vettore tangente ad essa in un suo punto qualunque Q; allora è noto che se si considerano i due differenziali superficiali di 2° ordine, $\delta_v d_v \boldsymbol{u}$ e $d_v \delta_v \boldsymbol{u}$, essi non sono uguali (come avviene negli spazi euclidei), ma si ha invece (*Geometria diff.*, p. 187) [3]

$$\delta_v d_v \boldsymbol{u} - d_v \delta_v \boldsymbol{u} = \mathfrak{R}\, dQ\, \delta Q\, \boldsymbol{u},$$

ove $\mathfrak{R}$ è l'omografia (di 3° ordine) di Riemann relativa alla V_n.

La precedente relazione può ancora scriversi (*Geometria diff.*, pp. 196 e 188):

$$k \frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{dQ^2} - \frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{dQ^2} = K k \mathfrak{R} \boldsymbol{u}. \tag{2}$$

Ciò premesso, vogliamo calcolare il vettore $\text{grad}_v K \left(d_v \boldsymbol{u}/dQ\right)$, ove grad_v è il gradiente superficiale (*Geometria diff.*, p. 192), e stabilire così la formula:

$$\text{grad}_v K \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} = \text{grad}_v \text{div}_v \boldsymbol{u} - v \mathfrak{R} \boldsymbol{u}, \tag{3}$$

ove div_v è la divergenza superficiale (*Geometria diff.*, p. 197).

(1) Nella seduta del 15 marzo 1931.

(2) Burali-Forti e Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*; vol. I: *Trasformazioni lineari*, p. 203 (Zanichelli, Bologna, a. 1929).

(3) Questa citazione sta ad indicare l'opera: Burgatti, Boggio, Burali-Forti, *Geometria Differenziale* (Zanichelli, Bologna, a. 1930).

Infatti, dalla definizione di divergenza superficiale (*Geometria diff.*, p. 197, formula (41)[1]) e con ovvie trasformazioni, si ha ricordando la (2):

$$d_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} = d_v \mathrm{I}_1 \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} = \mathrm{I}_1 d_v \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} = \mathrm{I}_1 \left(\frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{dQ^2} dQ \right) =$$

$$= \mathrm{I}_1 \left(\mathrm{k} \frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{dQ^2} dQ \right) - \mathrm{I}_1 (\mathrm{K k} \mathfrak{R} \boldsymbol{u} \, dQ);$$

ma dalla definizione dell'operatore v e del gradiente superficiale (*Geometria diff.*, pp. 153 e 192) si trae:

$$\mathrm{I}_1 \left(\mathrm{k} \frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{dQ^2} dQ \right) = \mathrm{v} \left(\mathrm{K} \frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{dQ^2} \right) \times dQ =$$

$$= \mathrm{v} \frac{d_v}{dQ} \left(\mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} \right) \times dQ = \left(\operatorname{grad}_v \mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} \right) \times dQ;$$

analogamente, ricordando che (*Geometria diff.*, p. 188) $\mathrm{K}\mathfrak{R} = -\mathfrak{R}$, risulta:

$$\mathrm{I}_1 (\mathrm{K k} \mathfrak{R} \boldsymbol{u} \, dQ) = \mathrm{I}_1 (\mathrm{k} \mathfrak{R} \boldsymbol{u} \, dQ) = -\mathrm{I}_1 (\mathrm{k K} \mathfrak{R} \boldsymbol{u} \, dQ) = -(\mathrm{v} \mathfrak{R} \boldsymbol{u}) \times dQ.$$

Sostituendo si può scrivere:

$$\operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} \times dQ = \left(\operatorname{grad}_v \mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} - \mathrm{v} \mathfrak{R} \boldsymbol{u} \right) \times dQ,$$

e per l'arbitrarietà di dQ si conclude la (3).

2. È noto che $\mathrm{v}\mathfrak{R}$ è un'omografia ordinaria (anzi una dilatazione) legata in modo molto semplice all'*omografia di gravitazione* θ (secondo la teoria della relatività einsteiniana), e precisamente, posto $\psi = \mathrm{v}\mathfrak{R}$, si ha (*Geometria diff.*, p. 194):

$$\psi - \mathrm{I}_1 \psi / 2 = \theta,$$

ne segue, prendendo l'invariante primo:

$$\mathrm{I}_1 \psi - n \mathrm{I}_1 \psi / 2 = \mathrm{I}_1 \theta,$$

da cui: $\mathrm{I}_1 \psi = 2 \mathrm{I}_1 \theta / (2 - n)$, quindi:

$$\mathrm{v} \mathfrak{R} = \theta - \mathrm{I}_1 \theta / (n - 2),$$

(1) Approfitto dell'occasione per far rilevare un ovvio errore di stampa nella citata formula (41): nel secondo membro va scritto $\boldsymbol{u}$ al posto di μ.

e sostituendo nella (3) avremo:

$$(3') \qquad \operatorname{grad}_v \mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{d\mathrm{Q}} = \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} - \left(\theta \boldsymbol{u} - \frac{\mathrm{I}_1 \theta}{n-2} \boldsymbol{u}\right).$$

Come si sa, per uno spazio euclideo, si ha $\theta = 0$.

Supponiamo ora che la varietà V_n abbia una *curvatura riemanniana costante* c; allora è noto (*Geometria diff.*, p. 204) che $\mathfrak{R} = c\xi_3$, ove ξ_3 è l'omografia (di 3° ordine) tale che, qualunque siano i vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, si ha:

$$(4) \qquad \xi_3 \boldsymbol{ab} = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Ne segue:

$$\mathrm{v}\mathfrak{R}\boldsymbol{u} = c\,\mathrm{v}\xi_3 \boldsymbol{u};$$

ma è facile vedere [1] che:

$$\mathrm{v}\xi_3 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - n\boldsymbol{u};$$

infatti, se $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ sono vettori unitari, a due a due ortogonali, tangenti alla V_n in Q, si ha (*Geometria diff.*, p. 154), ricordando la (4):

$$\mathrm{v}\xi_3 \boldsymbol{u} = \sum_r \xi_3 \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}_r \boldsymbol{u}_r = \sum_r (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - n\boldsymbol{u},$$

Perciò, in questo caso, la (3) diviene:

$$(5) \qquad \operatorname{grad}_v \mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{d\mathrm{Q}} = \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} + c(n-1)\boldsymbol{u}.$$

Tornando al caso generale, se si pone:

$$(6) \qquad \beta = -l \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} - m\left(\frac{d_v \boldsymbol{u}}{d\mathrm{Q}} + \mathrm{K}\frac{d_v \boldsymbol{u}}{d\mathrm{Q}}\right),$$

ove l, m sono costanti, ne segue, dalla (3'):

$$(7) \quad \operatorname{grad}_v \beta = -(l+m)\operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} - m\Delta_2' \boldsymbol{u} + m\left(\theta \boldsymbol{u} - \frac{\mathrm{I}_1 \theta}{n-2} \boldsymbol{u}\right),$$

formula che applicheremo fra poco.

(1) Burali-Forti et Boggio, *Espaces courbes*, etc., p. 49 (S. T. E. N., Torino, a. 1924).

3. Supponiamo, in particolare, $n = 3$, cioè la varietà che si considera sia una V_3; allora nelle (3′), (6) si deve porre, com'è noto (*Geometria diff.*, p. 249) $\theta = \mu$, ove μ è l'omografia di Ricci per la V_3. Se poi la curvatura riemanniana della V_3 è eguale ad una costante c, la (5) porge:

$$(5') \qquad \operatorname{grad}_v \mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} = \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} + 2c\boldsymbol{u}.$$

Se ora si considera il vettore superficiale $\Delta'_v \boldsymbol{u}$, esso è definito da:

$$\Delta'_v \boldsymbol{u} = \operatorname{grad}_v \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ},$$

e poichè è chiaro che:

$$\frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} = \mathrm{K} \frac{d_v \boldsymbol{u}}{dQ} + (\operatorname{rot}_v \boldsymbol{u}) \bigwedge,$$

dalla (3′), ricordando che (*Analisi vettoriale generale*, vol. I, p. 190) $\operatorname{grad}_v (\boldsymbol{v} \bigwedge) = -\operatorname{rot}_v \boldsymbol{v}$, risulta:

$$(8) \qquad \Delta'_v \boldsymbol{u} = \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}_v \operatorname{rot}_v \boldsymbol{u} - (\mu\boldsymbol{u} - \mathrm{I}_1 \mu \cdot \boldsymbol{u}),$$

e dalla (5′) nel caso della curvatura costante:

$$(8') \qquad \Delta'_v \boldsymbol{u} = \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}_v \operatorname{rot}_v \boldsymbol{u} + 2c\boldsymbol{u}.$$

Le formule (8), (8′) mostrano come va modificata l'espressione euclidea del $\Delta' \boldsymbol{u}$, quando lo spazio in cui si opera è *curvo*.

4. Da queste formule si deduce subito l'equazione dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo, immerso nella V_3, e soggetto a forze di massa, di vettore $\mathbf{F}$ (riferite all'unità di volume); basta partire dalla equazione generale dell'equilibrio dei mezzi continui $\mathbf{F} = \operatorname{grad}_v \beta$, ove β è l'omografia (dilatazione) degli sforzi interni, e osservare che per i corpi isotropi la relazione fra la dilatazione β e il vettore spostamento $\boldsymbol{u}$ è precisamente data dalla (6), ove l, m sono le costanti di Lamé [1]; sussiste allora la (7), ove $n = 3$, che può essere scritta, in virtù della (8):

$$\mathbf{F} = -(l + 2m) \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} + m \operatorname{rot}_v \operatorname{rot}_v \boldsymbol{u} + 2m (\mu\boldsymbol{u} - \mathrm{I}_1 \mu \cdot \boldsymbol{u});$$

questa è l'equazione dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, immersi in uno spazio curvo.

(1) Burali-Forti et Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. II; *Applications à la Mécanique et à la Physique*, p. 29.

5. Termineremo coll'osservare che se nella varietà V_n si considera una ennupla di congruenze *ortogonali* (*Geometria diff.*, p. 264), e si indicano con $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ dei vettori unitari, tangenti in un punto Q alle curve di tali congruenze, e quindi a due a due ortogonali, l'invariante primo di un'omografia ξ, che trasforma vettori tangenti alla V_n in Q in vettori pure tangenti alla V_n in Q, si può esprimere così:

$$\mathrm{I}_1 \xi = \sum_i \boldsymbol{u}_i \times \xi \boldsymbol{u}_i ;$$

in particolare, se $\boldsymbol{u}$ è un vettore tangente alla V_n in Q, e si pone $\xi = d_v \boldsymbol{u}/d\mathrm{Q}$, risulta:

$$\mathrm{div}_v \boldsymbol{u} = \sum_i \boldsymbol{u}_i \times \frac{d_v \boldsymbol{u}}{d\mathrm{Q}} \boldsymbol{u}_i = \sum_i \boldsymbol{u}_i \times \frac{\partial_v \boldsymbol{u}}{\partial s_i} ,$$

ove s_i è l'arco della curva della congruenza avente per tangente $\boldsymbol{u}_i$.

Così, se μ_2 è un'omografia di 2° ordine, che trasforma coppie di vettori tangenti alla V_n in Q, in vettori pure tangenti alla V_n in Q, si ha:

$$\mathrm{v}\mu_2 = \sum_i \mu_2 \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i ;$$

e se si suppone, in particolare, $\mu_2 = d_v \xi/d\mathrm{Q}$, ne segue:

$$\mathrm{grad}_v \xi = \sum_i \frac{d_v \xi}{d\mathrm{Q}} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i = \sum_i \frac{\partial_v \xi}{\partial s_i} \boldsymbol{u}_i ,$$

e se qui si prende $\xi = d_v \boldsymbol{u}/d\mathrm{Q}$, si ottiene:

$$\Delta'_v \boldsymbol{u} = \sum_i \frac{d_v^2 \boldsymbol{u}}{d\mathrm{Q}^2} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i .$$

In particolare, per spazi curvi a 3 dimensioni, si ha

$$\mathrm{rot}_v \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \wedge \frac{\partial_v \boldsymbol{u}}{\partial s_1} + \boldsymbol{u}_2 \wedge \frac{\partial_v \boldsymbol{u}}{\partial s_2} + \boldsymbol{u}_3 \wedge \frac{\partial_v \boldsymbol{u}}{\partial s_3} .$$

Nelle formule precedenti figurano solo elementi intrinseci della varietà considerata.

Matematica (Geometria). — *Intorno alla prima direttrice di Wilczynski ed a problemi che a questa si connettono.* Nota di R. Calapso, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

1. In una precedente Nota [2] ho stabilito un teorema sullo spigolo di Green che si può enunciare nel seguente modo:

Per il punto P *di una data superficie consideriamo la cubica osculatrice ad una asintotica* a_1 *e siano* M_1, M_2, M_3 *le ulteriori intersezioni di questa cubica con la quadrica di Lie. Se* M *è il punto comune ai piani osculatori alla cubica in* M_1, M_2, M_3, *il piano che proietta* M *dalla tangente all'asintotica* a_1 *passa per lo spigolo di Green.*

Qui riprendo il soggetto per ottenere un teorema sulla prima direttrice di Wilczynski, in cui interviene un'altra volta il punto M sopra costruito, e cioè:

Per la tangente all'asintotica a_2, *passante per* P, *si conducano i piani tangenti al cono quadrico osculatore all'asintotica* a_1 (*in* P) *ed il piano proiettante* M: *il coniugato armonico di quest'ultimo rispetto alla coppia dei piani tangenti al cono passa per la direttrice di Wilczynski.*

È interessante osservare che la considerazione del detto punto M permette di costruire geometricamente lo spigolo di Green e la direttrice di Wilczynski; e quindi il piano canonico, la tangente canonica e le rette canoniche [3].

2. Per la dimostrazione dell'annunziato teorema adottiamo le notazioni della mia Nota citata. Nel sistema di riferimento ivi usato, il cono quadrico osculatore è rappresentato dall'equazione:

$$(1) \qquad 2y^2 + 18Mz^2 - 3bxz - \left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)yz = 0$$

in cui M ha un'espressione che qui è inutile trascrivere. La cubica osculatrice è data dalle equazioni parametriche (in cui indichiamo anche con u il parametro, il che non può portare ambiguità):

(1) Nella seduta del 15 marzo 1931.

(2) *Un teorema sullo spigolo di Green*, questi «Rendiconti», 1931.

(3) V. Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1926, t. I, p. 155.

$$(2)\qquad \begin{cases} x = u - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)u^2 + Mu^3 \\ y = \frac{b}{2}u^3 \\ z = \frac{b}{6}u^3 \\ t = 1 + Nu^2 + Hu^3 \end{cases}$$

e sussiste la relazione

$$(3)\qquad 3M + N = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq\right).$$

La quadrica di Lie è rappresentata dall'equazione:

$$(4)\qquad zt - xy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right)z^2 = 0\,.$$

3. Se sostituiamo in questa le espressioni (2) otteniamo l'equazione cubica:

$$(5)\ \frac{1}{u^3} - \left(\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}(3M - N)\frac{1}{u} - \left[\frac{b}{24}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) + \frac{H}{2}\right] = 0,$$

che fa conoscere i valori del parametro che dànno i punti M_1, M_2, M_3. D'altra parte le coordinate del punto comune ai piani osculatori in tre punti qualunque u_1, u_2, u_3 della cubica (2) sono date dalle formole:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_0 = \frac{1}{u_2u_3} + \frac{1}{u_1u_3} + \frac{1}{u_1u_2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + 3M \\ y_0 = \frac{b}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) \\ z_0 = \frac{b}{2} \\ t_0 = \frac{3}{u_1u_2u_3} + N\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + 3H; \end{cases}$$

tenendo conto che nel caso presente u_1, u_2, u_3 sono le radici dell'equazione (5) ed osservando le relazioni fra radici e coefficienti, ho dedotto intanto il teorema della Nota citata.

4. Qui vogliamo proiettare il punto $(x_0\,y_0\,z_0\,t_0)$ dalla tangente all'altra asintotica; otteniamo il piano

$$(7)\qquad z_0\,x - x_0\,z = 0\,;$$

poscia costruiremo il suo coniugato armonico rispetto alla coppia dei piani tangenti al cono quadrico osculatore (1), passanti per la detta tangente.

A tale scopo esprimiamo che il piano

$$x - \mu z = 0 \tag{8}$$

è tangente al cono osculatore; si avrà

$$b\mu = 6M - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)^2 \tag{9}$$

oppure $\mu = \infty$, che dà il piano tangente alla superficie [1]. Il piano coniugato armonico richiesto è rappresentato dall'equazione:

$$z_0 x - (2\mu z_0 - x_0) z = 0 . \tag{10}$$

Ora se teniamo conto delle relazioni fra le radici ed i coefficienti della equazione cubica in u ed osserviamo ancora il valore (9) di μ, abbiamo dalle (6) successivamente:

$$2\mu z_0 - x_0 = 6M - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)^2 - \frac{1}{2}(3M - N) +$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)^2 - 3M = \frac{3M + N}{2} .$$

Infine, *osservando la* (3), avremo

$$2\mu z_0 - x_0 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq\right);$$

dopo di che la (10) diventa

$$x + \left(\frac{1}{2b}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{q}{2}\right) z = 0$$

ed esprime appunto che il piano in discorso passa per la prima direttrice, come si era affermato.

(1) È chiaro con la geometria che il piano tangente alla superficie è uno dei piani in questione.

Matematica (Analisi matematica). — *Sull'integrazione delle equazioni lineari alle differenze con coefficienti costanti.* Nota di UGO BROGGI, presentata [1] dal Corrisp. L. BERZOLARI.

Ove siano note le radici dell'equazione algebrica

$$(1) \qquad r^p + A_1 r^{p-1} + \cdots + A_{p-1} r + A_p = 0,$$

dove $A_1, A_2, \cdots, A_p$ sono costanti ed è $A_p \neq 0$, si hanno a un tempo n integrali particolari dell'equazione differenziale

$$(2) \qquad y^{(p)} + A_1 y^{(p-1)} + \cdots + A_{p-1} y' + A_p y = 0$$

ed n integrali particolari dell'equazione alle differenze

$$(3) \quad f(x+p) + A_1 f(x+p-1) + \cdots + A_{p-1} f(x+1) + A_p f(x) = 0.$$

Questi ultimi sono del tipo $x^k \alpha^x$, dove k è intero non negativo, ed α è radice di (1).

Come per la equazione (2), si presenta il problema di sostituire al metodo di integrazione della (3) indicato, e che risale al Lagrange, un altro, il quale non richieda la conoscenza delle radici dell'equazione caratteristica (1).

E, come per la (2), il metodo d'integrazione cercato poggia sul fatto che, se $k \geq 0$, e

$$\frac{1}{A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \cdots + A_1 x + 1} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

è anche

$$A_p a_k + A_{p-1} a_{k+1} + \cdots + A_1 a_{p+k-1} + a_{p+k} = 0$$

mentre, se $\sum_n^k \gamma_q$ rappresenta la somma di tutti i prodotti del tipo $\gamma_{q_1} \cdot \gamma_{q_2} \cdot \cdots \cdot \gamma_{q_k}$, essendo $q_1, q_2, \cdots, q_k$ numeri interi positivi uguali o disuguali aventi per somma n, e sia

$$\sum_n^k \gamma_q = 0, \quad \text{se} \quad k > n$$

(1) Nella seduta del 1° marzo 1931.

si ha

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \overset{k}{\underset{n}{S}} A_q$$

$$(A_{p+1} = A_{p+2} = \cdots = 0).$$

1. Si voglia determinare un integrale particolare della (3) corrispondente alle condizioni iniziali

$$f(0) = \alpha_0 , f(1) = \alpha_1 , \cdots , f(p-1) = \alpha_{p-1} .$$

Basterà formare [1] la soluzione

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} t + \frac{\alpha_2}{2!} t^2 + \cdots$$

di (2) corrispondente alle condizioni iniziali

$$y_0^{(r)} = \alpha_r \qquad (r = 0 , 1 , \cdots , p-1)$$

la soluzione

$$\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} t + \frac{\beta_2}{2!} t^2 + \cdots$$

dell'equazione differenziale

$$A_p y^{(p)} + A_{p-1} y^{(p-1)} + \cdots + A_1 y' + y = 0$$

corrispondente alle condizioni iniziali

$$\beta_0 = \alpha_0 \quad , \quad \beta_r = \alpha_{-r} \qquad (r = 1 , 2 , \cdots , p-1)$$

dove $\alpha_{-1} , \alpha_{-2} , \cdots , \alpha_{-(p-1)}$ soddisfano le $p-1$ relazioni

$$A_p \alpha_{-h} + A_{p-1} \alpha_{-(h-1)} + \cdots + A_{p-h} \alpha_0 + \cdots + A_1 \alpha_{p-h-1} + \alpha_{p-h} = 0 \qquad (h = 1 , 2 , \cdots , p-1).$$

Se le serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\alpha_r}{x-r} \quad , \quad \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\beta_r}{x+r}$$

convergono, la funzione intera

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi} \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\alpha_r}{x-r} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\beta_r}{x+r} \right]$$

(1) « Rendic. Ist. Lomb. », serie 2ª, fasc. XVI–XVIII, pp. 1047-50.

uguale a α_n se $x = n \geqq 0$, uguale a β_n se $x = -n$, è la soluzione cercata. È infatti, qualunque sia x,

$$f(x+p) + A_1 f(x+p-1) + \cdots + A_p f(x) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi} \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{A_p \alpha_r + A_{p-1} \alpha_{r+1} + \cdots + A_1 \alpha_{r+p-1} + \alpha_{r+p}}{x-r} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\beta_{r-p} + A_1 \beta_{r-p+1} + \cdots + A_p \beta_r}{x+r} \right] = 0$$

poichè

$$A_p \alpha_r + A_{p-1} \alpha_{r+1} + \cdots + A_1 \alpha_{r+p-1} + \alpha_{r+p} = 0$$

$$A_p \beta_r + A_{p-1} \beta_{r-1} + \cdots + A_1 \beta_{r-p+1} + \beta_{r-p} = 0.$$

2. Ma è pure, se $L(f(x))$ designa il primo membro della (3) ed è

$$B_r = \binom{p}{r} + \binom{p-1}{r} A_1 + \cdots + \binom{r}{r} A_{p-r} \quad , \quad A_0 = 1 .$$

$$(r = 0, 1, \cdots, p).$$

$$L(f(x)) = (1 + A_1 + \cdots + A_p) f(x) + \left[\binom{p}{1} + \binom{p-1}{1} A_1 + \right.$$

$$\left. + \cdots + \binom{1}{1} A_{p-1} \right] \Delta f(x) + \cdots + \binom{p}{p} \Delta^p f(x) = B_0 f(x) + B_1 \Delta f(x) +$$

$$+ \cdots + B_p \Delta^p f(x) = 0$$

e quindi anche, per ogni valore di $h \geqq 0$

$$\Delta^h L(f(x)) = B_0 \Delta^h f(x) + B_1 \Delta^{h+1} f(x) + \cdots + B_p \Delta^{p+h} f(x) = 0.$$

Se la serie di Stirling

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^2 (x^2 - 1^2) \cdots (x^2 - (s-1)^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} f(-s) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x (x^2 - 1^2) \cdots (x^2 - s^2)}{(2s+1)!} \nabla \Delta^{2s+1} f(-s-1)$$

dove

$$\nabla f(x) = \frac{f(x) + f(x+1)}{2} ,$$

$$f(n) = \alpha_n \quad , \quad \text{se} \quad n \geqq 0$$

$$f(-n) = \beta_n \quad , \quad \alpha_0 = \beta_0$$

converge, se ne ha senz'altro, per quanto precede

$$L(f(x)) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x(x^2 - 1^2)\cdots(x^2 - (s-1)^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} L(f(-s)) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x(x^2 - 1^2)\cdots(x^2 - s^2)}{(2s+1)!} \nabla\Delta^{2s+1} L(f(-s-1)) = 0 .$$

La serie di Stirling

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + a'_s x)\, x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)\cdots(x^2 - s^2)$$

converge infatti uniformemente in ogni dominio finito del piano x, ove essa converga per due valori di x non interi e non uguali allo zero. Ed è condizione necessaria perchè una funzione $F(x)$ sia sviluppabile in serie di Stirling, se $x = re^{iv}$,

$$h(v) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log|F(re^{iv})|}{r}$$

che sia

$$h(v) \leq \psi(v), \tag{5}$$

condizione sufficiente, che sia

$$h(v) < \psi(v), \tag{6}$$

dove $\psi(v)$ è una certa funzione periodica di periodo π e $\leq \pi$ (1).

Poichè

$$\lim_{r\to\infty} \arg x = \lim_{r\to\infty} \arg(x+1)$$

è evidente che le condizioni (5) e (6) non possono venire soddisfatte da una funzione $F(x)$ senza esserlo da $F_1(x) = F(x+1)$, e pertanto anche da $\Delta F(x)$.

Colla (4) convergono pertanto anche le serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^2(x^2 - 1^2)\cdots(x^2 - (s-1)^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} f(-s+1) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x(x^2 - 1^2)\cdots(x^2 - s^2)}{(2s+1)!} \nabla\Delta^{2s+1} f(-1),$$

(1) Cfr. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, pp. 38, 39.

avente il valore α_{n+1}, se $x = n$, β_{n-1} se $x = -n$, $(n > 0)$, α_1 se $x = 0$,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x(x^2-1^2)\cdots(x^2-(s-1)^2)}{(2s)!}\Delta^{2s+1} f(-s) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x(x^2-1^2)\cdots(x^2-s^2)}{(2s+1)!}\nabla\Delta^{2s+2} f(-s-1)$$

avente il valore $\Delta\alpha_n$, se $x = n$, $\Delta\beta_n = \beta_{n-1} - \beta_n$, se $x = -n$, $(n > 0)$, $\Delta\alpha_0$ se $x = 0$.

Matematica (Fisica Matematica). — *Caratteristiche delle equazioni di Dirac e principio di indeterminazione.* Nota di G. Racah, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. Il principio di indeterminazione di Heisenberg afferma, come è noto, che un'esperienza diretta a misurare la posizione di un elettrone imprime a questo un impulso di grandezza e direzione indeterminata. L'indeterminazione di questo impulso è tanto maggiore quanto più precisa è la misura della posizione; se indichiamo infatti con Δx e Δp l'incertezza delle misure di posizione e di impulso, si ha secondo Heisenberg:

$$\Delta x\, \Delta p \geqq \frac{h}{2\pi}.$$

Per una misura di posizione infinitamente precisa l'indeterminazione dell'impulso (e perciò anche il valore medio di questo) tende dunque all'infinito; e tende ad 1 la probabilità che, dopo la misura, l'impulso abbia valore maggiore di una grandezza assegnata comunque grande. Per la formula relativistica

$$v = \frac{cp}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}$$

ad un impulso infinito corrisponde una velocità c, e perciò una misura infinitamente precisa della posizione imprime all'elettrone una velocità c.

Ora una misura di velocità, essendo $v = \frac{dP}{dt}$, richiede due misure di posizione infinitamente precise in istanti infinitamente vicini: ma la prima misura, come abbiamo visto, imprime all'elettrone una velocità c, e perciò sarà proprio c la velocità che dedurremo dalla seconda misura.

(1) Nella seduta del 15 marzo 1931.

Questa notevole conseguenza relativistica del principio di indeterminazione è stata ottenuta e discussa da vari Autori [1] per mezzo del calcolo degli operatori applicato alle equazioni relativistiche di Dirac. Ho creduto non privo di interesse il mostrare come si possa riottenere questo risultato applicando la teoria delle caratteristiche a dette equazioni, ed esaminando alcune proprietà dei loro integrali.

2. Le equazioni di Dirac hanno la forma [2]

$$(1) \qquad p_0 + \frac{eV}{c} + (\alpha, p) + \frac{e}{c}(\alpha, U) + \beta mc = 0$$

cioè

$$(1') \qquad \sum_1^4{}_\nu \left[\delta_{\mu\nu}\left(p_0 + \frac{eV}{c}\right) + \sum_1^3{}_k \alpha_{k,\mu\nu}\left(p_k + \frac{e}{c}U_k\right) + \beta_{\mu\nu}\, mc \right] \psi_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

dove

$$p_0 = -\frac{1}{c}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

le α_k e β sono le matrici di Dirac, V e U i potenziali scalare e vettore.

Ponendo

$$P_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad , \quad P_k = \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

otteniamo con le notazioni del prof. Levi-Civita [3] per gli elementi del determinante il cui annullarsi definisce le varietà caratteristiche, le espressioni

$$(2) \qquad D_{\mu\nu} = \frac{h}{2\pi i}\left(-\frac{1}{c}\delta_{\mu\nu} P_0 + \sum_1^3{}_k \alpha_{k,\mu\nu} P_k\right)$$

e perciò

$$(3) \qquad D = \|D_{\mu\nu}\| = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 \begin{vmatrix} -\frac{1}{c}P_0 & 0 & P_3 & P_1 - iP_2 \\ 0 & -\frac{1}{c}P_0 & P_1 + iP_2 & -P_3 \\ P_3 & P_1 - iP_2 & -\frac{1}{c}P_0 & 0 \\ P_1 + iP_2 & -P_3 & 0 & -\frac{1}{c}P_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{c^2}P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2\right)^2 .$$

(1) Cfr. Fock « ZS. für Physik », *55*, 127, (1929); Schrödinger, « Sitzber. der Preuss. Akad. », XXIV, 418 (1930).

(2) Cfr. Darwin, « Pr. Roy. Soc. », *118*, 654 (1928).

(3) Questi « Rendiconti », XI, I (1930).

L'equazione delle varietà caratteristiche è dunque

$$\frac{1}{c^2} P_0^2 - (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) = 0 , \tag{4}$$

equazione ben nota, che ci dice che le eventuali superficie di discontinuità delle derivate prime delle ψ_μ si spostano nello spazio ordinario con velocità c.

Le discontinuità di queste derivate debbono soddisfare per noti teoremi della teoria delle caratteristiche ad alcune condizioni geometriche e dinamiche (quest'ultime provenendo dallo stesso sistema (1')). Le condizioni geometriche impongono che le discontinuità nei gradienti delle ψ_μ sulla $\chi = \text{cost.}$ siano dei tetravettori paralleli a $\text{grad}\,\chi$; le relazioni dinamiche legano le grandezze di questi quattro vettori relativi alle quattro ψ_μ, e sono identiche a quelle che legano le grandezze delle quattro ψ_μ nel caso del movimento di una particella con velocità c e direzione normale nello spazio geometrico alla $\chi = \text{cost.}$, cioè del movimento sopra una bicaratteristica.

3. Per accertarci della effettiva possibilità di tali superficie di discontinuità, ed esaminarne il significato fisico in relazione con quanto detto sopra, possiamo limitarci, dato che nella (4) non compaiono i potenziali, al caso dell'elettrone libero, cioè porre $U = V = 0$. In tal caso le equazioni di Dirac si riducono a

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc)\,\psi = 0 \tag{5}$$

e moltiplicando a sinistra per l'operatore

$$(p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta mc)$$

abbiamo per le note relazioni cui soddisfano le α_k e la β,

$$(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2 c^2)\,\psi = 0 \tag{6}$$

cioè

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}\Delta\psi_\mu - m^2 c^2 \psi_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

od anche

$$\Delta\psi_\mu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial t^2} = \left(\frac{2\pi mc}{h}\right)^2 \psi_\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) . \tag{7}$$

Naturalmente non possiamo però assegnare arbitrariamente all'istante iniziale le ψ_μ e le $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial t}$, ma soltanto le ψ_μ, essendo le $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial t}$ legate ad esse dalle (5).

La (7), che è una trasformata dell'equazione delle onde smorzate quando si sia tolto il fattore esponenziale, è stata studiata da numerosi Autori [1]: a noi interessano in particolar modo due proprietà di cui godono gli integrali di questa equazione, quando si assegni che all'istante iniziale essi debbano essere diversi da zero in una regione limitata:

a) il contorno di tale regione, essendo la sezione per $t = \text{cost.}$ di una varietà caratteristica, si allarga negli istanti successivi con velocità c;

b) esiste pure un'altra superficie di discontinuità che si sposta con velocità $< c$: tale superficie non è una vera e propria coda dell'onda, perchè lascia dietro di sè un residuo; ma questo residuo è tanto più piccolo quanto più ristretta è la regione in cui inizialmente è $\psi_\mu \neq 0$, e tende a zero quando questa regione tende ad un punto.

Queste proprietà hanno nel nostro caso un significato molto semplice e confermano quanto avevamo prima affermato in base al principio di indeterminazione. Infatti la somma dei quadrati dei moduli delle ψ_μ rappresenta la probabilità di trovare l'elettrone in una data posizione; per la proprietà *a*) tali limiti si allargano per $t > 0$ con velocità c; se poi questi limiti iniziali sono molto ristretti, per la proprietà *b*) è piccola la probabilità di ritrovare l'elettrone in una misura successiva dietro alla seconda discontinuità dell'onda, cioè è piccola la probabilità che l'elettrone si allontani con velocità minore di c; e questa probabilità diventa anzi nulla per limiti iniziali infinitamente piccoli, cioè per una misura infinitamente precisa.

La lunghezza a cui si riferisce il « grande » e il « piccolo » nel valutare i limiti della regione iniziale, è quell' $\frac{h}{2\pi mc}$ che compare nella (7); ed a questa lunghezza si tende ad attribuire in questi ultimi tempi speciale importanza, come limite minimo entro cui si possono fare determinazioni di posizione.

Matematica. — *Sulle equazioni intrinseche dell'equilibrio elastico.* Nota di Giacinta Andruetto, pres. dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. Poincaré, « Comptes Rendus », *117*, 1027 (1893); Birkeland, ibid., *120*, 1046 (1895).

Meccanica. — *Sull'espressione del lavoro negli spazi generalizzati.* Nota di ANGELINA CABRAS, presentata [1] dal Corrisp. G. GIORGI.

Nella mia Nota *Sulla meccanica dei corpi rigidi negli spazi generalizzati* [2] ho considerato in uno spazio ellittico S_n un corpo rigido sollecitato da forze definite come *cursori* (vettori localizzati su linee d'azione) e ho utilizzato l'espressione del lavoro sotto la forma di somma dei prodotti scalari delle forze per gli spostamenti dei loro punti d'applicazione.

Supposto che il corpo esegua uno spostamento infinitesimo, fissiamo sulla linea d'azione di ogni forza un punto generico M quale punto d'applicazione della forza medesima; sia δM lo spostamento che esegue questo punto, formiamo il prodotto scalare dei cursori $\mathbf{F}$ e δM definendolo come prodotto delle loro grandezze nel coseno dell'angolo che le loro linee formano al punto M. Allora l'espressione

$$\Sigma \mathbf{F} \times \delta M$$

dà il lavoro totale eseguito dalle forze durante uno spostamento virtuale del corpo.

Supponendo che l'S_n ellittico sia immerso in un S_{n+1} euclideo e assimilandolo a un'ipersfera (coi punti antipodi a due a due distinti oppure no), il moto rigido generale nell'S_n ellittico viene a corrispondere al moto di un corpo rigido nell'S_{n+1} euclideo, con un punto fisso nel centro O dell'ipersfera. Per i punti M che sono stati riguardati come punti d'applicazione dei cursori–forze possiamo condurre altrettanti vettori ordinari dello spazio euclideo tangenti alle rispettive linee d'azione, e facendo altrettanto per gli spostamenti δM, i prodotti scalari dei cursori considerati si trasformano in altrettanti prodotti scalari di vettori ordinari nell'S_{n+1} euclideo: conducendo per l'origine un sistema di $n+1$ assi ortogonali e proiettando ogni vettore sugli assi si hanno i lavori elementari espressi come nella meccanica ordinaria per mezzo di somme di prodotti di componenti omonime; sempre con l'osservazione che qui intervengono $n+1$ componenti per ogni forza e per ogni spostamento nell'S_n ellittico. I calcoli impostati per questa via riescono però eccessivamente laboriosi.

Un metodo per ottenere espressioni semplici e sintetiche si ricava invece ricorrendo ai tensori rappresentativi delle forze e del moto, secondo il metodo di rappresentazione utilizzato nella Nota precedente. Sia $\mathcal{S}$ il ten-

(1) Nella seduta del 4 gennaio 1931.

(2) Questi «Rendiconti», serie 6ª, vol. XII (2º semestre 1930), pp. 416–419.

sore rappresentativo dell'atto di moto cioè quell'omografia vettoriale che applicata al vettore OM generico, condotto dal centro a un punto M dell'ipersfera, dà il vettore velocità del punto M: ho già rilevato che questo tensore riferito al sistema cartesiano prescelto si identifica con una matrice quadrata antisimmetrica di cui l'elemento generico è p_{rs} [1].

Ho pure rilevato che il sistema delle forze che sollecitano il corpo rigido, considerate nel loro insieme costituisce un ente matematico analogo a un atto di movimento: anche questo è rappresentabile con un tensore antisimmetrico $\mathfrak{F}$, di cui indicheremo con f_{rs} l'elemento generico.

Il lavoro virtuale dev'essere esprimibile in funzione di questi due tensori.

Il sistema di forze cursori nell'S_n ellittico può essere riguardato come un sistema di coppie nell'S_{n+1} euclideo: ogni coppia ha per piano di giacitura o piano d'azione il piano che dall'origine O proietta il singolo cursore e ha per momento il prodotto della grandezza del cursore per il raggio della stera. Non è però riducibile a un vettore come nell'S_3, perchè non esiste una normale unica al piano e rimane invece come elemento *areale* [2]; cartesianamente questo elemento possiede $\frac{n(n+1)}{2}$ componenti, una per ogni piano coordinato, e tensorialmente è rappresentato [3] da una matrice antisimmetrica di caratteristica 2. Componendo fra loro queste coppie si ha non più una coppia, come nell'S_3, ma un sistema più generale, a cui corrisponde il tensore antisimmetrico non vincolato ad avere la caratteristica 2, ma un tensore antisimmetrico qualunque [4].

Noi definiremo come *prodotto scalare* dei due tensori $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}\delta t$ il lavoro che esegue lo sforzo generico $\mathfrak{F}$ sul corpo rigido dotato dell'atto di moto $\mathfrak{F}$ durante il tempo δt, cioè scriveremo:

$$(1) \qquad \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}\delta t = \Sigma \mathbf{F} \times \delta \mathrm{M}$$

Per trovare il valore di questa espressione in funzione degli elementi cartesiani dei tensori, ricordiamo che lo sforzo $\mathfrak{F}$ può essere sostituito, nell'S_{n+1} euclideo, con tante coppie quanti sono i cursori che compongono lo sforzo: ognuna di queste coppie si proietta sopra gli $\frac{n(n+1)}{2}$ piani coordinati e quindi si sostituisce con altrettante coppie componenti.

(1) Vedi la mia Nota, precedente a quella già citata: *Moti rigidi negli spazi generalizzati*, questi «Rendiconti», serie 6ª, vol. XII (2° sem. 1930), pp. 316–321.

(2) La denominazione «areale» è stata usata nelle lezioni litografate di G. Giorgi e nella tesi del dott. Rachel per indicare uno scalare associato a una giacitura dotata di verso; questo ente corrisponde sostanzialmente al bivettore di Grassmann e di Peano.

(3) Cfr. la mia Nota citata: *Moti rigidi* ecc. pp. 317–318.

(4) Vedi loc. cit.

Riunendo tutte le componenti omonime si hanno $\frac{n(n+1)}{2}$ sforzi elementari, ognuno dei quali è una coppia in un piano coordinato, equivalente a un cursore che agisca lungo l'intersezione di questo piano coordinato con l'ipersfera. Similmente l'atto di moto $\mathcal{S}$ è il risultante di $\frac{n(n+1)}{2}$ atti di moto elementari corrispondenti a rotazioni semplici eseguite nei singoli piani coordinati. Ovviamente il lavoro dello sforzo $\mathcal{F}$ sullo spostamento $\mathcal{S}\delta t$ è la somma dei singoli lavori fatti da tutte le $\frac{n(n+1)}{2}$ coppie componenti su tutti gli spostamenti elementari componenti. Ma il lavoro di una coppia giacente in un piano coordinato sopra uno spostamento elementare rotatorio avente per base un altro piano coordinato è nullo, perchè lo spostamento di tutti i punti del cursore associato alla coppia è in tal caso o nullo od ortogonale al cursore [1].

Per conseguenza nell'espressione del lavoro rimangono solo i termini in cui una componente dello sforzo si associa alla componente omonima dell'atto di moto. Ora, la componente dello sforzo secondo il piano coordinato $Ox_r x_s$ ha un tensore con due sole componenti uguali e contrarie fra loro $+f_{rs}, -f_{rs}$ le quali nella corrispondente matrice figurano in posizione simmetrica rispetto alla diagonale principale; e il valore di f_{rs} è uguale al momento della coppia rappresentata da quella componente Similmente l'atto di moto componente relativo a quel piano coordinato è un tensore con due sole componenti $+p_{rs}, -p_{rs}$ simmetriche nella matrice; il valore p_{rs} rappresenta la velocità angolare, per cui il lavoro della coppia su quel moto componente è dato da $f_{rs} p_{rs} \delta t$. Sommando tutti i termini analoghi a questi abbiamo che il lavoro totale eseguito nello spostamento elementare del corpo rigido è rappresentato da

$$\mathcal{F} \times \mathcal{S}\delta t = \sum_{r,s} p_{rs} f_{rs} \delta t \tag{2}$$

con l'avvertenza che, una volta scritto il termine $p_{rs} f_{rs}$, non deve scriversi il termine $p_{sr} f_{sr}$, perchè questi due termini sono uguali e rappresentano entrambi lo stesso elemento del lavoro.

Di qui implicitamente apprendiamo che il prodotto scalare di due tensori rappresentati da matrici quadrate antisimmetriche (assi di riferimento

(1) Per es., se il moto elementare di rotazione ha per base il piano Ox_1x_2, esso lascia fermi tutti i punti dell'S_{n-1} normale a esso piano (cfr. la mia Nota citata, *Moti rigidi* ecc., p. 318) e a tutti gli altri punti dello spazio fa eseguire spostamenti parelleli ad Ox_1x_2. Quindi se il cursore che dà origine alla coppia si trova in un piano come Ox_3x_4, i punti della sua linea hanno spostamenti nulli; se sta in un piano come Ox_1x_3, hanno spostamenti normali alla linea del cursore (e uno di essi, quello d'intersezione con Ox_3, ha spostamento nullo).

ortogonali) è dato dalla somma dei prodotti degli elementi omonimi; teorema che generalizza quello sui prodotti scalari dei vettori e quello analogo sui bivettori dato da Cartan (1).

A titolo d'esempio, sia uno spazio ellittico a tre dimensioni. Un suo punto generico si può individuare per mezzo di quattro coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 legate dalla condizione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$, dove R è il raggio di curvatura dello spazio. Ciò equivale appunto ad assimilare quell'S_3 ad un'ipersfera di raggio R immersa in un S_4 euclideo riferito a un sistema cartesiano ortogonale con origine nel centro.

Un atto di moto rigido generico dà origine nel tempo δt a spostamenti elementari di questo tipo

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{4} p_{ij}\, x_j\, \delta t \tag{3}$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} i, j = 1, 2, 3, 4; \\ p_{ii} = 0; \\ p_{ij} = -p_{ji}; \end{cases}$$

e manifestamente i sei valori distinti delle p_{rs} corrispondono a velocità angolari componenti nei sei piani coordinati; a queste nell'S_3 ellittico corrispondono velocità lineari lungo i sei spigoli di un tetraedro autopolare rispetto all'assoluto, tutte divise per il raggio di curvatura.

L'atto di moto è così individuato da una matrice antisimmetrica $\| p_{ij} \|$ con quattro righe e quattro colonne.

Similmente lo sforzo più generale che può agire su un corpo rigido è individuato da una matrice $\| f_{ij} \|$ dello stesso tipo, dove le f_{ij} rappresentano coppie componenti nei piani coordinati.

Il lavoro elementare o prodotto scalare dei tensori rappresentati da quelle due matrici è dato da

$$\mathcal{F} \times \mathcal{S}\,\delta t = p_{12} f_{12} + p_{13} f_{13} + p_{14} f_{14} + p_{23} f_{23} + p_{24} f_{24} + p_{34} f_{34} \tag{4}$$

Volendo esprimere il lavoro nell'altra forma $\Sigma \mathbf{F} \times \delta \mathrm{M}$ dovremmo immaginare lo sforzo dato non per mezzo delle f_{rs} ma per mezzo di un numero qualsivoglia di cursori agenti lungo geodetiche dell'ipersfera: e allora, col procedimento detto da principio, se $\mathrm{M} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ è un punto generico di uno di questi cursori (che è sempre lecito considerare come suo punto di applicazione) e se $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \mathrm{F}_4$ sono le componenti su $\mathrm{O}\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ di un vettore euclideo dell'S_4 tangente al cursore in M e avente la stessa grandezza, il lavoro di questo cursore è

$$\mathrm{F}_1\, \delta x_1 + \mathrm{F}_2\, \delta x_2 + \mathrm{F}_3\, \delta x_3 + \mathrm{F}_4\, \delta x_4$$

(1) E. Cartan, *Leçons sur la géomètrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 9.

e sommando tante di queste espressioni quante sono le forze–cursori date, si ottiene per altra via l'espressione del lavoro. Le due espressioni si trasformano una nell'altra prendendo le δx espresse per mezzo delle (3) e tenendo conto che il cursore F_1, F_2, F_3, F_4 applicato al punto x_1, x_2, x_3, x_4 dà sui piani coordinati sei componenti di coppie i cui valori sono $(F_1 x_2 - F_2 x_1), (F_2 x_3 - F_3 x_2)$, ecc.; e la somma di tutte le coppie componenti omonime provenienti dai diversi cursori dà le sei componenti f_{12}, f_{13} ecc., dello sforzo risultante.

Questo però fa vedere che non conviene rappresentare un cursore per mezzo delle quattro componenti del vettore ad esso tangente nell'S_4; conviene invece rappresentarlo per mezzo delle sei coppie che esso genera sui piani coordinati; ciò equivale nello spazio ellittico a sostituirlo con sei cursori lungo i sei spigoli di un tetraedro autopolare di riferimento.

Sarebbe facile mostrare che nel caso in cui lo spazio ellittico diventi euclideo, si ricavano come caso limite le formule note della meccanica ordinaria [1].

(1) Nel concludere questa Nota sono lieta di ringraziare il prof. T. Boggio il quale mi ha segnalato che nel libro *Espaces courbes; Critique de la Relativité* di Burali-Forti e Boggio (Torino 1924) è contenuto un risultato in parte equivalente a uno di quelli che ho dato nella mia Nota: *Moti rigidi* ecc., giacchè a pp. 243–244 è stabilita una formola fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi in n dimensioni, ove interviene una omografia vettoriale corrispondente a una matrice antisimmetrica associata all'atto di moto; questa omografia è stata ivi detta *assiale*. Altra dimostrazione è stata data nella *Geometria differenziale* di Burgatti, Boggio, Burali-Forti (Zanichelli, Bologna 1930). Nonostante questa coincidenza credo che la mia dimostrazione non perda d'interesse, in quanto è più generale e del tutto differente, e conduce al risultato con considerazioni geometriche e cartesiane dirette, senza alcuna formula intrinseca di calcolo vettoriale. Le due trattazioni possono essere confrontate utilmente, e si completano l'una con l'altra.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza dei composti del rodio*[1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata[2] dal Socio R. Nasini.

Nel 1914, seguendo l'indirizzo che aveva condotto A. Piccini[3] a preparare gli allumi del rodio e L. Marino[4] a preparare quelli dell'iridio, furono da me iniziate delle ricerche dirette a mettere in luce eventuali nuovi rapporti di analogia tra i metalli del gruppo del platino e i metalli comuni[5].

Primo risultato di tali ricerche fu la preparazione dell'acetilacetonato del palladio isomorfo con quello del rame, dell'acetilacetonato del rutenio trivalente isomorfo con quello dell'alluminio e infine dei rodio–molibdati composti complessi del tutto analoghi anche per la forma cristallina ai cobalti-molibdati di Friedheim[6] e Keller e ai cromi-molibdati di Struve[7].

In seguito intrapresi la preparazione dei solfocianuri complessi del rodio. È noto che quasi tutti gli elementi trivalenti ($\overset{III}{Cr}$, $\overset{III}{Vd}$, $\overset{III}{Fe}$, $\overset{III}{Al}$, $\overset{III}{Mo}$) dànno origine a solfocianuri complessi perfettamente analoghi tra di loro.

Era interessante indagare se anche il rodio avesse potuto dare origine con l'acido solfocianico a complessi analoghi a quelli degli altri metalli trivalenti.

Data la quantità molto scarsa di rodio – circa tre grammi – di cui potevo allora disporre, e la difficoltà di rifornirmi a causa della guerra prima, e poi dei prezzi proibitivi cui salirono nel dopo guerra i metalli del platino, riuscii in un primo tempo soltanto ad accertare l'esistenza del complesso $Rh(SCN)_6$ preparando i rodio-solfocianuri insolubili di argento, cobaltiesammina ed esametilentetrammina[8].

Essi vennero ottenuti per doppio scambio dal sale greggio di potassio, la purificazione del quale non potè allora venir ultimata perchè trattandosi di composto estremamente solubile avrebbe richiesto quantità relativamente considerevole di materiale.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1931.

(3) « Z. f. anorg. Chem. », *27*, 62 (1901).

(4) « Z. f. anorg. Chem. », *42*, 213 (1904).

(5) « Rend. Accad. Lincei », 5, XXIII, I, 334 (1914).

(6) « Berichte », *39*, 4301 (1906).

(7) « Journ. prakt. Chem. », *61*, 437 (1854).

(8) Tesi di laurea di Ghiselli Armando presentata alla Facoltà di Scienze della Università di Bologna per conseguire la laurea in Chimica pura (1922-1923).

Le ricerche sul rodio vennero da me riprese soltanto in questi ultimi anni quando, mercè l'interessamento dell'illustre prof. A. Rosenheim di Berlino la Ditta Haereus di Hanau mise a mia disposizione 25 grammi di rodio metallico coi quali vennero preparati i composti descritti in questa Nota. Tanto al prof. Rosenheim che alla Ditta Haereus esprimo qui i sensi della mia riconoscenza.

Avrei voluto estendere le ricerche, e lo farò in seguito, anche ad altri composti del rodio – la chimica del rodio presenta tuttora molte lacune – ma un lavoro pubblicato recentemente in Germania sui solfocianuri e sui cianuri del rodio [1] mi induce a rendere intanto noti i risultati da me finora ottenuti.

Rodio–solfocianuri.

Il primo tentativo di preparazione di composti del rodio con l'acido solfocianico venne eseguito dal Claus [2] nel 1860. Egli sciolse l'idrossido di rodio in una soluzione acquosa di HCNS ma non riuscì ad isolare nessun composto. Anche i tentativi recenti di Iwanoff [3] risultarono infruttuosi.

Nel 1929 F. Krauss e H. Unbach [4] constatarono che aggiungendo ad una soluzione di cloruro o solfato di rodio del solfocianuro potassico, il colore rosso della soluzione diventa molto più intenso e considerarono tale cambiamento di colore come indizio di una reazione, e probabilmente della formazione di un composto complesso: ma i loro tentativi di isolare il solfocianuro complesso, o per concentrazione della soluzione o precipitandolo sotto forma di sale di qualche metallo pesante, diedero risultati negativi. F. Krauss e H. Unbach riuscirono soltanto ad ottenere un composto amorfo $Rh(SCN)_3 \cdot xH_2O$ trattando con acido solforico concentrato una soluzione di $RhCl_3$ addizionata di un solfocianuro alcalino.

Fin dai primi tentativi, ai quali ho accennato sopra, io giunsi senza speciali difficoltà all'isolamento di rodio-solfocianuri contenenti il complesso $Rh(SCN)_6$. Il materiale di partenza impiegato fu il cloruro doppio di rodio e potassio che venne preparato scaldando al rosso in corrente di cloro la polvere di rodio mescolata con cloruro di potassio. Il sale di rodio venne introdotto a caldo in una soluzione concentrata di solfocianuro potassico (circa sei molecole di KSCN per ogni atomo di rodio) e poi si evaporò a bagnomaria fino a secchezza. Durante il riscaldamento il colore della soluzione ch'era prima rosso-violetto, diventò rosso-granato molto cupo. Il residuo dell'evaporazione venne trattato ripetutamente con alcool a 95° fino a soluzione completa della sostanza rossa: restò indisciolto un po' di cloruro di potassio. La soluzione alcoolica venne distillata a pressione ridotta

(1) F. Krauss e H. Unbach, «Z. anorg. Chem.», *179*, 357 (1929).
(2) «Journ. prakt. Chem.» [1], *80*, 317 (1860).
(3) «Chem. Ztg.», *47*, 209 (1923).
(4) «Z. f. Anorg. Chem.», *179*, 361 (1929).

e il residuo, ridotto a bagnomaria quasi a secchezza, venne di nuovo estratto con alcool. Questo trattamento venne più volte ripetuto finchè esaminando al microscopio il residuo di una goccia della soluzione alcoolica messa a evaporare su un vetrino porta–oggetti, non vi si riscontrarono più i cristalli incolori di cloruro potassico. Il residuo dell'ultima soluzione alcoolica venne sciolto in poca acqua e messo a cristallizzare nel vuoto in un essiccatore su acido solforico. Dopo alcuni giorni nel liquido rosso sciropposo si era formato un deposito rosso-cupo costituito da cristalli prismatici ben formati. Essi vennero spremuti alla pompa ed essiccati nel vuoto su anidride fosforica.

Per l'analisi di questo prodotto il rodio venne determinato come metallo, decomponendo la sostanza con acido solforico concentrato, e dopo eliminazione di quest'ultimo mediante forte riscaldamento e del solfato di potassio mediante estrazione con acqua, il residuo venne calcinato in corrente di idrogeno e lasciato raffreddare in corrente di CO_2. Lo zolfo venne dosato come solfato di bario previa fusione del composto in crogiolo di argento con potassa caustica e nitrato potassico.

	Trovato	Calcolato per $K_3Rh(SCN)_6$
Rh %	17.82–18–18.22	18.11
S »	33.65	33.86
N »	15.16	14.80
K »	20.91	20.65

Siccome i sali di potassio degli acidi $H_3Me^{III}(SCN)_6$ (Me = Cr, Al, Fe, Mo, Vd) cristallizzano tutti con quattro molecole di acqua, vennero fatti dei tentativi di ottenere il sale di rodio $K_3Rh(SCN)_6$ allo stato idrato lasciandolo essiccare, dopo separato dall'acqua-madre, all'aria su carta da filtro. I risultati furono molto incerti. Se l'idrato con quattro molecole di acqua esiste, dev'essere molto instabile. Si è inoltre constatato che evaporando un poco della soluzione del sale di rodio addizionata con egual volume di una soluzione satura di $K_3Cr(SCN)_6 \cdot 4H_2O$ non si ottengono cristalli misti, ma i due sali cristallizzano separatamente e in forme diverse.

Il complesso che il rodio forma con i radicali SCN è molto stabile: ciò è dimostrato dal suo comportamento con gli alcali, con gli acidi, e nelle reazioni di doppio scambio. La soluzione di $K_3Rh(SCN)_6$ trattata con soda caustica anche a caldo non dà origine a idrossido di rodio. Con ammoniaca concentrata si ha una lenta decolorazione della soluzione con formazione di rodio–ammine. Con acido solforico diluito si ha liberazione dell'acido $H_3Rh(SCN)_6$ che può venir estratto con alcool amilico, che lo scioglie con colorazione rosso-granato. Con nitrato d'argento dà un precipitato amorfo rosso-aranciato che lavato accuratamente e seccato nel vuoto, mostra alla analisi una composizione corrispondente alla formula $Ag_3Rh(SCN)_6$.

Trovato		Calcolato	
Ag °/o	41.90	Ag °/o	41.79
Rh »	13.15	Ag »	13.29

Una soluzione acquosa di $K_3Rh(SCN)_6$ addizionata con una soluzione di $[Co(NH_3)_6]Cl_3$ diede un precipitato cristallino rosso–aranciato che venne analizzato dopo essiccazione nel vuoto su P_2O_5.

Trovato		Calcolato per $Co(NH_3)_6Rh(SCN)_6$
Rh °/o	17.00	16.82
Co »	9.40	9.64
S »	31.63	31.45
N »	27.06	27.47

In un altro prodotto non seccato nel vuoto, ma all'aria, si ebbero risultati analitici concordanti con la formula: $Co(NH_3)_6Rh(SCN)_6 \cdot 3H_2O$.

Una soluzione di $K_3Rh(SCN)_6$ (gr. 1 in 100 cc.) addizionata con una soluzione di gr. 5 di $C_6H_{12}N_4$ acidificata con acido acetico diede un precipitato costituito da cristalli microscopici rosso–rubino poco solubili in acqua insolubili in alcool che all'analisi diedero risultati concordanti con la formula: $(C_6H_{12}N_4)_2H_2KRh(SCN)_6 \cdot 4H_2O$.

Trovato		Calcolato
Rh °/o	12.28	12.35
S »	23.01	23.10
N »	23.89	23.54
K »	4.27	4.69

In altri prodotti preparati con grande eccesso di $C_6H_{12}N_4$ si trovarono percentuali di azoto più alte e percentuali di potassio più basse.

Aggiungendo una soluzione diluita di $K_3Rh(SCN)_6$ ad una soluzione concentrata di $C_6H_{12}N_4$ acidificata con acido acetico si ottenne un prodotto di un rosso un po' più chiaro del precedente, la cui composizione corrisponde alla formula: $(C_6H_{12}N_4)_3H_3Rh(SCN)_6$.

Trovato		Calcolato
Rh °/o	11.64	11.77
N »	25.69	25.66

Rodio–cianuri.

In ricerche recenti [1] è stato trovato che i ferricianuri alcalini, quelli alcalino–terrosi e quelli misti alcalini e alcalino–terrosi, formano con l'esametilentetrammina dei composti di addizione ben cristallizzati. Da altre mie ricerche, ancora inedite, risultò che analoghi composti sono formati dai cobalti–, cromi–, mangani–, e vanadi- cianuri. Ho voluto ricercare se la proprietà di fornire composti di addizione con l'esametilentetrammina appartenesse anche ai cianuri complessi del rodio. La preparazione di nuovi cianuri del rodio, presumibilmente ben cristallizzati e di facile isolamento, non appariva senza interesse per la chimica del rodio, in quanto che le nostre conoscenze intorno ai rodio-cianuri si limitano al sale di potassio $K_3Rh(CN)_6$ descritto la prima volta dal Claus e studiato recentemente da Krauss e Umbach [2] nelle sue reazioni con sali di metalli pesanti (Cu, Ni) e di metallammine.

L'esperienza ha mostrato che i rodio–cianuri formano con l'esametilentetrammina prodotti di addizione che per la loro composizione e per la loro forma cristallina sono del tutto analoghi ai corrispondenti composti forniti dai ferricianuri.

Qui sotto sono descritti i composti di addizione dei rodio-cianuri di potassio, sodio, magnesio, bario, calcio e potassio, bario e potassio.

Rodiocianuro di potassio–2-esametilentetranmina-3–idrato.

Alla soluzione bollente di gr. 5 di $K_3Rh(CN)_6$ in 12 cc. di acqua si aggiunsero gr. 5 di $C_6H_{12}N_4$ in sostanza; per raffreddamento, dalla soluzione limpida si separò il composto di addizione in cristalli rombici incolori.

Calcolato per $K_3Rh(CN)_6 \cdot 2\,C_6H_{12}N_4 \cdot 3\,H_2O$		Trovato
Rh %	14.49	14.71
N »	27.61	27.45

Rodiocianuro di sodio-2-esametilentetrammina–5-idrato.

Gr. 10 di acetato di sodio e gr. 5 di rodiocianuro di potassio vennero sciolti a caldo in 20 cc. di acqua, e poi vi si aggiunsero gr. 5 di $C_6H_{12}N_4$ sciolti a caldo nella minor quantità possibile di acqua. Per raffreddamento si formarono dei bei cristalli ottaedrici incolori.

(1) G. A. Barbieri, «Gazz. Chim. Ital.», *60*, 236 (1930).
(2) «Z. f. anorg. Chem.», *179*, 357 (1930).

Calcolato per $Na_3Rh(CN)_6 \cdot 2C_6H_{12}N_4 \cdot 5H_2O$		Trovato
Rh %	14.75	15.07
N »	28.10	27.93
Na »	9.88	10.05

Rodiocianuro di magnesio-4-esametilentetrammina-24-idrato.

Gr. 5 di $K_3Rh(CN)_6$ e gr. 4 di $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ vennero sciolti in 50 cc. di acqua e addizionati con gr. 5 di $C_6H_{12}N_4$ sciolti in 50 cc. di acqua. Precipitato cristallino poco solubile in acqua.

Calcolato per $Mg_3[Rh(CN)_6]_2 \cdot 4C_6H_{12}N_4 \cdot 24H_2O$		Trovato
Rh %	13.00	12.95
N »	24.76	24.73
Mg »	4.60	4.74

Rodiocianuro di bario-4-esametilentetrammina-20-idrato.

Per preparare $Ba_3[Rh(CN)_6]_2$ dal sale di potassio si trattò quest'ultimo con una soluzione di nitrati misti di terre rare; si ottenne in forma di precipitato cristallino il composto poco solubile La(Ce , Nd , Pr , ecc.)$Rh(CN)_6 \cdot 5H_2O$ che trattato con barite diede una soluzione di $Ba_3[Rh(CN)_6]_2$ dalla quale con acido carbonico a caldo si eliminò l'eccesso di barite. Dalla soluzione di $Ba_3[Rh(CN_6]_2$ per aggiunta di un eccesso di $C_6H_{12}N_4$ si ottenne il composto di addizione in forma di polvere cristallina.

Calcolato per $Ba_3[Rh(CN)_6]_2 \cdot 4C_6H_{12}N_4 \cdot 20H_2O$		Trovato
Rh %	11.13	11.07
N »	21.20	20.84
Ba »	24.44	24.21

Dalla soluzione di questo composto di addizione in acqua bollente si separò per raffreddamento una polvere cristallina che all'analisi diede risultati concordanti con la formula: $Ba_3[Rh(CN)_6]_2 \cdot 3C_6H_{12}N_4 \cdot 18H_2O$.

Calcolato		Trovato
Rh %	12.29	12.35
N »	20.09	20.16

Rodiocianuro di calcio e potassio-2-esametilentrammina-6-idrato.

Gr. 3 di $K_3Rh(CN)_6$ vennero sciolti in 15 cc. di acqua con gr. uno di $CaCl_2$ e poi si aggiunse un eccesso di $C_6H_{12}N_4$ in soluzione concentrata. Polvere cristallina bianca poco solubile.

Calcolato per $CaKRh(CN)_6 \cdot 2C_6H_{12}N_4 \cdot 6H_2O$		Trovato
Rh %	14.17	14.48
N »	27.01	27.15
Ca »	5.52	5.20

Rodiocianuro di bario e potassio-2-esametilentetrammina-4-idrato.

Venne preparato come il composto precedente sostituendo al cloruro di calcio quantità equivalente di cloruro di bario. Polvere bianca cristallina poco solubile.

Calcolato per $BaKRh(CN)_6 \cdot 2C_6H_{12}N_4 \cdot 4H_2O$		Trovato
Rh %	13.07	12.97
N »	24.90	25.12
Ba »	17.45	17.30

Geologia (Paleobotanica). — *Di alcune Corallinacee fossili delle Canarie* [1]. Nota di M. Airoldi, presentata [2] dal Corrisp. C. Rovereto.

L'esistenza di un livello a *Lithothamnium* nella serie dei terreni miocenici marini, esistente lungo la costiera di Nord–Est dell'isola di Gran Canaria, sopra il porto di Las Palmas, già notata dal von Buch, dal Berthelot e da K. v. Fritsch, è stata messa in rilievo dal Rothpletz [3], al quale si deve pure l'unica descrizione esistente di una specie di *Lithothamnium* ivi raccolta. Il Rovereto, nel suo recente viaggio alle Canarie, in occasione del XIV Congresso Geologico Internazionale, osservò questi terreni, che sono terrazzati, e che in base alla lista dei fossili studiati dal Simonelli, riterrebbe del miocene superiore [4]; ritrovò il livello a *Lithothamnium*, dove raccolse diversi campioni, che gentilmente volle affidarmi in esame. Secondo le comunicazioni orali del prof. Rovereto, questo livello forma una banda di poco spessore, distinguibile perchè pare costituita da ciottoletti biancastri, intercalati negli strati superiori della formazione miocenica. Ciò sembra coincidere con la descrizione e il profilo dati dal Rothpletz e dal Simonelli.

Gli esemplari da me studiati hanno una forma globosa–subsferica, dal diametro variabile tra il centimetro e i 4 cm., con protuberanze di poco

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 15 marzo 1931.

(3) Rothpletz A. u. Simonelli V., *Die marinen Ablagerungen auf Gran Canaria*, « Zeitschr. d. Deutsch. Geol. Gesellschaft », XII, 4, München, 1890.

(4) Rovereto G., *Dal Picco del Teide alla Caldera di Taburiente*, « L'Universo », anno VIII, n. 1, gennaio 1929.

rilievo. All'esame macroscopico non si osservano, eccetto che per le dimensioni, differenze tra i vari campioni; così che si sarebbe indotti a crederli appartenenti ad una sola specie; ma l'osservazione microscopica permette di distinguere, non solo specie diverse, ma anche più generi.

Lithophyllum fortunatum Lémoine.

Si tratta di un esemplare dal diametro di circa 2 cm., che in sezione presenta un ipotallo abbastanza sviluppato, e le cui cellule misurano 17-25 ed anche 30 μ di lunghezza, su 7-13 μ di larghezza. Soltanto a forte ingrandimento si rileva la disposizione delle cellule in serie concentriche, dato che i setti intercellulari trasversali non sono continui. Su questo ipotallo si sviluppa un peritallo, le cui cellule sono rigorosamente disposte in serie orizzontali, a decorso alquanto sinuoso; le dimensioni cellulari sono di 13–20 μ di altezza per 7–13 μ di larghezza. Le intumescenze, dal punto di vista strutturale, sono veri e propri rami, con ipotallo midollare differenziato. Ho potuto misurare 2 concettacoli, di forma ellittica, con tetto leggermente convesso; le misure ottenute sono 436 μ × 200 μ e 407 μ × 160 μ. Questa specie stabilita dalla Lémoine [1] su un esemplare del neogene di Otos in provincia di Valenza, è ritenuta, dalla stessa autrice, coincidente con quella del miocene di Las Palmas descritta dal Rothpletz [2] col nome di *Lithothamnium racemus* Aresch.

Invero, la comparazione delle descrizioni date dai due autori citati, e della figura designata dal Rothpletz con le sezioni da me esaminate, mi induce ad aderire alla opinione della signora Lémoine. Le dimensioni delle cellule e dei concettacoli secondo i due autori sono le seguenti: Rothpletz: cellule della parte crostosa 12–24 μ di lunghezza, e fino a 30 μ per l'ipotallo, per 9–18 μ di altezza; concettacolo 450 μ di lunghezza per 200 μ di altezza; Lémoine: cellule dell'ipotallo 18–27 μ di lunghezza per 8–17 μ di larghezza; cellule del peritallo 10–28 μ di lunghezza; concettacolo 550 μ per 130 μ. Le dimensioni da me misurate si avvicinano di più a quelle date dal Rothpletz; ma la struttura e lo sviluppo dell'ipotallo in special modo, mentre non permettono di ascrivere la specie al genere *Lithothamnium*, coincidono assai bene con quelle descritte dalla Lémoine.

Mesophyllum Navarroi n. sp. (fig. 1).

L'esemplare è di dimensioni maggiori di quelli della specie precedente, e raggiunge i 4 cm. di diametro. L'aspetto è sempre di un nodulo, con

(1) Lémoine Mme Paul, *Corallinacées fossiles de Catalogne et de Valence recucillies par M. l'abbé Battaller*, « Bul. de la instituction Catalana de Historia Natural », 2a serie, vol.VIII, nn. 5-6, 1928.

(2) Rothpletz A., *Fossile Kalkalgen aus den Familien der Codiaceen und der Corallineen*, « Zeitschr. d. Deutsch. Geol. Gesellsch. », 2. Heft, 1891.

intumescenze poco pronunciate. Lo studio microscopico mostra un ipotallo bene sviluppato, il cui spessore varia tra i 50 μ e 160 μ, a cui sta sovrapposto un peritallo che può arrivare fino ai 700 μ di spessore. Lo sviluppo dell'alga di 2 e più millimetri, mostra di essere avvenuto per sovrapposizione di ipotalli secondari, meno sviluppati di quello basilare. Le cellule di questo tessuto misurano da 18 a 28 μ di lunghezza, per 5-9 μ di altezza; esse sono a forma elittica-ovoidale, spesso, alquanto rigonfie nella parte mediana, e appaiono disposte in file rampanti, che passano a formare il peritallo; la ove l'ipotallo ha maggiore spessore un attente esame, a forte ingrandimento, permette di notare una disposizione delle cellule in serie concentriche, essendo le cellule delle diverse file allo stesso livello; però i setti

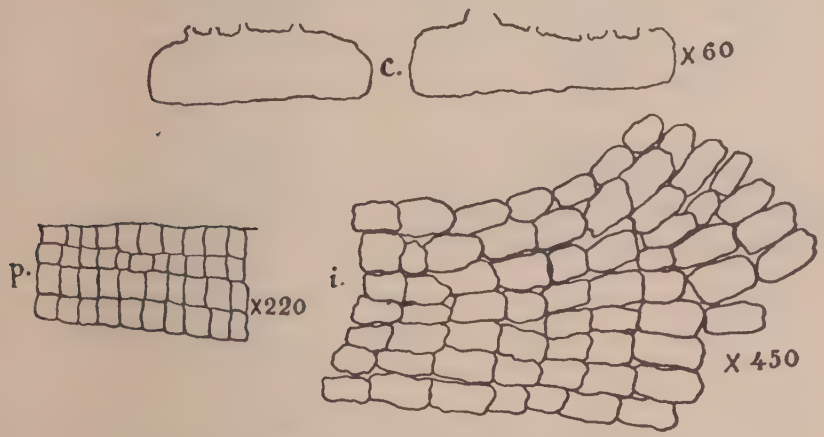


Fig. 1. - *Mesophyllum Navarroi.*

i = ipotallo fortemente ingrandito; *p* = cellule del peritallo; *c* = concettacoli.

cellulari trasversali non sono continui (fig. 1). Il peritallo è formato da cellule rettangolari, o quadrate, disposte in serie orizzontali, ad andamento sinuoso. Tali cellule sono anche disposte in file verticali, essendo i setti divisori nelle due direzioni di uguale spessore. Le dimensioni cellulari sono 10-14-18 μ di larghezza, per 9-10 μ di lunghezza; alcune serie sono di cellule quadrate, misuranti 10 × 10 μ. Le intumescenze sono dovute ad un ispessimento del tallo, per formazione di un ipotallo secondario, cui si sovrappone un regolare peritallo. Nelle intumescenze sono assai numerose le cavità rappresentanti i concettacoli, che sono privi di spore. La forma di questi organi è piuttosto variabile; alcuni sono allungati e quasi rettangolari, altri sono elittici; i più piccoli, forse per il modo in cui sono sezionati, appaiono tondeggianti; alcuni presentano la traccia di numerosi pori nel tetto. Ho ottenute le seguenti misure: 457 μ × 142 μ; 545 μ × 109 μ; 6 54 μ × 130 μ. Tutti i caratteri strutturali distinguono nettamente questa specie dalla prededente,

benchè sia somigliante l'aspetto macroscopico, ed anche le dimensioni delle cellule non siano troppo diverse: la forma delle cellule dell'ipotallo è assai differente; nel peritallo è vero che la disposizione delle cellule in serie orizzontali ricorda quella che si verifica nel *Lithophyllum fortunatum*, ma in questa specie non ho notato la sovrapposizione di ipotalli secondari, che invece è frequentissima nella specie in esame, e inoltre la struttura dei rami è totalmente diversa. La frequenza dei concettacoli sopradescritti e la presenza di numerosi pori nel tetto sono pure sufficienti caratteri specifici.

Data la regolarità delle serie cellulari dal peritallo, e la tendenza dell'ipotallo a disporsi in serie concentriche, parrebbe doversi attribuire la specie al genere *Lithophyllum*; ma per i numerosi fori nel tetto dei concettacoli bisogna collocarla nel genere *Mesophyllum* stabilito di recente dalla Lémoine [1]. Ho dedicato la specie al compianto prof. L. Fernandez Navarro che diresse la escursione del Congresso Geologico Internazionale alle isole Canarie, e che ne pubblicò le guida [2].

Botanica (Morfologia vegetale). — *Sulla struttura delle gemme del gelso e del loro sviluppo* [3]. Nota I di Amelia Tonon, presentata [4] dal Corrisp. S. Baglioni.

Le foglie del gelso sono disposte alternate sul ramo e all'ascella di ognuna vi è una gemma, quasi sempre accompagnata da una o due suppletive, collaterali (vedasi tav. I), spesso nascoste dalle prime perule della gemma ascellare.

Le gemme completamente formate sono di colore marrone, hanno forma triangolare, schiacciata secondo una superficie parallela alla corteccia del ramo, con la base larga e grossa, causa la parte bassa delle prime perule, che è rigonfiata; l'apice della gemma è invece appuntito.

La vera e propria gemma ascellare, liberata dalle prime perule e dalle gemme suppletive, ha forma di mitra.

L'aspetto delle gemme, la grandezza e grossezza variano molto secondo le varietà, i sistemi di cultura, le condizioni dei gelsi e, in una stessa pianta, a seconda dell'età dei rami.

(1) Lémoine M. P., *Le genre Mesophyllum, nouveau genre de Melobesiées*, « Bull. Soc. Bot. France », IV, p. 251, 1928.

(2) Navarro L. F., *Iles Canaries*, « XIV^me^ Congrès Géol. Internat. », Madrid, 1926.

(3) Lavoro eseguito nella R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.

(4) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

Nota. - Non mi consta che su tale argomento nei riguardi del gelso vi siano dei lavori, ma poichè la ricerca bibliografica non è stata completa, non escludo che altri se ne sia occupato. In ogni modo poichè le osservazioni fatte mi sembrano interessanti ritengo opportuno renderle note; e tanto più perchè se vi sono delle osservazioni in proposito difficilmente possono venire a conoscenza

TABELLA I.

Numero degli elementi costituenti le gemme ibernanti di gelsi diversi.

Varietà gelsi	Numero d'ordine delle gemme	PERULE				Foglioline ed abbozzi	Infiorescenze	Abbozzi delle future gemme	Gemme supletive collaterali
		esterne		interne	totale				
		piccole	incappucciantì						
Florio	I	8	3	12	23	8	5	1	—
»	II	5	2	13	20	9	4	—	—
»	III	6	2	14	22	8	5	—	2
»	IV	5	2	16	23	9	5	5	—
»	V	6	2	13	21	7	5	—	—
»	VI	5	3	14	22	8	5	3	1
»	VII	5	2	15	22	9	5	5	1
»	VIII	5	3	13	21	9	6	2	1
»	IX	5	2	16	23	10	6	4	1
»	X	6	2	16	24	9	6	3	—
»	XI	6	3	15	23	9	5	6	—
»	XII	7	2	15	24	8	7	5	—
»	XIII	6	3	13	22	8	7	4	—
»	XIV	5	3	12	20	8	5	5	—
»	XV	8	3	13	24	8	6	—	—
»	XVI	6	4	7	17	5	5	—	—
Sterile	I	3	4	9	16	5	4 (2)	3	1
»	II	1	—	12	13	7	—	2	—
»	III	4	4	9	17	6	2	—	—
»	IV	3	4	9	16	5	4	—	—
»	V	4	5	7	16	6	2	—	—
X	I	5	1	14	20	8	8	3	—
»	II	5	1	17	23	10	6	4	—
»	III	4	2	15	21	8	8	2	—
X_2	I	3	5	14	22	8	—	1	2
»	II	5	4	12	21	8	—	—	1
»	III	4	2	16	22	9	—	4	—
X_3	I	6	2	17	25	12	4	1	1
»	II	6	2	16	23	11	5	2	2
»	III	5	1	16	22	10	5	1	2
»	IV	4	2	16	20	9	1	—	3
»	V	5	3	13	21	8	2	—	1
»	VI	6	3	12	21	8	5	—	2
»	I	4	3	15	22	8	3	5	—
»	II	4	4	13	21	9	3	2	—
»	III	4	4	12	20	7	2	3	—
»	IV	3	3	15	21	9	3	3	—

(1) La gemma segnata col numero romano I è l'apicale del ramo, le gemme ascellari collocate progressivamente verso l'inserzione del ramo sono controsegnate coi numeri romani successivi.

(2) Nelle gemme dello sterile non vi sono infiorescenze vere e proprie ma degli abbozzi.

Anche le foglie più piccole di un germoglio portano già gli abbozzi delle relative gemme ascellari, verdi, globosi, costituiti da più laminette a coppa, disposte una nell'altra, che sono le perule e le foglioline delle future gemme; tali abbozzi si vedono con difficoltà perchè restano nascosti dalle due perule, verdi, lunghe, sottili, che accompagnano per un certo tempo le foglie in accrescimento. Col crescere delle foglie si formano e crescono le gemme relative, nelle quali le perule esterne assumono gradatamente il colore marrone. Le gemme della parte bassa di rami di due–tre mesi sono completamente iscurite ed hanno l'aspetto di gemme definitivamente formate. Per ora non posso dire se tali gemme hanno già la struttura di quelle che hanno raggiunto il massimo sviluppo prima di entrare nello stato di riposo; ma le poche osservazioni fatte lo lasciano credere.

Per il momento mi limito a riferire le osservazione fatte su gemme durante l'inverno.

Perule. – Esternamente la gemma è protetta da 3–8 perule (vedasi tav. I) embricate, grosse, formate da due lamine, riunite da trabecole interne, tra le quali resta dell'aria; le perule interne, sebbene più sottili, hanno la stessa struttura. Le due prime perule sono piccole, robuste, squamose, con la base fortemente ingrossata, completamente di colore marrone; le successive sono gradatamente più grandi, verdi nelle parti protette dalle perule più esterne, marrone nelle scoperte. A queste seguono 2–5 perule molto grandi, più sottili, con la superfice spesso rugosa, le quali abbracciano e incappucciano la parte interna della gemma. Seguono infine le perule che accompagnano le foglie racchiuse nella gemma. Queste perule interne diventano sempre più piccole, meno espanse, più sottili, sono pubescenti su entrambe le faccie, ma maggiormente sulla esterna, per peli lunghi, grossi, argentei, fitti. Quasi sempre ve ne sono due per ogni foglia, fino nella parte più interna attorno all'apice, dove con difficoltà si differenziano dai relativi abbozzi fogliari.

Foglie. – Nelle gemme vi è un numero di foglie che varia da 5 a 12, con una media di 8–9 (vedasi tav. I).

Attorno all'apice vegetativo gli abbozzi fogliari si distinguono a mala pena dalle relative perule, che sono sottili, a linguetta, leggermente pubescenti, mentre quelli sono più tozzi, grossi, tendenti alla forma piramidale, glabri. Spesso sul cono vegetativo vi sono delle produzioni mamellonari indifferenziate.

Man mano ci si allontana dall'apice vegetativo gli abbozzi fogliari assumono sempre più le caratteristiche delle foglie; i più lontani sono delle vere e proprie foglie col picciolo corto e grosso, con la nervatura mediana e le principali del lembo molto grosse, tanto che costituiscono la parte preponderante della foglia. Il lembo fogliare è pochissimo sviluppato ed è alquanto increspato. Generalmente le foglie sono aperte e piane, special-

mente le prime esterne, ma possono essere concave in corrispondenza della pagina interna e le piccole possono essere piegate lungo la nervatura mediana, di modo che i lembi destro e sinistro si toccano o quasi. Il margine fogliare è leggermente dentato e, nelle foglie lobate, le lobature più profonde sono già segnate. Le pagine fogliari portano peli, abbondanti specie verso l'apice, che è sottile ed allungato.

Il lembo fogliare, in tutte le foglie osservate, risulta sempre di cinque assise di cellule, a sezione rettangolare, simili fra loro. Non sono differenziate nemmeno quelle dei due epiteli delle pagine inferiore e superiore. Tutte con clorofilla. Nelle foglie, dei germogli in accrescimento, il numero delle assise di cellule aumenta per divisione tangenziale degli strati. Potrà essere di qualche interesse vedere se in tutte le varietà di gelsi vi sono cinque strati cellulari nei lembi delle foglie ancora chiuse nelle gemme.

Nei riguardi della grandezza, le foglie di una gemma si possono dividere in due gruppi: l'esterno, con foglie relativamente grandi; l'interno, con foglie piccole e abbozzi fogliari. Fra i due gruppi vi è un passaggio quasi netto che si accentua maggiormente durante lo sviluppo del germoglio. Il gruppo esterno non ha le foglie disposte in ordine decrescente, di solito la più grande è la seconda, più raramente la terza, spesso la prima è piccola. Nel gruppo interno le foglie decrescono regolarmente fino agli abbozzi più piccoli. La grandezza delle foglie nelle gemme è in relazione con la varietà, la posizione e grandezza delle gemme stesse. Le foglie più grandi trovate misuravano mm. 2.10 di lunghezza per mm. 1.25 di larghezza e mm. 2.25 per 1.00 (vedasi tav. II).

Infiorescenze. – Nelle gemme miste, delle varietà di gelso che fruttificano, le infiorescenze sono tutte completamente preformate: ogni gemma ne ha tante quante ne fioriranno in primavera.

Le infiorescenze sono grosse, cilindriche o coniche o leggermente piramidali, irregolari, un poco schiacciate e costituiscono gli elementi più voluminosi della gemma.

Il numero delle infiorescenze in ogni gemma varia da una a otto, spesso è di 4-5–6 (vedasi tav. I). Si trovano nella parte più esterna della gemma, cominciando subito dopo le perule esterne e procedendo verso l'interno si alternano con le foglie. Non sono tutte egualmente grosse, le più grandi generalmente sono le mediane e le più piccole le più interne, ma possono essere anche la prima o la seconda e questo si verifica frequentemente nelle gemme della parte bassa del ramo. Spesso all'ultima infiorescenza interna segue quasi immediatamente l'apice vegetativo, attorno al quale si trovano poche foglie e perule mal definite.

Di tutte le infiorescenze viste, nelle diverse gemme osservate, la più grande misurava mm. 2.75 per mm. 1.50 e le più piccole mm. 1.50 per 0.50 e 1.25 per 0.65.

TABELLA II.

Lunghezza e larghezza in mm. delle foglioline in gemme ibernanti di un ramo di gelso « Florio ».

GEMME	FOGLIE									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
I	2.00-0.90	—	2.10-1.25	1.50-0 90	2.00-0.75	1.75-0.75	?	?	—	—
II	2.10-1.00	2.10-1.00	2.10-1.10	—	1.75- ?	1.50-0.90	1.10-0.50	?	?	—
III	2.00-0.90	2.00-0.90	1.90-0.90	1.75-0.90	1.50- ?	1.10- ?	0.50-0 25	0.35- ?	—	—
IV	1.75-1.00	2.10-1.10	2.00-1.10	2.25-1.00	2.00-0.75	1.75-0.75	1.50-0.50	0.75-0.35	0.35- ?	—
V	1.90-1.00	1.75-1.00	1.75-1.00	1.50-0 75	1.00-0.65	0.75-0.35	0.50-0 25	—	—	—
VI	2.10-1.25	2.00-1.00	2.10-1.10	2.00-1.00	1.75-0.65	1.25-0.50	0.75-0.35	0.50-0.25	—	—
VII	2.00-1.10	2.10-1.00	2.10-1.00	2.10-1.10	2.00-0.90	1.25-0.65	0.75-0.50	0.50-0.25	0.25-0.20	—
VIII	1.75-1.00	2.10-1.00	2.00-1.00	1.75-0.90	1.50-0.90	1.10-0.50	0.75-0.50	0.35-0.25	0.20- ?	—
IX	1.10-1.00	1.90-1.00	1.75-1.00	1.90-1.00	1.75-1.00	1.75-0.75	1.00-0.50	0.75-0.35	0.50-0.25	?
X	1.25-0.75	1.75-1.00	1.75-0.90	1.90-0.90	1.50-0.75	1.10-0.65	1.00-0.50	0.50- ?	0.35- ?	—
XI	1.25-0.90	1.90-0.90	1.75-0.75	1.75-0.75	1.50-0.75	1.10-0.65	1.00-0.35	0.50-0.25	0.20- ?	—
XII	1.50-1.00	1.75-1.00	1.75-0.90	1.50-0.75	1.25-0.50	1.00-0.50	0.50- ?	0.25- ?	—	—
XIII	1.50-0.75	1.50-0.65	1.50-0.90	1.50-0.75	1.10-0.50	0.50- ?	0 35- ?	0.25- ?	—	—
XIV	0.75-0.50	1.10-0.75	1.10-0.50	1.10-0.50	0.90-0.35	0.75-0.50	0 35- ?	0.25- ?	—	—
XV	0.75-0.50	1.00-0.75	1.00-0.75	1.00-0.65	0.90-0.50	0.65-0.35	0.50- ?	?	—	—
XVI	0.35-0.50	0.65-0.50	0.50-0.35	0.50- ?	—	—	—	—	—	—
IX (1)	0.75-0.50	0.75-0.50	0.90-0.50	0.35- ?	—	—	—	—	—	—

(1) Gemma supplettiva collaterale della IX ascellare.

In tutte le infiorescenze i bottoni fiorali sono già formati. Le varietà di gelsi che fruttificano, oltre alle gemme miste, possono averne di fogliari, ma queste non si differenziano nell'aspetto esterno da quelle. Invece le gemme delle varietà sterili sono più piccole e, specialmente, meno grosse; però in esse le infiorescenze, o meglio i loro abbozzi, non mancano del tutto, questi hanno forma conica o cilindrica schiacciata e possono presentare delle protuberanze, le quali accennano i bottoni fiorali, che però sono incapaci di ulteriore sviluppo. Il numero massimo di abbozzi d'infiorescenze da me trovati nelle gemme delle varietà sterili è quattro; molte ne sono completamente prive.

Abbozzi di gemme. – In quasi tutte le gemme vi sono gli abbozzi delle gemme ascellari del futuro ramo e sono piccoli, globosi, verdi, decrescenti; nei più esterni, che sono più grandi, si possono distinguere le perule e le foglioline appena differenziate; i più interni non sono che piccolissime masserelle globose compatte. Queste piccole gemme non si trovano all'ascella fogliare, ma ognuna è collocata o tra l'inserzione di una infiorescenza e di una foglia o quasi sopra l'inserzione di una foglia.

Gemme di un ramo. - Ho osservato, durante il periodo invernale, la struttura di tutte le gemme di un ramo della varietà Florio, compresa l'apicale.

Il numero delle foglie non era lo stesso in tutte le gemme, variando da 7 a 10; il numero maggiore o minore non era in rapporto con la posizione della gemma sul ramo, fatta eccezione per quella alla base, che ne aveva solo cinque. Invece vi erano delle differenze nella grandezza delle foglie: le gemme più alte sul ramo avevano foglie più grandi, le più basse foglie più piccole. (Vedasi tav. II e relativi diagrammi). Riguardo le infiorescenze le gemme più alte ne avevano meno ma più grandi, le più basse un numero maggiore ma più piccole.

Concludendo. In ogni gemma, sotto le perule esterne protettrici, troviamo inseriti sul caule grosso, corto, conico, ripetuti più volte nello stesso ordine e vicinissimi tra loro, per la quasi mancanza di internodi, i seguenti elementi: una foglia, due perule, un abbozzo di gemma ascellare, una infiorescenza. Foglie e perule si trovano fino all'apice vegetativo; infiorescenze e abbozzi delle gemme ascellari solo nella parte più esterna e possono anche mancare.

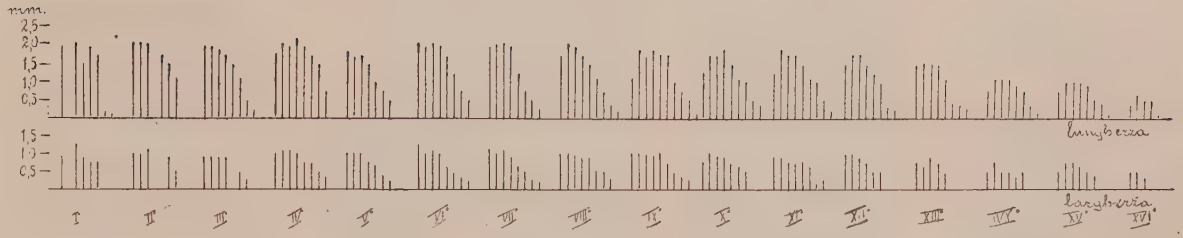


Diagramma costruito con i dati della tabella II.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO LA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO REALE PER L'*ASTRONOMIA*

(Scadenza: 31 dicembre 1929 — Premio L. 10.000).

1. Abetti Giorgio — 1. « Il sistema multiplo ξ Ursae Majoris » (stamp.). - 2. « Densità di alcuni sistemi binari visuali » (stamp.). - 3 e 3 bis. « Misure micrometriche di doppie di stelle e moti propri » (stamp.). – 4. « Sulla massa e il moto proprio di 40 Eridani » (stamp.). - 5. « Relazioni fra le caratteristiche fisiche delle stelle doppie » (stamp.). – 6. « Sugli indici di colore e sugli spettri delle stelle doppie » (stamp.). – 7. « Il sistema binario σ Coronae Borealis » (stamp.). – 8. « Sulla massa delle stelle doppie spettroscopiche » (stamp.). – 9. « Determinazioni degli indici di colore di stelle doppie » (stamp.). – 10. « Ancora sugli indici di colore e sugli spettri di stelle doppie » (stamp.). – 11. « Sul confronto fra osservazioni visuali e fotografie delle nebulose » (stamp.). - 12. « Esperienze fotografiche col prisma obiettivo Merz–Secchi » (stamp.). - 13. « Ricerca sulle righe dell'idrogeno e del calcio etc. » (stamp.). - 14. « Il riflettore prismatico dell'Osservatorio di Arcetri » (stamp.). - 15. « Parallassi spettroscopiche di 159 stelle del primo tipo di Secchi » (stamp.). – 16. « Sulle parallassi spettroscopiche delle stelle del tipo di Secchi » (stamp.). – 17. « Sulle parallassi e le masse di alcuni sistemi binari » (stamp.). - 18. « Parallassi spettroscopiche di 275 stelle etc. » (stamp.). – 19. « Progetto della Torre solare » (stamp.). – 20. « Lo spettro della cromosfera solare » (stamp.). - 21. « Sull'altezza della cromosfera solare » (stamp.). – 22. « La Torre solare di Arcetri » (stamp.). – 23. « Sulla struttura della riga Hα nella cromosfera solare » (stamp.). - 24. « Osservazioni sui moti dei vapori metallici nelle macchie solari » (stamp.). - 25. « Sulla struttura delle righe di idrogeno e di calcio nella cromosfera » (stamp.). – 26. « Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri » (stamp.). – 27. « Altezza della cromosfera solare nel 1926–27–28 ed andamento del presente ciclo solare » (stamp.). – 28. « Osservazioni dell'eclisse parziale di sole del 29 Giugno 1927 eseguite in Arcetri » (stamp.). - 29. « Protuberanza eruttiva del 14 Maggio 1928 » (stamp.). - 30. « Sul periodo di rotazione della cromosfera solare » (stamp., in collab.). - 31. « Struttura della riga Hα e periodo di rotazione della cromosfera solare » (stamp., in collab.). – 32. « Osservazioni di protuberanze e della cromosfera solare 1921-1928 » (stamp.). - 33. « Sulle determinazioni di differenza di longitudine mediante la telegrafia senza fili » (stamp.). – 34. « Determinazioni astronomiche di latitudini e longitudini eseguite nell'Asia Centrale » (stamp.). - 35. « Anomalie della gravità e deviazioni della verticale determinate dalla Spedizione De Filippi nell'Asia Centrale » (stamp.). – 36. « Astronomia Geodetica - Geodesia Topografica – Spedizione Italiana De Filippi nell'Himàlaia Ser. I, Vol. I » (stamp., in collab.). – 37. « Geofisica – Gravità – Magnetismo. Spedizione Italiana De Filippi nell'Himàlaia etc. Serie I, Vol. II » (stamp., in collab.).

2. Nobile Vittorio. — 1. « Il problema dell'Astrometria fotografica nel suo aspetto più generale » (stamp.). – 2. « Sul problema dell'Astrometria fotografica » (stamp.). - 3. « La nozione di moto proprio solare e il suo valore come elemento per lo studio della evoluzione dell'ammasso galattico » (stamp.). - 4. « Sopra una notevole espressione assoluta del fenomeno dell'aberrazione totale » (stamp.). – 5. « Sulla possibilità di un assetto rigorosamente razionale dei fondamenti dell'astronomia stellare di posizione » (stamp.). – 6. « Sulla validità della legge newtoniana fuori del sistema solare » (stamp.). - 7. « Postulati fondamentali e sistemi di riferimento per la dinamica dell'ammasso galattico » (stamp.). - 8. « Sui triedri intermediarii di riferimento per la dinamica stellare. Nota I e II. » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO REALE PER LA *FISICA*

(Scadenza 31 dicembre 1930 — Premio L. 10.000)

1. Andretta Alfonso. — « La elettrodinamica del pensante » (ms.).

2. Barreca Pasquale. — 1. « Osservazioni qualitative di nubi colorate nei vesperi ed aurore » (st.). – 2. « Osservazioni quantitative di nubi colorate » (st.). - 3. « Les durées détachées des couleurs des nuages ecc. » (ms.).

3. Fermi Enrico. — 1. « Sull'elettrostatica di un campo gravitazionale uniforme e sul peso delle masse elettromagnetiche » (st.). - 2. « Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria » (st.). – 3. « Sul trascinamento del piano di polarizzazione da parte di un mezzo rotante » (st.). – 4. « Formazione di immagini coi raggi Roentgen » (st.). – 5. « Il principio delle adiabatiche e i sistemi che non ammettono coordinate angolari » (st.). – 6. « Alcuni teoremi di meccanica analitica importanti per la teoria dei quanti » (st.). 7. « Generalizzazione di un teorema di Poincaré sopra la non esistenza di integrali uniformi di un sistema di equazioni canoniche normali » (st.). - 8. « Dimostrazione che in generale un sistema meccanico normale è quasi ergodico » (st.). – 9. « Sulla teoria statistica di Richardson dell'effetto fotoelettrico » (st.). – 10. « Sopra la teoria di Stern della costante assoluta dell'entropia di un gas perfetto monoatomico » (st.). – 11. « Sulla probabilità degli stati quantici » (st.). – 12. « Correzione di una contraddizione tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche (st.). - 13. « Sopra la riflessione e la diffusione di risonanza » (st.). – 14. « Sull'equilibrio termico di ionizzazione » (st.). - 15. « Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che contengono degli elementi identici » (st.). - 16. « Sulla teoria dell'urto tra atomi e corpuscoli elettrici » (st.). - 17. « Sopra l'urto tra atomi e nuclei di idrogeno » (st.). – 18. « Sopra l'intensità delle righe multiple » (st.). – 19. « Una relazione tra le costanti delle bande infrarosse delle molecole triatomiche » (st.). – 20. « Effetto di un campo magnetico alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza » (st., in collab.). – 21. « Ancora dell'effetto di un campo magnetico alternato sulla polarizzazione della luce di risonanza » (st., in collab.). - 22. « Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico » (st.). - 23. « Sopra l'intensità delle righe proibite nei campi magnetici intensi » (st.). - 24. « Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria » (st., in collab.). – 25. « Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anomala del Tallio » (st., in collab.). – 26. « Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo » (st.). – 27. « Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Applicazione alla teoria del sistema periodico degli elementi » (st.). - 28. « Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Calcolo della correzione di Rydberg per i termini s. – » (st.). - 29. « Sopra l'elettrodinamica quantistica » (st.). - 30. « Sulla teoria quantistica delle frange di interferenza » (st.) .– 31. « Sul complesso $4d$ della molecola di elio » (st.). - 32. « Sui momenti magnetici dei nuclei atomici » (st.). – 33. « Sul calcolo degli spettri degli ioni » (st.).

4. Perucca Eligio. — 1. « Nuove osservazioni e misure su cristalli otticamente attivi » (st.). – 2. « Sul modo di ottenere un $\frac{1}{4}\lambda$ acromatico » (st.). – 3. « Polarimetria e fotometria fotoelettrica » (st.). – 4. « La misura delle differenze di potenziale vere al contatto, col metodo di Lippmann-Pellat » (st.). – 5. « Sulla variazione dell'effetto Volta con la temperatura » (st.). – 6. « Sull'effetto Volta nel vuoto e nei gas molto rarefatti » (st.). – 7. « Le proprietà superficiali del mercurio dedotte da misure voltaiche » (st.). – 8. « Tensione superficiale e proprietà voltaiche del mercurio » (st.). - 9. « Les propriétés superficielles du mercure » (st.). - 10. « Tensione superficiale e facce cristalline » (st.). - 11. « Sull'influenza di un campo elettrico sulla tensione superficiale » (st.). – 12. « Le idee vecchie e nuove sull'effetto Volta » (st.). – 13. « Localizzazione dell'effetto Volta secondo Volta e secondo

le più recenti teorie» (st., in collab.). – 14. «Sulla elettrizzazione del mercurio detta per strofinio» (st., in tre fasc.). - 15. «Effetto triboelettrico ed effetto Volta» (st.). – 16. «Ein gründliches Experiment über die Kontakttheorie der Triboelektrizität» (st.). – 17. «Un nuovo caso di triboelettricità» (st.). - 18. «Elektrisierung durch Reibung zwischen festen Körpern und Gasen» (st.). - 19. «Nachtrag zu zwei Arbeiten von E. Perucca und A. Antinori» (st.). - 20. «Weitere Untersuchungen über Elektrisierung durch Reibung zwischen festen Körpern und Gasen» (st.). – 21. «Effet triboélectrique entre les corps solides et les corps gazeux» (st.). – 22. «Résistance métallique de 10^{10} — 10^{11} ohms» (st.). – 23. «Conduzione elettrica di pellicole metalliche spruzzate catodicamente» (st.). - 24. «Dispositivo pel dosaggio di radiazioni Röntgen in radioterapia» (st.). – 25. «Alcune esperienze di scarica nei gas rarefatti e una modificazione alla provetta di Mc Leod» (st.). - 26. «Ein neues Photometer ohne zerstreuendem Schirm» (st.) – 27. «Ein neues Elektrometer» (st.). - 28. «Neue Konstruktion des Peruccaschen Elektrometers» (st., in collab.). – 29. «Sulla sensibilità degli elettrometri» (st.). - 30. «Elementare Theorie der Elektrometer, insbesondere des Fadenelektrometers» (st.). - 31. «Studio di un particolare condensatore elettrico» (st.).

5. Raimondi Emanuele. — 1. «Un nuovo fenomeno di aerodinamica» (st.). – 2. «Un nuovo fenomeno di idroaerodinamica» (st.). - 3. «Risultati sperimentali relativi a un nuovo fenomeno di aerodinamica» (st.).

6. Ronchi Vasco. — 1. «Sopra gli obbiettivi astronomici dell'Amici» (st.). - 2. «Le frange di combinazione» (st.). - 3. «Due nuovi metodi per lo studio delle superficie e dei sistemi ottici» (st.). - 4. «Sopra i cannocchiali di Galileo» (st.). – 5. «Sopra le caratteristiche dei cannocchiali "di Galileo"» (st.). – 6. «Sopra una lente di Evangelista Torricelli» (st.). – 7. «Sullo studio delle superficie e dei sistemi ottici» (st.). – 8. «Per determinare la distanza focale degli obbiettivi» (st.). – 9. «Ancora sull'impiego dei reticoli nello studio dei sistemi ottici» (st.). - 10. «Sullo studio dei sistemi ottici» (st.). – 11. «Un metodo interferenziale per la determinazione diretta delle costanti e delle aberrazioni dei sistemi ottici divergenti» (st.). – 12. «Un metodo semplice per determinare la velocità dello scatto delle macchine fotografiche» (st.). – 13. «A proposito di recenti teorie sulle "ombre volanti"» (st.). - 14. «Ancora sulle "ombre volanti"» (st.). – 15. «Ueber die Schattenstreifen zum Studium des Lichtwellen» (st.). - 16. «Sur la nature interférentielle des franges d'ombre» (st.). - 17. «Banco per la prova dei sistemi ottici» (st.). - 18. «Sul comportamento e l'impiego delle frange d'ombra» (st.). - 19. «Sulla distorsione» (st.). - 20. «Ueber einen zweifelhaften Punkt der Abbeschen Theorie» (st.). – 21. «Sulla teoria delle frange del Brewster» (st.). - 22. «Sulle interferenze nelle propagazioni corpuscolari» (st.). – 23. «Sulla localizzazione degli anelli di Newton» (st.). - 24. «Lezioni di ottica fisica» (st.). - 25. «Per determinare rapidamente il senso dello spettro negli spettroscopi a gradinata» (st.). – 26. «Ueber die von einem Objektivinterferometer gelieferten Bilder» (st.). - 27. «Alcune esperienze colle lampade a neon» (st.). – 28. «Un cospicuo fenomeno di diffrazione» (st.). – 29. «Le frange d'ombra nello studio delle aberrazioni sferiche piccolissime» (st.). - 30. «I limiti pratici della efficienza delle squadre ottiche e della rettifica interna assoluta nei telemetri monostatici» (ms. in collab.).

7. Sensini Ivo. — 1. «Il meccanismo delle forze atomiche» (ms.). - 2. «Fatti recenti che si attribuiscono a fenomeni di magnetismo e di meccanismo atomico» (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO REALE PER LA *CHIMICA*

(Scadenza 31 dicembre 1929 — Premio L. 10.000).

1. Giordani Francesco. — 1. «Contributo alla utilizzazione dei silicati alluminopotassici ecc.» (stamp.). – 2. «L'approvvigionamento in cellulosa delle fabbriche di seta viscosa ecc.» (stamp.). – 3. «L'industria della seta artificiale in Italia» (stamp.). – 4. «L'estra-

zione della cellulosa dai vegetali a mezzo del cloro gassoso » (stamp.). - 5. « Influenza del trattamento preliminare alcalino nella preparazione della cellulosa al cloro gas » (stamp.). – 6. « Sulla cinetica della decomposizione di soluzioni di ipoclorito sodico » (stamp.). – 7. « Formazione e decomposizione dell'ipoclorito sodico » (stamp.). – 8. « Cinetica della decomposizione di soluzioni di iplocorito sodico » Nota 1 e 2 (stamp.). – 9. « Comportamento conduttometrico delle soluzioni di NaCl » (stamp.). - 10. « Id. id. delle soluzioni di Na OH » (stamp.). – 11 « Id. id. delle soluzioni di NaCl e di NaOH » (stamp.). – 12. « Studi chimico fisici sul catolita degli elettrizzatori a diaframma » (stamp.). – 13. « Studi sul funzionamento degli elettrolizzatori a diaframma e a circolazione per cloruri alcalini » Note 1–5 (stamp.). - 14. « Contributo allo studio di alcune sintesi in chimica organica » (stamp.). – « 15. Sulla teoria della velocità delle reazioni chimiche » (stamp.). - 16. « La mobilità degli ioni idrogeno ed ossidrile nelle soluzioni acquose » (stamp.). – 17. « Influenza del rendimento di conversione e della temperatura di condensazione nella sintesi del fosgene » (stamp.). – 18. « Influenza della concentrazione di corrente nella preparazione elettrolitica del perborato sodico » (stamp.). – 19. « Indagini termochimiche sugli ossidi superiori del nichel » (stamp.). – 20. « Sulla constituzione della picrotossina » (stamp.). – 21. « Studi sui fenomeni di polarizzazione » (stamp.). – 22. « La teoria degli elettrolizzatori a diaframma » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*

(Scadenza: 14 gennaio 1931 — Premio L. 5000).

1. Ascoli Guido. — 1. « Sui raggi dei cerchi tangenti a tre rette di un piano » (st.). - 2. « Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date » (st.). – 3. « Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue » (st.). - 4. « Sugli spazi vettoriali e le loro varietà lineari » (ms.).

2. Bologna Carlo Alberto. — « Sopra alcune congruenze di curve » (st.).

3. Calcagni Luigi Gennaro. — 1. « Azione della SO_2 sui fosfati naturali » (st.). – 2. « Nitrofosfati » (st.). - 3. « Sali potassici da minerali insolubili » (st.). – 4. « La concentrazione degli ioni H delle soluzioni di alcoli, di fenoli e derivati » (ms. in collab.).

4. Darti Giulio. — 1. « Sulla riducibilità di una importante classe di equazioni algebriche » (ms.). – 2. Contributo alla teoria dei gruppi, per mezzo delle proprietà delle equazioni » (st.).

5. Lo Voi Antonino. — 1. « Contributi alla teoria delle matrici di Riemann » (ms.). – 2. « Sulla torsione delle superfici algebriche » (ms.).

6. Martini Zuccagni Aroldo. — 1. « I fondamenti dell'analisi matematica » (ms.). – 2. « Lezioni di geometria Euclidea » (st.). – 3. « Teoria e metodo unico per la discussione dei problemi di secondo grado in ogni caso » (st.).

7. Mastandrea Pasquale. — « Conduttori elettrici isolati in gomma e la loro fabbricazione » (st.).

8. Musajo Luigi. — 1. « Sulla reazione di Doebner. Nota VII: sintesi col β-aminoantracene » (st. in collab.). – 2. « Sulla reazione di Doebner. Nota VIII: sull'acido α-fenil – (β) – antrachinon-chinolin-γ-carbonico » (st.). - 3. « Sulla reazione di Doebner. Nota IX » (st. in collab.). - 4. « Sulla reazione di Doebner. Nota X » (st.). – 5. « Su alcuni sali a struttura P—, O—, M— chinoide. Nota VII » (st. in collab.). – 6. « Ricerche sull'acido benzalpiruvico » (st.). - 7. « Osservazione su di una reazione cromatica col solfato ferroso presentata da alcune urine di ratti » (st.). – 8. « Su di un derivato arsenicale della morfina » (st.).

9. Natta Giulio. — 1. « Struttura del tetrafluoruro di Silicio » (st.). - 2. « La struttura cristallina dell'idrogeno solforato e dell'idrogeno seleniato » (st., in collab.). – 3. « L'acqua nei reticoli cristallini » (st.). - 4. « I raggi degli atomi e degli ioni nei cristalli » (st.). – 5. « Relazioni fra l'attività di catalizzatori proposti per la sintesi dell'alcool metilico e la loro struttura chimica e cristallina » (st.). – 6. « Costituzione degli idrossidi ed idrati – Complessi contenenti acqua di coordinazione » (st.). – 7. « Costituzione degli idrossidi ed idrati – Sull'idrossido di stronzio ottoidrato » (st.). - 8. « La struttura del ghiaccio » (st.). - 9. « La struttura cristallina del tiofene » (st., in collab.). – 10. « La struttura cristallina del benzolo e le sue relazioni con quella del tiofene » (st., in collab.). - 11. « Struttura dei gas inerti. Esame dello Xenio » (st., in collab.). – 12. « La struttura cristallina dei gas inerti. Esame del Kripto » (st., in collab.). - 13. « Spinelli del tipo $Me^{II}_2\,Me^{IV}\,O_4$ » (st., in collab.). - 14. « Grandezze atomiche ed isomorfismo » (st.). - 15. « Gli spinelli » (st., in collab.). - 16. « Spinelli del cobalto bivalente » (st.). - 17. « Soluzioni solide, isomorfismo e simmorfismo tra gli ossidi dei metalli bivalenti » (st., in collab.). – 18. « Soluzioni solide per precipitazione » (st., in collab.). - 19. « Sulla costituzione del verde di Rinmann ecc. » (st., in collab.). - 20. « La struttura dell'idrogeno fosforato e dell'idrogeno arsenicale » (st., in collab.). – 21. « La sintesi del gas d'acqua di alcooli superiori al metilico » (st., in collab.). – 22. « La struttura dei cianuri alcalini ed il loro isomorfismo con gli alogenuri » (ms. in collab.). – 23. « Struttura cristallina e polimorfismo degli acidi alogenidrici » (ms.).

10. Padoa Alessandro. — 1. « Logica » (st.). – 2. « Quadrangoli piani e sghembi » (st.). – 3. « Un antico problema insidioso » (ms.). – 4. « Il tutto della logica » (ms.). – 5. « Tre specie particolari di terne pitagoriche » (ms.). - 6. « Un duplice sistema indeterminato » (st.). - 7. « Proporzioni assiomatiche » (st.).

11. Ricci Carton Nazarena. — « Lezioni di aritmetica pratica per le scuole Commerciali Professionali » (ms.).

12. Zanetti Renzo. — 1. « Sulle possibili applicazioni cinematiche di un teorema di geometria » (st.). – 2. « Ancora sulle possibili applicazioni cinematiche di un teorema di geometria » (st.). – 3. « Studio di nuovi meccanismi con elementi dotati di solo moto rotatorio e cenni su alcune loro possibili applicazioni » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE NATURALI*

(Scadenza: 14 gennaio 1931 — Permio L. 5000).

1. D'Erasmo Geremia. — 1. « Il Tetrabelodon (Trilophodon) angustidens Cuvier sp. della pietra leccese » (st.). - 2. « Studi sui pesci neogenici d'Italia. II La Ittiofauna fossile di Senigallia » (st.). – 3. « Nuove osservazioni su l'Elephas Antiquus dell'Italia meridionale » (st. in collab.) – 4. « Ciro Chistoni. Commemorazione » (st.). - 5. « Studi sui pesci neogenici d'Italia. III. l'Ittiofauna fossile del Gabbro » (st.). – 6. « L'Elephas meridionalis Nesti nell'Abruzzo e nella Lucania » (ms.). – 7. « Su alcuni avanzi di pesci mesozoici della Somalia » (ms.).

2. Fenoglio Massimo. — 1. « Studi petrografici sulla zona del Canavese » (st., 2 memorie). – 2. « Alcune osservazioni sopra l'oncosina di Variney » (st.). – 3. « Alcune osservazioni sui giacimenti auriferi dell'Ossola » (st.). - 4. « Sulla presenza della nesquehonite » (st.).

3. Ganassini Domenico. — 1. « Sulla preparazione del piombo colloidale » (st.). – 2. « Contributo alla ricerca del piombo nei liquidi e tessuti dell'organismo » (st.). – 3. « Ipouricuria ed iperuricuria » (st.). - 4. « Contributo al dosaggio clinico del glucosio

nelle urine » (st.). - 5. « Reazione cromatica della glicerina coi tiosolfati alcalini » (st.). – 6. « Nuovo contributo alla diagnosi specifica del sangue umano per mezzo della reazione Ganassini » (st.).

4. Ponzo Antonino. — 1. « La sinfillia nelle Monocotiledoni » (st.). – 2. « Sul concetto di fillodio » (ms.). – 3. « Considerazioni sulla ligula delle Monocotiledoni » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE NAUTICHE*

(Scadenza: 31 dicembre 1930 — Premio L. 5000).

1. Giliberto Orazio. — 1. « Il problema fondamentale della balistica esterna » (ms.). – 2. « Raffronti di idee e di calcoli » (ms.). - 3. « Nuova formula per la correzione di Givry » (ms.). - 4. « Curve di azimut » (ms.). -5. « Studio dell'arco capace » (ms.). – 6. « Il bolide albertiano » (ms.). – 7. « Sulle determinazioni di distanza » (ms.). – 8. « Varia » (ms.). - 9. « Operazioni grafiche » (ms.).

2. Marchese Alberto. — 1. « Nuove dimostrazioni per ricavare la correzione di Givry » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LAVORI SU ARGOMENTI DI *NATURA PEDAGOGICO PROFESSIONALE*

(Scadenza: 31 dicembre 1930 — Premio L. 5.000).

1. Marchese Alberto. — 1. « Sulla terminologia nautica » (ms.). – 2. « Nautica dell'avvenire » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO *GRASSI*

(Scadenza: 31 dicembre 1930 — Premio L. 5000).

1. Casagrandi Oddo. — « Azione patogena delle amebe » (ms.).

2. Cognetti de Martiis Luigi. — 1. « La " Fridericia Rosae " n. sp. » (st.). - 2. « Descrizione dell' " Anachaeta Camerani " » (st.). – 3-4. « Ricerche intorno alla struttura dell'apparato circolatorio degli Oligocheti » (st.). – 5. « Sul preteso incistamento del " Pachydrilus catanensis " Drago » (st.). – 6. « Contributo alla conoscenza degli Oligocheti neotropicali » (st.). - 7-8. « " Octolasium hemiandrum " » (st.). - 9. « Gli Oligocheti della Sardegna » (st.). – 10. « Oligocheti del Chile e della Repubblica Argentina » (st.). – 11. « Terricoli boliviani ed argentini » (st.). – 12. « Un nuovo genere della Fam. Glossoscolecidae » (st.). - 13. « Contributo alla conoscenza degli Oligocheti cavernicoli » (st.). – 14. « Lumbricidi del Cadore e del Tirolo » (st.). - 15. « Contributo alla conoscenza degli Oligocheti della Liguria » (st.). – 16. « Lombrichi delle Alpi Marittime » (st.). – 17. « Descrizione di un nuovo Enchitreide, " Mesenchytraeus gaudens " n. sp. » (st.). – 18. « Enchitreidi del Cadore » (st.). - 19. « Contributo alla conoscenza della drilofauna sarda » (st.). – 20. « Nota su alcuni Lombricidi di caverne italiane » (st.). – 21. « Oligocheti di Costa Rica » (st.). – 22. « Descrizione di un nuovo Lombrico cavernicolo » (st.). - 23. « Oligocheti dell'Ecuador » (st.). – 24. « Lombricidi dei Pirenei » (st.). - 25. « Nuovi Oligocheti di Costa Rica » (st.). – 26. « Diagnosi di un nuovo lombrico del Chile » (st.). - 27. « Oligocheti dell'isola d'Elba e di Pianosa » (st.). – 28. « Oligocheti raccolti nel Darien » (st.). –

29–30. « Gli Oligocheti della regione neotropicale » (st.). – 31. « Sui peptonefridi degli Oligocheti » (st.). – 32. « Lombrichi liguri del Museo Civico di Genova » (st.). – 33. « Contributo alla conoscenza della drilofauna delle isole Canarie » (st.). – 34. « Nota sui Lombricidi delle Tremiti » (st.). – 35. « Nuovi dati sui Lombricidi dell'Europa orientale » (st.). – 36. « Nuove specie dei generi " Pheretima e Tritogenia " » (st.). – 37. « Eine neue " Opisthodrilus " Art aus Brasilien » (st.). – 38. « Un nuovo caso di ghiandole ermafroditiche negli Oligocheti » (st.). – 39. « Un nuovo Oligochete Criodrilino » (st.). – 40. « Lombrichi di Madagascar e dell' isola Riunione » (st.). – 41. « Nuovi Megascolecidi africani » (st.). – 42. « Lombrichi nuovi del M.te Ruwenzori » (st.). – 43. « Nuovi Eudrilini del M.te Ruwenzori » (st.). – 44. « Nuovo contributo alla conoscenza della drilofauna neotropicale » (st.). – 45. « Ricerche anatomiche e istologiche sull'apparato riproduttore del genere " Kynotus " » – 46. « Descrizione d'una nuova " Pheretima " del Giappone » (st.). – 47. « Contributo alla conoscenza della drilofauna papuasica » (st.). – 48. « Paolo Biolley. Necrologia » (st.). – 49. « Lombrichi di Costa Rica e del Venezuela » (st.). – 50. « I cosidetti " peni " dei Criodrilini » (st.). – 51. « Lombrichi raccolti nelle Isole del Capo Verde e nel Golfo di Guinea »(st.). – 52 « Un nuovo " Dichogaster " africano » (st.). – 53. « Nota sulla drilofauna del Benadir » (st.). – 54. « I Lombrichi dell'Isola Christmas » (st.). – 55. « Diagnosi preliminari di due nuove " Pheretima " e di due nuovi Eudrilini » (st.). – 56. « Lombrichi del Ruwenzori e dell'Uganda » (st.). – 57. « Contributo alla conoscenza della drilofauna delle Isole Hawaii » (st.). – 58. « Di alcuni Oligocheti esotici appartenenti all'I. R. Museo di Storia Naturale di Vienna » (st.). – 59. « Una curiosa alterazione anatomico-istologica in un lombrico dovuta a Nematodi parassiti » (st.). – 60. « Nuove specie dei generi " Megascolides " e " Pheretima " » (st.). – 61. « Sulla funzione fagocitaria delle Basalzellen nella ghiandola ermafroditica di " Helix pomatia " » (st.). – 62. « Contributo alla conoscenza della fecondazione negli Oligocheti » (st.). – 63. « Ricerche sulla distruzione fisiologica dei prodotti sessuali maschili » (st.). – 64. « A contribution to our Knowledge of the Oligochaeta of Travancore » (st.). – 65. « Description of a new Species of the Genus " Polytoreutus " » (st.). – 66. « Nuove specie dei generi " Pheretima " e " Dichogaster " » (st.). – 67. « Contributo alla conoscenza delle Monocistidee e dei loro fenomeni riproduttivi » (st.). – 68. « Descrizione d'una nuova Gregarina Policistidea » (st.). – 69. « Description of a new Species of the Genus " Perionyx " » (st.). – 70. « On the Geographical Distribution of the Genus " Perionyx " » (st.). – 71–72. « Oligochaeta recueillis pendant la " Nederl. Nieuw-Guinea-Expeditie " 1903 » (st). – 73. « Praeda itineris a L. F. de Beaufort in Archipelago indico facti annis 1909-1910 » (st.). – 74. « Contributo alla conoscenza del genere " Fimoscolex " » (st.). – 75. « Oligocheti dell'Isola di Rodi » (st.). – 76. « On a small Collection of Earthworms from Henderson Island » (st.). – 77. « Descrizione di alcuni Oligocheti della Nuova Guinea settentrionale » (st.). – 78. « " Phoenocora jucunda " » (st.). – 79. « Descrizione di un nuovo Glossoscolecino del Perù » (st.). – 80. « Oligocheti raccolti da S. A. R. la Duchessa d'Aosta nella regione dei grandi laghi d'Africa equatoriale » (st.). – 81. « Nota sugli Oligocheti degli Abruzzi » (st.). – 82. « Report on the Vermes (Oligochaeta) collected » (st.). – 83. « Sulla struttura della " Phoenocora jucunda " » (st.). – 84. « Leopoldo Chinaglia » (st.). – 85. « Nuove Gregarine Monocistidee » (st.). – 86. « Una nuova specie del genere " Lymphosporidium " » (st.). – 87. « Osservazioni sul nucleo delle cellule basali della " Helix pomatia " » (st.). – 88. « Nuovo contributo alla conoscenza delle Gregarine Monocistidee » (st.). – 89. « Gregarine Monocistidee parassite di Oligocheti della Nuova Guinea » (st.). – 90. « Descrizione di tre nuovi Megascolecini » (st.). – 91. « Sull'abbozzo degli organi parietali negli Iguanidi » (st.). – 92. « Osservazioni sulla spermiogenesi di Erinaceus » (st.). – 93. « Osservazioni sul nervo ottico e sulla retina degli Acantopsidi » (st.). – 94. « Sui linfotici del genere " Pheretima " » (st.). – 95. « Un caso estremo di gigantismo cellulare causato da simbiosi con un protozoo » (st.). – 96. « La placca mucipara naso-frontale del " Cobitis taenia " » (st.). – 97. « Mario Giacinto Peracca » (st.). – 98. « Sul genere " Monocystis " » (st.). – 99. « Tommaso Salvadori » (st.). – 100. « Osservazioni

sull'epidermide di "Amiurus catus" » (st.). – 101. « Cellule di senso diffuse alla parete dei canali laterali di un Teleosteo » (st.). – 102. « Sulla struttura dell'epidermide della larva di "Salamandra maculosa" » (st.). – 103. « Nuovo Gyrodactylide parassita » (st.). – 104. « Osservazioni sul nervo ottico e sulla retina dei siluridi » (st.). – 105. « Contributo alla conoscenza istologica delle ghiandole rettali nei Ditteri » (st.). – 106. « La prespermatogenesi negli Oligocheti (Terricoli) e la formazione del citoforo » (st.). – 107. « Sulla classificazione e sui caratteri tassonomici delle Monocistidee degli Oligocheti » (st.). – 108. « Prolusioni a corsi ufficiali svolti nella R. Università di Bari » (st.). – 109. « Due nuove Gregarine Monocistidee a miocito profondo » (st.). – 110. « Lumbricidi dei Carpazi » (st.). – 111. « Sul miocito e sui movimenti delle Gregarine Monocistidee » (st.). – 112. « Lorenzo Camerano: Il Maestro » (st.). – 113. « Lombrichi » (st.). – 114. « Sugli ormoni sessuali e sulla derivazione germinale di quello testicolare » (st.). – 115. « Contributo alla conoscenza della distruzione fisiologica dei prodotti sessuali maschili » (st.). – 116. « Edoardo Martel « (st.).

3. Franchini Giuseppe. — 1. « Anemia grave con reperto di flagellati nell'intestino, loro morfologia e caratteri culturali » (st.) – 2. « Di un nuovo parassita protozoario trovato nel sangue periferico ed epatico in un caso di infezione cronica mortale di un individuo proveniente dal Brasile » (st.). – 3. « Il primo caso di leishmaniosi cutanea brasiliana in Italia diagnosticato col reperto del parassita » (st.). – 4. « Nuovo contributo allo studio dell'Haemocystozoon brasiliense » (st.). – 5. « Sur un cas de Leishmaniose americaine » (st.). – 6. Sur un nouveau protozoaire parasite de l'homme provenant du Brésil » (st.). – 7. « Dissenteria amebica sul fronte italiano » (st.). – 8. « Su due casi di cistite amebica » (st.). – 9. « Casi di cistite amebica » (st.). – 10. « Reperto di spirochete in un caso mortale di febbre biliosa emoglobinurica » (st.). – 11. « Su un caso di amebiasi generalizzato » (st.). – 12. « Contributo allo studio del Sodòku » (st.). – 13. « Su di un caso interessante di Buba brasiliana » (st.). – 14. « Isospora hominis Rivolta » (st.). – 15. « Spirochetosi bronco polmonare » (st.). – 16. « Su di un caso di Coccidiosi umana da "Isospora hominis Rivolta" » (st.). – 17. « Un nuovo caso di Buba brasiliana » (st.). – 18. « Balantidiosi nell'uomo » (st.). – 19. « Amebiasi bronchiale » (st.). – 20. « Leishmaniosi interna in un marinaio reduce dalla Cina » (st., in collab.). – 21. « Sulla morfologia e sul ciclo di sviluppo della Leishmania Donovani nelle culture » (st.). – 22. « Kultur und Modalitäten der Entwicklung der Leishman Donovanischen Körperchen » (st.). – 23. « Ancora sulla morfologia della Leishmania Donovani in cultura e sul suo rapporto col globulo rosso » (st.). – 24. « Sulla resistenza della Leishmania Donovani alle diverse temperature » (st.). – 25. « Particularité de culture de certains flagellés. De la culture des Leishmanias dans le milieu de Yoshida » (st.). – 26. « Infezione sperimentale della Leishmania Donovani nella cavia » (st.). – 27. « La Leishmania Donovani può vivere e svilupparsi nel tubo digerente dell'Anopheles » (st.). – 28. « La vita e lo sviluppo della Leishmania Donovani nelle cimici, nelle pulci e nei pidocchi » (st.). – 29. « Ancora sulla presenza della Leishmania Donovani nel tubo digerente dell'Anopheles » (st.). – 30. « Histologische Veränderungen und Parasiten-Befund bei einem an Infektion durch Leishmania Donovani verendeten Meerschweinchen » (st.). – 31. « La Leishmania può vivere e svilupparsi nel tubo digerente dell'Anopheles maculipennis » (st.). – 32. « Leishmanie e Zanzare » (st.). – 33. « Leishmanie e Zanzare. Ulteriori esperienze con zanzare e parassiti splenici » (st.). – 34. « On the presence of Leishmania in the digestive Tract on "Anopheles maculipennis" » (st.). – 35. « Leishmanias et punaises » (st.). – 36. « Culture des parasites leishmaniformes obtenus chez la souris » (st., in collab.). – 37. « Sulla coltivabilità delle amebe da fieno » (st., in collab.). – 38. « Riproduzione della dissenteria tropicale da entameba nella scimmia » (st.). – 39. « Sull'azione patogena delle amebe da fieno nei conigli » (st.). – 40. « Kultivierbarkeit der Amöben auf Heu » (st.). – 41. « Infezione sperimentale del topo bianco con l'Herpetomonas ctenocephali » (st., in collab.). – 42. « Sur un protozoaire nouveau parasite de "Anopheles maculipennis" » (st., in collab.). – 43. « Infezione sperimentale di mammiferi mediante

flagellati del tubo digerente del Ctenocephalus canis » (st., in collab.). – 44. « Infection des mammifères par des flagellés d'invertebrés » (st., in collab.). - 45. « Contribution à l'étude des " marginal points " des hématies des mammifères » (st., in collab.). – 46. « Infection de la souris au moyen de flagellés de la puce du rat par la voie digéstive » (st., in collab.). - 47. « Infection naturelle de la souris et du rat au moyen des puces de rat parasitées par Herpetomonas pattoni » (st., in collab.). – 48. « Infection expérimentale du rat et de la souris par Herpetomonas muscae domesticae » (st., in collab.). - 49. « Au sujet d'un Herpetomonas de Ctenopsylla musculi et de sa culture » (st., in collab.). – 50. « Au sujet de l'Herpetomonas ctenocephali de la puce du chien et de sa culture » (st., in collab.). – 51. « Infections expérimentales de chiens et de cobayes à l'aide de cultures d'Herpetomonas d'insectes » (st., in collab.). - 52. « Sur quelques flagellés d'insectes obtenus en culture pure et en particulier sur " Crithidia melophagi " » (st., in collab.). – 53. « Sur quelques flagellés parasites de quelques insectes » (st., in collab.). – 54. « Herpetomonas et spirochaeta de la blatte orientale » (st., in collab.). - 55. « Contribution à l'étude des flagellés des Culicides, des Muscides, des Phlébotomes et de la blatte orientale » (st., in collab.). – 56. « Sur un Herpetomonas du loir » (st., in collab.). – 57. « Des Hématozoaires du gecko et specialement de Herpetomonas tarentolae » (st., in collab.). – 58. « Trypanosome de la chauve souris en Italie » (st.). - 59. « Expérience sur le flagellés de la punaise du chou » (st., in collab.). – 60. « Sur un parasite particulier d'une tanche. Culture des Trypanosomes du poisson » (st.). - 61. « Ricerche sui protozoi e sulle microfilarie dei cani in provincia di Bologna e di Ferrara » (st.). - 62. « Observations sur ler hématozoaires des viseaux d'Italie » (st.). – 63. « Hématozoaires particuliers d'un oiseau : Hypoleis hypoleis » (st.). - 64. « Piroplasmose chez un petit loir : Myoxus avellanarius » (st.). - 65. « Sur des cultures très anciennes de flagellés » (st.). - 66. « Su di una tripanosomiasi dei cammelli a Giarabub in Cirenaica » (st.). – 67. « Su di una Emogregarina del piccione » (st.). - 68. « Su di una tripanosomiasi dei cammelli a Giarabub in Cirenaica » (st., in collab.). – 69. « Su di alcune ricerche in riguardo alla Leucocitogregarina " Hepatozoon ratti " » (st., in collab.). - 70. « Su di una spirochetosi del pipistrello » (st.). – 71. « Su di un parassita pigmentato dello scoiattolo » (st.). – 72. « Nuove ricerche su piante a lattice in ispecie Apocinee ed Asclepiadee » (st.). - 73. « Spirochetose des punaises des Euphorbes et du Latex » (st., in collab.). – 74. « Essais d'inoculation aux souris blanches du latex parasité de différentes espèces d'Euphorbes » (st.). – 75. « Amibes et autres protozoaires de plantes à latex du Museum de Paris » (st.). - 76. « Sur une amibe des figuiers de plein air de la region parisienne et sa culture » (st.). – 77. « Flagellés et amibes d'une Urticacée exotique " Ficus parietalis " » (st.). – 78. « Sur une amibe de la laitue " Lactuca sativa " » (st.). – 79. « Essais d'inoculation de différents protozoaires dans le latex des Euphorbes » (st.). – 80. « Essais d'inoculation au chat d'amibes du latex des plantes » (st.). – 81. « Protozoaires de Muscides divers capturés sur des Euphorbes » (st.). – 82. « Action du latex d'Euphorbes sur différents trypanosomes » (st.). – 83. « Essais d'inoculation de latex parasités aux souris blanches » (st.). - 84. « Action des latex végétaux sur différents protozoaires » (st.). - 85. « Sur un protozoaire d'Euphorbia cereiformis et sur sa culture » (st.). – 86. « Sur un flagellé particulier d'une Urticacée (Ficus beniamina) » (st.). – 87. « Inoculation de flagellés d'insectes dans le latex des Euphorbes » (st.). – 88. « Sur un flagellé d'une Asclépiadacée » (st.). – 89. « Nouvelles recherches sur les protozoaires des plantes à latex » (st.). – 90. « Sur les protozoaires des plantes » (st.). – 91. « Sui protozoi delle piante » (st.). – 92. « Brevi note di Entomologia sulla Somalia e sulla Eritrea » (st.). – 93. « L'Anopheles elutus nel Ferrarese » (st.). – 94. « Osservazioni entomologiche sulle Colonie Italiane » (st.). – 95. « Terza nota di entomologia sulle Colonie Italiane » (st.). – 96. « Su di alcune specie di zanzare non ancora descritte nelle nostre Colonie » (st.). – 97. « Sulla distribuzione degli Ixododi nelle nostre Colonie : Tripolitania » (st.). - 98. « Sulla distribuzione degli Ixododi nelle nostre Colonie : Somalia » (st.). – 99. « Sulla distribuzione degli Ixododi nelle nostre Colonie : Cirenaica » (st.). - 100. « Sulla distribuzione degli Ixododi nelle

nostre Colonie: Eritrea » (st.) – 101. « Distribuzione degli Ixodidi nello Yemen » (st.). – 102. « Myiasi nasali e Myiasi gastrointestinale » (st.). – 103. « Tumori umani e sperimentali da parassiti animali » (st.). – 104. « Un nuovo caso di Myiasi intestinale » (st.). – 105. « Su di un caso di Elefantiasi » (st., in collab.). – 106. « Su di un focolaio di Anchilostomo-anemia in provincia di Modena » (st , in collab.). – 107. « Febbre da puntura di zecche in Cirenaica » (st., in collab.). – 108. « Su di un Plasmodio pigmentato di una scimmia » (st.). – 109. « È il maiale recettivo all'infezione malarica ? » (st.). – 110. « Brevi note di malariologia in provincia di Bologna » (st.). – 111. « Malaria e risaia » (st.). – 112. « Appunti di malariologia sulle Colonie italiane e sugli agenti trasmissori » (st.). – 113. Commemorazione di Laveran (st.). – 114. « Riproduzione sperimentale della lebbra nella scimmia e nei ratti » (st., in collab.). – 115. « Ancora sulla riproduzione sperimentale della lebbra nella scimmia » (st.). – 116. « Ancora sulla riproduzione sperimentale della lebbra nella scimmia » (st.). – 117. « Sulla riproduzione sperimentale della lebbra nella scimmia » (st.). – 118. « Manuale di Patologia Tropicale » (st. in collab.).

4. Mola Pasquale. — 1. « Su di un cestode del Carcharodon Rondeletii » (st.). – 2. « Di alcune specie poco studiate o mal note di Cestodi » (st.). – 3. « Osservazioni sul tegumento dell'Anchistrocephalus » (st.) – 4. « Una nuova tenia della talpa » (st.). – 5. « Nota intorno ad una forma di cestode di pesce fluviatile » (st.). – 6. « Les organes génitaux de Taenia micropunctata » (st.). – 7. « Un nuovo elemento della Gallinula chloropus » (st.). – 8. « Ueber eine neue Cestodenform » (st.). – 9. « La ventosa apicale a che è omologa » (st.). – 10. « Sopra la Davainea circumvallata » (st.). – 11. « Due nuove forme di Tetraphyllidae » (st.). – 12. « Di un nuovo cestode del genere Davainea Blanch » (st.). – 13. « Choanotaenia infundibulum » (st.). – 14. « Davainea pluriuncinata » (st.). – 15. « Die Parasiten des Cottus gobio » (st.). – 16. « Nuovi ospiti di uccelli » (st.). – 17. « Cestodes avium » (st.). – 18. « Una nuova classifica di cestodi » (st.). – 19. « Vi è sinonimia tra Davainea bothrioplitis (Piana) e Davainea echinobothrida (Mégnin)? » (st.). – 20. « Due nuove specie di Onchobothrium » (st.). – 21. « Vermi parassiti dell'ittiofauna italiana » (st.). – 22. « Per una nuova classifica dei Cestodi » (st.). – 23. « Il nuovo genere Viscoia-Mola 1929 » (st.). – 24. « Descriptio platodorum sine exstis » (st.). – 25. « Platoda sine exstis » (ms., con tavole).

5. Penso Giuseppe. — 1. « Sopra un'ameba parassita della vescica urinaria » (st.). – 2. « Giardia intestinalis Lambl e giardiasi » (st.). – 3. « Sopra una anomalia di un " Ankylostoma duodenale " » (st.). – 4. « Sopra un caso di pseudo parassitismo da " Anguillula aceti " » (st.). – 5. « Sulla patogenicità del Balantidium coli » (st.). – 6. « Impressioni mediche dopo un viaggio intorno all'Africa » (st.). – 7. « Osservazioni ed esperienze sull' "Anguillula aceti " » (st.). – 8. « Sui protozoi coltivati dalle feci umane » (ms.). 9. « Sugli sclerostomi del cavallo » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO *CARPI*

(Scadenza: 31 dicembre 1930 — Premio L. 1500).

1. " Mape Turritanus ". — « Protozoifauna sarda » (ms.).

2. Migliavacca Angelo. — « L'antagonismo delle ghiandole sessuali maschili e femminili. Ricerche sull'ovaio » (ms.).

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 aprile 1931 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. Garbasso

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Lampade termoioniche con caduta di potenziale sulla griglia.* Nota [1] del Socio A. Lo Surdo.

La caduta di potenziale che la corrente di accensione produce lungo il filamento di una lampada termoionica è un elemento che ha notevole influenza sulla forma delle caratteristiche della lampada stessa.

La corrente di placca, dovuta agli elettroni che passano attraverso alle maglie della griglia si può considerare come risultante dalla somma delle correnti elementari delle singole maglie. Col variare del potenziale della griglia queste correnti elementari non variano però tutte insieme allo stesso modo poichè la caduta di potenziale del filamento perturba non uniformemente l'azione dei vari elementi di griglia sugli elettroni ad essi vicini. Col crescere del potenziale della griglia gli elettroni devono quindi cominciare ad uscire dalle maglie che si trovano vicine all'estremo negativo del filamento, poi dalle maglie via via più lontane lungo il filamento, e per ultimo da quelle prossime all'estremo positivo.

In conseguenza di questo comportamento non uniforme delle diverse parti dello spazio filamento-griglia, l'incremento del potenziale della griglia occorrente per ottenere un dato aumento dell'intensità della corrente di placca, deve crescere col crescere della caduta di potenziale lungo il filamento: questa caduta deve quindi abbassare la conduttanza mutua della lampada.

(1) Presentata nella seduta del 12 aprile 1931.

Per constatare questo fatto e per studiare la possibilità di correggere l'effetto della caduta di potenziale del filamento ho ideato delle lampade nelle quali la griglia è costituita da un conduttore di forma opportuna in cui si può far passare una corrente: regolando l'intensità ed il senso di questa corrente si può attenuare od esaltare la non uniformità di comportamento delle varie parti dello spazio filamento griglia.

La fig. 1 rappresenta il filamento e la griglia di una lampada che può servire a questo scopo. Il filamento rettilineo F F′ è circondato da una griglia formata da fili rettilinei G G′ disposti secondo le generatrici di un cilindro avente per asse il filamento e ripartiti uniformemente attorno a questo.

Fig. 1.

Fig. 2.

I fili di griglia sono tutti riuniti in parallelo mediante due anelli che collegano elettricamente tutti gli estremi che stanno da una stessa parte; questi anelli sono messi in comunicazione, attraverso ad un reostato regolabile con una pila [1].

Se nella griglia non passa corrente, cioè se la griglia è equipotenziale come nelle lampade ordinarie, la differenza di potenziale fra un punto della griglia e quello ad esso più vicino del filamento ha un valore che varia in modo continuo da un estremo all'altro.

(1) Attorno a questa griglia è disposta coassialmente una placca di forma cilindrica che non è rappresentata nella figura.

Facendo passare nella griglia una corrente dello stesso senso di quella che passa nel filamento si produce una caduta di potenziale che, regolando opportunamente l'intensità della corrente, diminuisce la differenza fra le tensioni di griglia corrispondenti alle varie sezioni normali dello spazio filamento griglia.

Una corrente in senso contrario accresce invece quella differenza.

La costruzione della lampada descritta avanti ha presentato in pratica delle notevoli difficoltà, sopratutto in relazione al fatto che i fili di griglia devono esser fatti con materiale di resistenza specifica notevolmente maggiore di quella del filamento. Perciò, dopo varî tentativi e pur avendo ottenuto

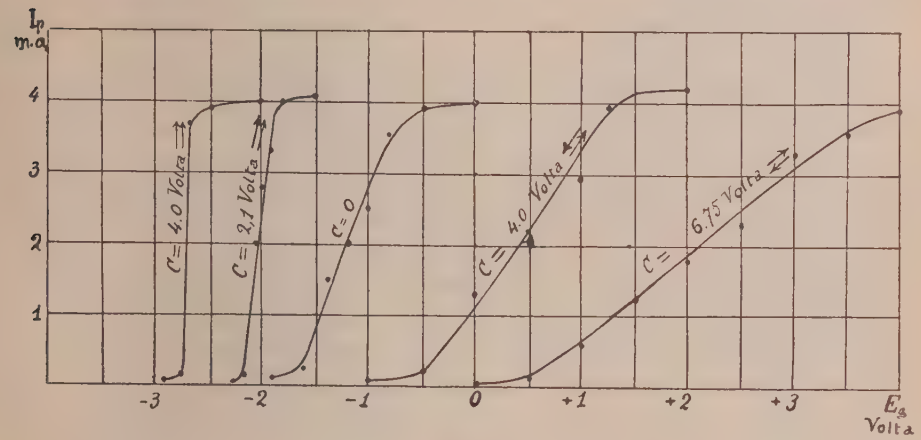


Fig. 3.

qualche risultato promettente, specialmente con una griglia fatta di fili di nichel–cromo dello spessore di 1/20 di millimetro, ho preferito adottare in un secondo tempo una griglia di forma differente. Nelle lampade di questo tipo il filamento rettilineo F F′ (fig. 2) è circondato da una griglia elicoidale G G′ che ha per asse il filamento stesso. La corrente che passa in questa griglia elicoidale produce una caduta di potenziale che, in direzione parallela al filamento, si ottiene attraverso ad un percorso di lunghezza tanto maggiore per quanto più grande è il rapporto fra la lunghezza di una spira e il passo. Ho potuto così adoperare un filo di resistenza specifica dello stesso ordine di quella del filamento.

Nella figura 3 sono rappresentate alcune caratteristiche *corrente di placca–tensione di griglia* ottenute con una lampada di questo tipo nella quale tanto il filamento quanto la griglia erano fatti di filo di tungsteno di mm. 0.2 di spessore (1).

(1) Nella fig. 3 C rappresenta la caduta di potenziale sulla griglia: i segni $\rightarrow$ e $\rightleftarrows$ indicano che essa ha rispettivamente verso uguale o contrario della caduta di potenziale sul filamento. La tensione di placca, 90 volta, è la stessa per tutte e cinque le caratteristiche.

Le dimensioni degli elettrodi di questa lampada sono le seguenti:

Lunghezza della parte emittente del filamento . . .	mm. 28 circa
Altezza della griglia a spirale (misurata secondo l'asse)	mm. 42 »
Passo della spirale	mm. 1
Diametro della spirale	mm. 5
Diametro della placca	mm. 50
Altezza della placca	mm. 40

Le caratteristiche ottenute, come si vede nella fig. 3, hanno confermato le previsioni che mi avevano indotto a fare queste esperienze. La caduta di potenziale C lungo la griglia, quando è dello stesso verso di quella del filamento e non supera un certo valore, fa più ripido il tratto centrale della caratteristica, cioè aumenta la conduttanza mutua della lampada: produce l'effetto inverso quando è di senso opposto.

Debbo avvertire però che le caratteristiche qui riportate rappresentano questo fenomeno solo qualitativamente e non quantitativamente, poichè nelle esperienze fatte coi primi modelli di lampade non ho ancora potuto eliminare l'influenza perturbatrice della flessibilità della spirale.

Ma l'interesse che, a mio giudizio, presenta il risultato ottenuto, il quale lascia intravedere la possibilità di un aumento notevole del potere amplificatore delle lampade termoioniche, mi ha spinto a dare notizia di questa ricerca senza attendere i risultati che si potranno ottenere in condizioni migliori, in seguito ad esperienze per le quali prevedo che occorrerà ancora qualche tempo.

Fisica. — *Di alcuni nuovi fatti constatabili con le comuni cellule fotoelettriche.* Nota [1] del Socio Q. Majorana.

Nell'ultima parte della Nota da me presentata nella precedente seduta ho accennato alla constatazione di una elettrizzazione negativa del metallo fotoelettrico, di una comune cellula, quando questo viene colpito da luce rossa.

Il fatto ha formato per mio conto, oggetto di attento esame in questo ultimo mese, e pur avendo potuto constatare che esso si verifica con circa una ventina di cellule fotoelettriche di cui io dispongo (al sodio od al potassio, nel vuoto o in gas nobile), non posso per ora pronunziarmi sulla sua rigorosa interpretazione.

Debbo dire peraltro, che il fatto in parola si appalesa come notevolmente complesso, e che inoltre, non avendo io peranco proceduto alla diretta costruzione di cellule fotoelettriche (per poter così esser sicuro delle loro particolari caratteristiche), mi sono mancati notevoli elementi di giudizio.

Pur nondimeno, ritengo necessario descrivere obbiettivamente, quanto da me è stato osservato, salvo a ritornare in seguito su di una eventuale spiegazione o teoria.

Tutte le cellule da me impiegate sono al sodio od al potassio; provengono dalle case tedesche Goetz o Stöhrer in gran parte; una è della firma Serpi di Parigi; una è della Casa Müller–Unkel, fornita più di dieci anni or sono. Di esse, qualcuna è vuota di gas; del che, oltre che per la dichiarazione del costruttore, mi sono assicurato per la mancanza o quasi di conducibilità alla scarica elettrica. Altre sono riempite di neon od argon. Qualcuna delle cellule presenta l'aspetto bianco splendente, ma ruvido, del sodio o del potassio; altre la colorazione del rispettivo idruro, caratteristica di molte cellule del commercio.

Ma a parte tali constatazioni, debbo dire che i fatti che ora esporrò si sono presentati indifferentemente su una qualsiasi delle venti cellule da me sperimentate, con intensità sia pure alquanto diversa da cellula a cellula. Non mi pare perciò che essi si possano ascrivere alla presenza del gas nell'interno delle cellule, poichè anche quelle nel vuoto si comportano come le altre.

Elementi di incertezza sinora per la perfetta descrizione di quanto ho osservato, restano dunque: la natura precisa della superficie del metallo foto-

(1) Presentata nella seduta del 12 aprile 1931.

elettrico (non essendo questo stato da me preparato); e inoltre quella della superficie del metallo costituente la griglia. La griglia, nelle cellule tedesche da me usate, è di nichel, e sembra non ricoperta da metallo alcalino, proveniente dalla placca; ma si comprende come sia difficile dire se tale asserzione corrisponda con tutto rigore al vero, anche perchè può darsi che una volta liberata, con un artificio qualunque, la griglia da un velo di sodio o di potassio, esso può riformarsi in seguito ad uso prolungato della cellula. È però certo che le cellule da me sperimentate, se adoperate con campo acceleratore inverso (griglia negativa), di un certo valore, non dànno notevole corrente fotoelettrica; ciò sta a dimostrare se mai, la tenuissima consistenza dello strato di metallo alcalino perturbatore sulla griglia.

Chiarite così le condizioni particolari delle cellule da me usate, riferirò sulle osservazioni compiute, servendomi, in particolare, di due cellule al sodio l'una e al potassio l'altra, nel vuoto. La superficie fotoelettrica di tali cellule è di circa 8 cmq. La griglia, di diametro alquanto più piccolo della placca, è costituita da filo di nichel, sottilissimo a maglie piuttosto larghe, ed è posta a circa 5 mm. di distanza dalla placca. Poichè era stata da me constatata un'influenza particolare delle radiazioni rosse, ho realizzato un dispositivo per influenzare le cellule in esame con radiazioni di varie lunghezze d'onda. All'uopo, la luce di una lampada intensiva ad incandescenza da 1000 watt concentrata su di una fenditura di circa $^1/_2$ mm., viene raccolta da un obbiettivo e poi dispersa da un prisma di flint, in guisa da ottenere uno spettro su di uno schermo (posto alla distanza complessiva di circa m. 1,50 dalla fenditura) lungo una diecina di centimetri. Tale lunghezza si intende contata fra le prime radiazioni ultraviolette e le prime infrarosse. Un'indagine preventiva permette di graduare il sostegno della cellula, in guisa da far cadere su questa (filtrata da una seconda fenditura di circa 1 mm.) le λ di vario valore. A tal fine si è sostituita alla lampada intensiva, una lampada a mercurio, od anche una fiamma al litio per le radiazioni rosse. La cellula in esame, racchiusa in un conveniente astuccio fornito della detta fenditura, è connessa con un elettrometro Dolezalek e con un potenziometro come è indicato nella fig. 1, nella quale non è rappresentata la parte ottica. Il metallo o placca della cellula è connesso con una coppia di quadranti; l'altra coppia è a terra; l'ago dell'elettrometro è elettrizzato a circa 500 volt. La sensibilità dell'istrumento, su scala a un metro, risulta così di circa 150 mm. per volt. Il potenziometro della fig. 1 permette di conferire alla griglia, un potenziale sia acceleratore, sia ritardatore del flusso dei fotoelettroni emessi dalla cellula sotto l'azione della luce. Nel primo caso il punto A del reostato A B è negativo rispetto a B; nel secondo caso avviene il contrario, invertendo la batteria di quattro volt segnata in figura. Il dispositivo, che si è voluto riportare per maggior chiarezza, non ha dunque nulla di nuovo rispetto a quanto altri sperimentatori hanno già realizzato da molto tempo. Avverto soltanto, che la disposizione potenziometrica non conferisce alla griglia mai potenziali ag-

giuntivi superiori a uno o due volt. Questi si aggiungono algebricamente alla d. d. p. naturale di contatto esistente fra placca e griglia della cellula

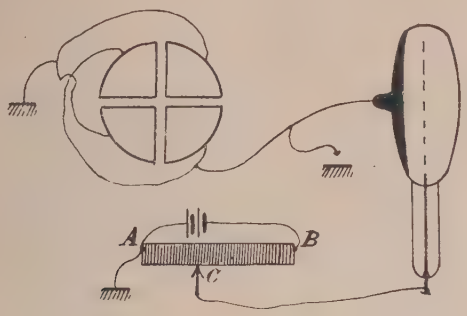


Fig. 1.

fotoelettrica, per determinare il campo agente sui fotoelettroni. Avverto inoltre, che la griglia della cellula è permanentemente in contatto metallico con una

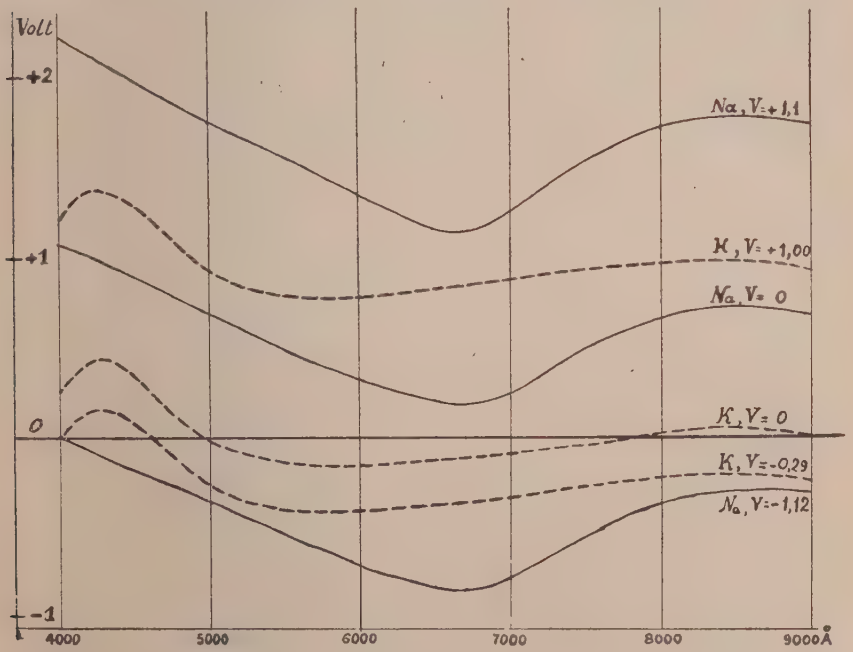


Fig. 2.

gabbia metallica, che completamente circonda questa, avente per iscopo la protezione elettrostatica di essa, e di impedire l'ingresso ad altre radiazioni

all'infuori di quelle penetranti attraverso la fenditura, portata dalla gabbia stessa.

Con tale dispositivo, si sono tracciati i diagrammi della fig. 2 che si riferiscono alla cellula B N_a V (quarzo, sodio, vuoto) N. 2806/619, ed alla B K V (quarzo, potassio, vuoto) N. 131/0276, entrambe fornite in diverse epoche dalla Ditta Goetz. Sui due assi coordinati si sono riportati i valori delle successive λ agenti, e delle corrispondenti deviazioni dell'elettrometro, espresse in volt, mentre si teneva costante per ogni diagramma la differenza di potenziale V fra griglia e placca della cellula. Ciascuna curva corrisponde dunque ad una determinata posizione dell'indice C, del potenziometro A B (fig. 1). Le curve a tratto pieno si riferiscono alla cellula al sodio, quelle a a tratto interrotto alla cellula al potassio. Caratteristica generale dei due gruppi di curve è che, per ciascun metallo, le varie curve tracciate sono sensibilmente, od in prima approssimazione, delle curve parallele, spostate cioè alquanto secondo l'asse dei potenziali (deviazioni elettrometriche).

Per il sodio, si osserva che se V è nullo, e rimane quindi agente dentro la cellula il solo potenziale dovuto alla f. e. m. di contatto fra placca e griglia (che per le ragioni esposte è incognito, ma che può probabilmente corrispondere a quella fra sodio e nichel), la curva parte da circa + 1.1 volt per 4000 Å; si abbassa, con andamento quasi rettilineo sino ad un minimo di + 0.3 volt, a 6700 Å; per poi risalire nel rosso od ultrarosso, come indica il diagramma. Se il potenziale V, aggiunto con il potenziometro, ha valori positivi, la curva si sposta in alto; se ha valori negativi, questa si sposta in basso. Così, si rileva, che per un potenziale di — 1.12 volt imposto alla griglia, la curva, partendo da una deviazione nulla dell'elettrometro per 4000 Å, si mantiene del tutto, nel campo di valori negativi dati dall'elettrometro. In altri termini, in tali condizioni, qualunque sia il valore di λ, l'elettrometro accusa non una sfuggita di elettroni dal sodio (e conseguente elettrizzazione positiva), ma un accrescimento di elettroni liberi alla sua superficie. Le tre curve del sodio riportate in figura e le altre tutte da me rilevate, presentano il minimo sempre a 6700 Å, qualunque sia la loro distanza dall'asse delle λ.

Per il potassio si hanno le tre curve tratteggiate della figura; esse presentano andamento analogo a quello del sodio, con le seguenti differenze. Si nota anzitutto in tutte le curve un massimo intorno a 4350 Å; e tale fatto è evidentemente dovuto al fenomeno f. e. selettivo che, per il potassio, si manifesta a lunghezze d'onda più grandi di quelle del sodio; nel caso del sodio il massimo in parola non si è constatato, perchè probabilmente cadente fuori dei limiti del diagramma. Anche per il potassio si rileva l'esistenza di un minimo, questa volta intorno ai 5600 Å; ma in modo meno accentuato che per il sodio.

È appena il caso di rilevare che le curve riportate non possono, con tutta esattezza ritenersi riferibili (con i valori particolari dei singoli punti)

a tutte le cellule al sodio od al potassio. Queste possono comportarsi da caso a caso in modo notevolmente diverso; ma, debbo dire che, per tutte le ventuna cellule da me sperimentate, l'andamento generale delle varie curve osservate è simile a quello dei diagrammi riportati.

Per la corretta interpretazione dei diagrammi debbo dire inoltre, che le deviazioni elettrometriche che hanno dato luogo al tracciamento della parte di ciascuna curva trovantesi verso la destra della figura 2 (cioè quella riferentesi alle grandi λ) si sono appalesate *meno pronte* delle altre. L'elettrometro, specie quando si esperimenta con λ prossimo ad un micron, devia assai lentamente; tanto che occorre attendere talvolta circa un minuto primo, prima di leggere la deviazione. Il fatto si spiega pensando ad un effetto dovuto a luce diffusa dal prisma adoperato per la formazione dello spettro. Tale prisma appare infatti illuminato da leggera luce bianca, che si sovrappone a quella sensibilmente monocromatica, e che, penetrando attraverso la fenditura, arriva alla cellula. Ora, mentre tale luce (peraltro assai debole) non ha sensibile effetto perturbatore, quando agiscono le λ più refrangibili, che impongono una netta e notevole deviazione positiva all'elettrometro; quando tale deviazione si affievolisce, quell'effetto perturbatore si accresce. Rimane inoltre accertato il fatto che la luce diffusa in parola non è capace di imporre una deviazione positiva all'elettrometro, (almeno altrettanto notevole) quando essa agisce in concomitanza con le λ medie, per le quali si ha il minimo, nei singoli diagrammi; infatti, anche allora tale luce diffusa conserva sensibilmente la stessa intensità. La considerazione di questa circostanza, tocca assai da vicino il punto più interessante delle esperienze in parola, e su essa si avrà occasione di ritornare.

In una serie successiva di esperienze, ho sostituito all'elettrometro segnato nella fig. 1, un galvanometro di grande sensibilità (circa 10^{-11} amp., per mm. di deviazione sulla scala a quattro metri di distanza). Tale galvanometro è inserito tra la placca o metallo fotoelettrico della cellula e la terra; il potenziometro A B, è ancora adoperabile alla stessa guisa già indicata. Senza riportare per ora in dettaglio le osservazioni fatte con le stesse due cellule al sodio e al potassio, che hanno servito per la costruzione dei diagrammi della fig. 2, dirò che le indicazioni galvanometriche concordano con quelle elettrometriche. Ciò sta a indicare che queste ultime corrispondono all'esistenza di vere f. e. m, che agendo, nel secondo gruppo di esperienze, sul galvanometro dànno luogo a vere e proprie correnti continue, sotto l'azione della luce, per quanto deboli. Tali correnti possono esser dirette dalla griglia alla placca, o viceversa, dipendentemente dal valore della lunghezza d'onda impiegata e della d. d. p. aggiunta mediante il potenziometro. Esse hanno andamenti, al variare di tali parametri, che possono esser rappresentati da curve analoghe a quelle tracciate con l'elettrometro, prescindendo beninteso dalla scala grafica; i minimi o i massimi hanno la stessa posizione rispetto ai valori delle λ. È peraltro da av-

vertire, che trattandosi di deviazioni galvanometriche, il valore di queste è anche dipendente dalla intensità delle radiazioni; la qualcosa non avveniva di solito nelle misure elettrometriche. Ciò si è potuto verificare, sperimentando con varia apertura delle due fenditure situate l'una prima del prisma (verso la sorgente) e l'altra presso la cellula fotoelettrica.

Un'altra serie di esperimenti è stata eseguita servendomi di schermi o filtri di vetro varî, al fine di togliere da un fascio di luce bianca diretto sulla cellula, qualche parte delle varie λ. Il dispositivo adoperato è ancora quello della fig. 1; abolito il prisma viene interposto, tra lampada intensiva e cellula, uno degli schermi in parola. Nella prima colonna della seguente tabella sono riportate le deviazioni dell'elettrometro espresse in mm., quando nessuna d. d. p. V è aggiunta dal potenziometro, tra placca e griglia; nella seconda colonna si hanno le deviazioni osservabili, quando V = — 0.7 volt. Con tale d. d. p. si viene a impedire l'uscita o l'entrata di elettroni nella placca della cellula (al qual fatto corrisponde una deviazione nulla dell'elettrometro), quando si lavora senza schermo alcuno.

potenziale di griglia	0	— 0.7 volt
luce totale, bianca	130	0
schermo giallo	70	— 75
» rosso	75	— 60
» bleu	160	+ 35
» all'ossido di Ni	170	+ 45

Da questa tabella si rileva che sopprimendo dalla luce totale bianca della lampada le radiazioni più refrangibili (schermi giallo e rosso) la deviazione dell'elettrometro si abbatte verso le cariche negative; mentre sopprimendo le radiazioni meno refrangibili (schermi bleu od al Ni), la deviazione si accentua verso le cariche positive. È interessante quanto ci dice l'ultima colonna, che cioè avendo compensato la deviazione in luce bianca, con schermo giallo si ha deviazione negativa, mentre con schermo bleu od all'ossido di Ni si ha deviazione positiva.

L'uso di uno schermo all'ossido di manganese (che come è noto è trasparente alle λ di circa 1 μ) non ha dato alcun risultato; il che dimostra che l'effetto termina all'incirca con le radiazioni rosse.

Gli esperimenti con gli schermi sono stati ripetuti col galvanometro, pervenendosi a risultati del tutto analoghi.

Non è mia intenzione di emettere per ora una precisa opinione sulla vera natura dei fatti constatati e descritti. Prima di far ciò, desidero assicurarmi dell'influenza che su tali fatti possono eventualmente avere sia lo

stato superficiale della placca, sia la natura della griglia, che come ho già accennato può esser ricoperta da uno strato più o meno fotoelettrico, e complicare perciò notevolmente le varie osservazioni. Ciò formerà oggetto di mie prossime ricerche.

Meccanica. — *Nuove idee sulla teoria della relatività.* Nota del Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica (Astrofisica). — *Nuova prova dell'influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce. Spiegazione balistica della legge di Miss Leavitt.* Nota II [1] del Corrisp. M. La Rosa.

Abbiamo detto in fine di una precedente Nota dell'esistenza di una relazione fra la massa di una stella e la sua grandezza assoluta.

Il prof. Eddington [2], per il primo, basandosi sopra le conoscenze teoriche oramai acquisite sullo stato interno delle stelle e sul loro equilibrio irradiativo dedusse, infatti, la notevolissima relazione:

$$-m = f(\mathrm{M}) + b_0 \tag{6}$$

dove m è la grandezza stellare assoluta dell'astro, e $f(\mathrm{M})$ indica una funzione della sua massa che in prima approssimazione si traduce nella proporzionalità diretta al $\log \mathrm{M}$ e dove b_0 è un parametro che raccoglie in sè tutti gli elementi di incertezza che possono venire sia dall'osservazione sia dal giuoco di fattori poco influenti e trascurati nella teoria.

Questa conclusione, però, non è stata generalmente accettata. Il prof. Jeans [3] discutendo dal canto suo la questione dello stato interno e dell'equilibrio irradiativo delle stelle, è giunto alla conclusione che il legame fra m ed M deve contenere, per ragioni intrinseche al problema, un termine dipendente da T (temperatura assoluta dello strato superficiale della stella) ed ha sostituito alla relazione di Eddington la seguente:

$$-m = \Phi(\mathrm{M}) + a_2 \log \mathrm{T} + a_3 \tag{7}$$

(1) Presentata nella seduta del 12 aprile 1931.
(2) « M. N. » 84, pp. 104, 308, 372 (1924).
(3) « M. N. » 85, pp. 196, 394, 792 (1925).

dove $\Phi(M)$ è ancora sensibilmente proporzionale a $\log M$, a_2 è un coefficiente sensibilmente costante, che in pratica (cioè nell'applicazione ai casi concreti in cui un confronto diretto con l'osservazione è stato possibile) è risultato sempre molto vicino a 1, ed a_3 una costante. Scrivendo al posto di $\Phi(M)$, $a_1 \log M$ e facendo $a_2 = 1$ abbiamo, dunque:

$$(7') \qquad -m = a_1 \log M + \log T + a_3 .$$

Discutendo la sua equazione, e confrontandola con i dati più sicuri dell'osservazione, il prof. Jeans stesso ha però riconosciuto che i risultati a cui si perviene non sono sensibilmente discosti da quelli già ottenuti dall'Eddington, almeno per quanto riguarda l'accordo con i dati concreti, nei casi per i quali la conoscenza delle parallassi e delle *masse* raggiunge quei limiti di approssimazione che sono necessari per dare una certa forza alle verifiche numeriche.

Malgrado le divergenze concettuali fra le due teorie resta dunque stabilito, ed in modo inoppugnabile, l'esistenza di un legame semplice fra le nostre grandezze, legame che non si allontana (come l'applicazione pratica ha dimostrato) dalla formola di Eddington, e che è certamente assai da vicino rappresentato da quella di Jeans.

Accoppiando la formola di Eddington con la (5) stabilita nella Nota precedente, e cioè con la relazione $M = p' \tau^4$ troviamo [1]:

$$-m = 4\, a \log \tau + b' \quad , \qquad \text{dove } b' = b \log p' .$$

E facendo lo stesso, per la legge di Jeans abbiamo:

$$-m = 4\, a_1 \log \tau + \log T + a'_3 \qquad \text{dove } a'_3 = a_3 + a_1 \log p' .$$

(1) Per semplicità di scrittura e di linguaggio abbiamo trattato la (5) come un'eguaglianza, ma terremo sempre presente che essa dev'essere verificata dentro limiti di approssimazione di conveniente ampiezza. Tenendo conto di questa circostanza si comprende anche come si possa accoppiare la (5) sopra citata, che contiene la massa totale della doppia ($M = M_1 + M_2$) con le formole (6) e (7') che contengono la massa di una sola. Infatti si sa che la massa del *compagno* è sempre dell'ordine di grandezza di quella dell'astro centrale sicchè si può porre:

$$M = M_1 \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right)$$

dove il fattore in parentesi risulta sempre maggiore di 1 e poco minore di 2. E poichè il coefficiente pa_1 non è grande si ha in termine della forma $p'a$, $\log \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)$ che è poco variabile e sempre dell'ordine di grandezza delle fluttuazioni a cui per natura loro vanno soggette le relazioni che abbiamo stabilite.

La prima traduce in termini rigorosi una legge interessante che è una generalizzazione di quella trovata da Miss Leavitt per le Cefeidi; essa infatti stabilisce, a meno di una costante, la proporzionalità fra le grandezze stellari effettive delle variabili di uno stesso tipo e di uno stesso ammasso ed il logaritmo del periodo del cambiamento di luce; l'altra arriva al risultato stesso a meno dell'aggiunta del termine contenente il log T. E si comprende che se per le stelle di uno stesso ammasso la T non varia molto da caso a caso l'influenza di questo termine può risultare piccola, abbastanza per rimanere assorbita – proprio come vuole l'Eddington nell'incertezza del rimanente termine.

In ogni caso il suo giuoco sarà sempre quello di un modesto termine di correzione che si farà sentire poco in questo genere di relazioni che si scostano per natura loro dal carattere di leggi rigorose. Ad ogni modo non sarà superfluo avere sott'occhio i dati dell'osservazione, ridotti nella forma più adatta al confronto con le formole; se ne potrà forse trarre qualche elemento di giudizio.

A fine di eliminare dai calcoli quanti più elementi d'incertezza è possibile, conviene di servirsi di una stella di confronto (appartenente al gruppo in esame), e di riferire ad essa tutte le osservazioni, nel modo seguente:

Se m_0, M_0, t_0, T_0 sono le grandezze spettanti alla stella di confronto avremo, per differenza, le relazioni:

$$m_0 - m = 4\,a \log \frac{\tau}{\tau_0}$$

secondo la legge di Eddington, oppure:

$$m_0 - m = 4\,a_1 \log \frac{\tau}{\tau_0} + \log \frac{T}{T_0}$$

secondo quella di Jeans.

Secondo la prima dovremmo dunque aspettarci la costanza del rapporto fra $(m_0 - m)$ e $\log \frac{\tau}{\tau_0}$ [1] mentre, secondo l'altra, dovremmo aspettarci apprezzabili e saltuarie variazioni di tale rapporto dipendenti dalla regolare variazione di $\log \frac{\tau}{\tau_0}$ lungo la serie delle osservazioni ed inoltre dei cambiamenti dipendenti da quelli saltuari di $\log \frac{T}{T_0}$.

(1) La costanza di cui si parla va intesa con quella larghezza di significato dichiarata nella nota (1), sia per il carattere della (5), sia anche per la variabilità che affetta la quantità b' della formola di Eddington, la quale fra l'altro prevede pure l'inclusione di un termine correttivo dipendente dalla temperatura.

Prendendo i dati di osservazione da cui fu dedotta la legge di Miss Leavitt e calcolando il rapporto

$$(8) \qquad n = \frac{m_o - m}{\log \tau - \log \tau_o}$$

abbiamo trovato i numeri che sono raccolti nel seguente specchietto:

Mass.	Min.	Med.	Per.	n_1	n_2	n_3
14.8	16.1	15.45	1.25	—	1.061	1.55
14.8	16.4	15.60	1.66	—	1.631	1.91
14.8	16.4	15.60	1.76	—	1.722	1.97
15.1	16.3	15.70	1.88	—	2.07	2.15
14.7	15.6	15.15	2.17	—	—	1.62
14.4	15.7	15.05	2.91	—	—	1.78
14.7	15.9	15.30	3.50	—	—	2.62
14.6	16.1	15.35	4 29	—	—	3.01
14.3	15.3	14.80	4.55	2.03	—	1.990
14.3	15.5	14.90	4.99	1.62	—	2.406
14.4	15.4	14.90	5.31	1.53	—	2.575
14.3	15.2	14.75	5.32	1.740	2.71	2.129
13.8	14.8	14.30	6.29	2.417	—	1.307
14.1	14.8	14 45	6.65	2.055	2.182	1.920
14.0	14.8	14.40	7.48	1.968	2.412	2.20
13.9	15.2	14.55	8.40	1.600	1.187	3.29
13.6	14.7	14.15	10.34	1.934	2.126	2.258
13.4	14.6	14.00	11.64	1.955	2.236	2.229
13.8	14.8	14.30	12.42	1.573	1.310	—
13.4	14.4	13.90	13.08	1.994	2.206	—
13.4	14.3	13.85	13.47	2.02	2.257	—
13.0	14.6	13.80	16.75	1.88	1.943	—
12.2	14.1	13.15	31.94	1.976	2.08	1.90
11.4	12.8	12.10	65.8	2.249	2.431	2.553
11.2	12.1	11.65	127.0	2.145	2.258	2.270

Si avverte che le colonne 1ª, 2ª e 4ª contengono i dati di osservazione riferiti da Miss Leavitt e cioè la grandezza della stella nei momenti

del massimo e del minimo di luce ed il periodo in giorni; la colonna 3ª contiene le medie dei numeri della 1ª e 2ª, che in mancanza di più esatte indicazioni vengono assunti come misure delle grandezze stellari effettive; i numeri delle ultime tre colonne contengono i valori trovati per la quantità n adottando tre riferimenti distinti. Più precisamente, a fine di eliminare in parte gli errori contenuti negli elementi della stella di riferimento, abbiamo assunto come tali, i dati medî dedotti dai tre gruppi di stelle, che sono segnati con una graffa al margine della prima colonna; e conseguentemente i rapporti della colonna n_1 sono quelli ottenuti prendendo come riferimento i dati medi del 1° gruppo a partire dall'alto, cioè quello formato dalle stelle 2ª, 3ª e 4ª; quelli della colonna n_2 hanno come riferimento i dati medî del 2° gruppo (le stelle da 9 a 12); e quelli segnati n_3 hanno come riferimento i dati medî delle stelle 20 e 21.

I numeri delle colonne n dimostrano che la legge di Miss Leavitt è ben lontana dal rivestire il carattere di una relazione rigorosa.

I rapporti n, non solo non sono costanti, ma dimostrano una lieve e generale dipendenza dai dati della stella di confronto, e ciò corrisponde bene a quanto vuole la formola (8); e presentano inoltre delle ampie fluttuazioni e qualche sensibilissimo scarto che ben si accordano col carattere delle nostre relazioni, espresse come sono da limitazioni.

L'accordo tra questo genere di regolarità, empiricamente scoperte, ed il nostro schema teorico non potrebbe essere migliore. La legge di Miss Leavitt può legittimamente essere considerata come caso particolare del legame generale avanti stabilito.

E poichè basi delle nostre considerazioni sono la relazione di Eddington-Jeans fra m ed M e l'applicazione del principio balistico alla velocità della luce, si dovrebbe poter concludere che la legge di Miss Leavitt costituisce una valida prova dell'esattezza di questi presupposti.

Il principio balistico esce, così, fortificato da questo suo nuovo cimento con la « realtà » osservata.

Ciò malgrado mi rendo ben conto che ancora gravi ostacoli troverà il suo accoglimento nel campo teorico.

La « relatività » ha reso senza dubbio grandi servigi agli sviluppi moderni delle teorie fisiche e non è possibile rinunziarvi.

Ma, a me sembra che l'adozione del « principio balistico » non debba per necessità importare la negazione di quella teoria; almeno nella parte più sostanziale, di quella che è stata più feconda di aiuti nelle costruzioni teoriche recenti. Alludo specialmente all'importante risultato riguardante la dipendenza della reazione d'inerzia (di un corpuscolo) dalla velocità del moto: ossia a quanto riguarda la revisione delle basi del 2° postulato della Meccanica classica. In questo punto la teoria di Einstein si è assicurata un indiscutibile successo.

Ora a me sembra che il medesimo risultato si possa conseguire con un diretto ed opportuno ritocco della relazione fondamentale fra forza, massa ed accelerazione; senza ricorrere all'espediente ingiustificato della costanza della velocità della luce, che del resto lo stesso Einstein ha dovuto lasciare cadere negli sviluppi successivi della sua teoria. Un tentativo teorico in questo senso sarebbe forse assai fecondo e certo molto istruttivo.

Nella speranza che altri possa assumersi questo compito, e che un terreno di conciliazione si possa presto trovare, credo per conto mio di dovere insistere sul *valore eccezionale* che hanno oramai attinto le *prove di fatto* in favore del principio balistico, (o quanto meno dell'ipotesi più larga, di una certa influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce). È, oramai tutto il campo dei fenomeni della variabilità delle stelle, con gli aspetti che essa presenta nei diversi tipi, con le particolarità che in tali tipi presenta, e con alcune delle sue leggi statistiche che viene a confermare quell'ipotesi.

Tornerò, prima di chiudere a quella, tra le obiezioni che mi sono state rivolte, che attende ancora una risposta. È stato affermato [1] che l'ipotesi baliistica sarebbe in ogni caso da rigettare per il semplice fatto che *l'intensità luminosa di certe stelle dovrebbe passare in certi casi per l'infinito.*

A parte l'opportunità, anzi il dovere, d'interpretare « cum grano salis » questo *passaggio istantaneo* per infinito, che in certi casi presenta il rapporto $\frac{\Delta t}{\Delta T}$ del mio schizzo teorico (ed a cui è proporzionale l'intensità della stella), così come si fa in tanti altri casi analoghi, sia nella fisica che in altre scienze: a parte la giustificata possibilità di appoggiarsi al principio di conservazione dell'energia, esteso *a tutto il periodo del cambiamento di luce* – per dedurre l'ampiezza vera del massimo (così come ho suggerito nei miei lavori) non è lecito, nello stato attuale delle nostre conoscenze, rigettare il principio balistico, malgrado le tante conferme assicurate, per questa sola circostanza. Ammesso pure che per effetto del sovrapporsi della velocità della stella con quella della luce, si sia condotti a prevedere che in un *certo istante*, ed in certi punti dello spazio tenda a prodursi un addensamento grandissimo di « fotoni » [1], non si può, al lume delle idee attuali, concludere senz'altro che ciò possa avvenire senza che reazioni sorgano fra i vari « fotoni »; senza che si verifichino urti reciproci; senza che in qualche guisa sorgano nuovi rapporti fra questi enti; rapporti diretti a modificare, più o meno, la condizione eccezionale che tende a prodursi.

E se si aggiunge a queste, non solamente possibili ma più che probabili circostanze, l'altra, che ci è impedito nella concretezza delle osserva-

(1) Si tenga conto che le teorie attuali che hanno come fondamento il discontinuo escludono per natura loro un addensamento *infinito.*

zioni di cogliere le modalità *istantanee* del fenomeno, rapporto a cui veniamo a conoscere un *quid medium* di quanto avviene in un certo intervallo; intervallo che deve essere non solo finito, ma sempre assai grande rispetto ai tempi che entrano in giuoco nell'*esame* di queste *reazioni elementari* fra fotoni, si vede come e quanto sarebbe ardita ed infondata la pretesa di chi chiudendo gli occhi ai fatti accertati, volesse, in nome di così oscure ed intricate incognite, mettere al bando un principio che si è dimostrato tanto fecondo, anche se esso, – come tutte le concezioni umane – non è in grado di tutto coordinare, di farci tutto capire, e di tutto spiegare.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni omogenee*[1]. Nota di A. Del Chiaro, presentata[2] dal Corrisp. L. Tonelli.

Alcuni trattatisti moderni (Pincherle, Vivanti, ecc.), dopo aver dimostrato che una funzione omogenea $f(x, y, \cdots)$, di grado α di omogeneità, soddisfa alla uguaglianza di Eulero:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots = \alpha f(x, y, \cdots), \tag{1}$$

invertono questa proposizione, mostrando che dalla (1) segue l'omogeneità di grado α della $f(x, y, \cdots)$. Però, per tale inversione, non vengono precisate le condizioni. È noto che per la validità del teorema diretto basta supporre che la $f(x, y, \cdots)$ sia continua e differenziabile (nel senso di Stolz); tale condizione non è, invece, sufficiente ad assicurare l'invertibilità. Consideriamo, infatti, la funzione definita in tutto il piano (x, y) dalla uguaglianza

$$z = \left(+\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3.$$

Questa funzione è ovunque continua, ammette pure ovunque, finite e continue, le derivate parziali dei primi due ordini, ed è quindi sicuramente

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.

differenziabile in qualunque punto (x, y). Inoltre, essa soddisfa sempre all'uguaglianza di Eulero: è infatti

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \left(+ \sqrt{x^2 + y^2} \right)^3.$$

Ciò nonostante questa funzione non è omogenea, perchè l'uguaglianza

$$\left(+ \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} \right)^3 = k^3 \left(+ \sqrt{x^2 + y^2} \right)^3$$

non è verificata per k negativo.

Il procedimento generalmente seguito, per dedurre dalla (1) l'omogeneità della $f(x, y, \cdots)$, consiste sostanzialmente nel considerare, per $k \neq 0$, il rapporto $\frac{f(kx, ky, \cdots)}{k^\alpha}$ e nel provare che esso è costante al variare di k. Per tale dimostrazione si calcola la derivata rispetto a k del rapporto sopra scritto, derivata che, in virtù della uguaglianza (1), risulta uguale a zero; e se ne conclude

$$\frac{f(kx, ky, \cdots)}{k^\alpha} = \text{cost.}$$

Per altro, è da osservare che, avendo considerato il rapporto per $k \neq 0$, il ragionamento ora fatto prova soltanto che quel rapporto è costante per tutti i $k > 0$, e pure costante per tuttti i $k < 0$; ma non autorizza a concludere che i due valori, che il rapporto assume per k negativo e per k positivo, siano fra loro uguali. Nell'esempio che abbiamo sopra esposto avviene precisamente che questi valori sono fra loro disuguali.

Per la invertibilità del teorema di Eulero è dunque necessario (e basta) di aggiungere che il rapporto $\frac{f(kx, ky, \cdots)}{k^\alpha}$, considerato come funzione di k, è continuo anche per $k = 0$, o, più precisamente, che tende ad un unico valore (variabile naturalmente col punto $(x, y, \cdots)$) al tendere di k allo zero per valori qualsiasi, positivi o negativi. Ciò, ben inteso, supponendo che il campo in cui si considera la $f(x, y, \cdots)$ circondi completamente il punto $(0, 0, \cdots)$.

Limitandomi al caso di α intero e positivo, e supponendo per semplicità che la $f(x, y, \cdots)$ sia da considerarsi in tutto lo spazio $S(x, y, \cdots)$, voglio provare che, *se la* $f(x, y, \cdots)$ *è funzione continua insieme con le sue derivate parziali dei primi* α *ordini in tutto* S, *compreso il punto* $(0, 0, \cdots)$, *e se essa soddisfa sempre all'uguaglianza di Eulero* (1), *tale funzione è omogenea di grado* α.

E infatti, fissato un punto $(x, y, \cdots)$, per $k > 0$ si avrà:

$$\frac{f(kx, ky, \cdots)}{k^\alpha} = C_1,$$

e per $k < 0$:

$$\frac{f(kx, ky, \cdots)}{k^\alpha} = C_2,$$

dove C_1, C_2 sono delle costanti rispetto a k. Ora si può anche scrivere:

$$(2) \qquad \begin{cases} f(kx, ky, \cdots) = C_1 k^\alpha, & \text{per} \quad k > 0, \\ f(kx, ky, \cdots) = C_2 k^\alpha; & \text{per} \quad k < 0; \end{cases}$$

e facendo le derivate α^{esime}, rispetto a k, dei secondi membri:

$$\frac{\partial^\alpha C_1 k^\alpha}{\partial k^\alpha} = \alpha! C_1,$$

$$\frac{\partial^\alpha C_2 k^\alpha}{\partial k^\alpha} = \alpha! C_2.$$

D'altra parte, avendo ammesso la continuità per le derivate parziali fino all'ordine α della funzione $f(kx, ky, \cdots)$, possiamo, nei primi membri delle (2), derivare α volte rispetto a k, seguendo la regola di derivazione delle funzioni composte. Otterremo allora dell'espressioni ove compariranno le derivate parziali fino all'ordine α della funzione $f(kx, ky, \cdots)$.

Ma per la continuità ammessa, quando si faccia tendere k a zero, sia per valori positivi che negativi, tali derivate tendono ad uno stesso valore.

Ne viene che:

$$\frac{\partial^\alpha C_1 k^\alpha}{\partial k^\alpha} = \frac{\partial^\alpha C_2 k^\alpha}{\partial k^\alpha};$$

cioè:

$$\alpha! C_1 = \alpha! C_2$$

onde:

$$C_1 = C_2.$$

Se ne conclude che la funzione $f(x, y, \cdots)$ è omogenea di grado α.

Matematica. — *Ancora sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo.* Nota di F. Tricomi, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Continuo nella presente Nota alcune ricerche sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo S, ispiratemi da un recente lavoro del prof. Levi-Civita, la cui pubblicazione ho già iniziata con una Nota dal titolo analogo a quello della presente, già apparsa in questi « Rendiconti » [2].

A proposito di questa Nota desidero anzi qui aggiungere prima d'ogni altra cosa che il prof. G. Ascoli, con cui ho avuto occasione di discorrere di queste mie ricerche, mi ha fatto osservare come i miei stessi ragionamenti bastino per affermare che *se il corpo* S *non è convesso (ma è però connesso) il corpo* Γ *dei baricentri coincide col minimo corpo convesso contenente* S. Infatti, per provare che un punto O (fuori dell'eventuale varietà eccezionale E) appartiene al corpo Γ, a me è bastato supporre che *tutti* i piani della stella (O) *taglino* il corpo S; ciò che, come ha mostrato Carathéodory [3], è proprietà caratteristica dei punti del minimo corpo convesso contenente S.

Il Carathéodory ha inoltre osservato (attribuendo la cosa ad Herglotz) che l'accennato minimo corpo convesso poteva considerarsi come un luogo di baricentri, ma ponendosi da un punto di vista ben diverso da quello di Levi-Civita e mio, e cioè pensando attribuite ai varî punti di S non già *masse fisse*, bensì variabili passando da un baricentro all'altro.

Noto infine che il prof. Ascoli ha anche trovata, e mi ha verbalmente comunicata, una nuova dimostrazione, meno rapida ma più elementare (perchè indipendente dal teorema di Brouwer) del teorema dimostrato nel § 2 del mio lavoro, e cioè che tutti gli effettivi corpi sono *barosterici*.

Ciò premesso, riprendendo il filo dei ragionamenti della mia precedente Nota, seguitando – per comodità del lettore – la numerazione dei paragrafi e delle formule.

5. Notiamo che la condizione contenuta nel teorema del § 4 sarà certo verificata se, nella regione in cui cade l'intersezione s col piano ω, *la superficie* σ *è dotata di piano tangente variabile con continuità e mai coincidente o infinitamente prossimo ad* ω; sì che, detto genericamente ψ l'angolo

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) *Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo*, (6), *13* (1931[1]).

(3) *Ueber den Variabilitätsbereich u. s. w.*, « Rend. Circolo Mat. Palermo, *32* (1911[2]), 193–217.

che la normale a σ in un punto generico P forma con la normale al piano ω, $\frac{1}{\sin\psi}$ si possa considerare come una funzione finita e continua di P.

Invero, se facciamo corrispondere ad un punto generico P di s il punto P′ di s', infinitamente prossimo a P, in cui tale curva viene segata dal piano normale ad s condotto per P, e se inoltre chiamiamo P″ la proiezione ortogonale di P′ su ω; dal triangolo rettangolo PP′P″ avremo che

$$PP' = \frac{P''P'}{\sin\psi^*},$$

avendo indicato con ψ^* l'angolo P′PP″, uguale all'angolo che la normale a σ in un opportuno punto P* prossimo a P forma con la normale ad ω. Ma, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, $1/\sin\psi^*$ è una funzione limitata, dunque, scegliendo ω' sufficientemente prossimo ad ω (con che tutte le distanze P′P″ possono rendersi minori di un numero positivo comunque prestabilito), potremo fare sì che la distanza PP′ si conservi sempre inferiore ad un η comunque prestabilito.

Più particolarmente ancora le condizioni di continuità saranno certo verificate nel caso di un *corpo convesso la cui superficie sia dotata di piano tangente variabile, almeno generalmente, con continuità.*

Osserviamo finalmente che, supposte verificate le condizioni di continuità, dalle considerazioni precedenti può agevolmente trarsi una valutazione di Δx, Δy, $\Delta\zeta$ a meno d'infinitesimi d'ordine superiore rispetto ad ε_2, ε_2, ε_3, assai utile per il seguito.

Infatti dal triangolo rettangolo PP′P″, già più sopra considerato, si trae anche che

$$PP'' = P''P' \operatorname{cotg}\psi^*,$$

donde, sostituendo a ψ^* ψ, valore di detto angolo nel punto P, e a P″P′ la quantità $\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3$, cioè l'ordinata di ω' nel punto P, segue, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore,

$$PP'' = (\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3)\operatorname{cotg}\psi;$$

ma PP″ può interpretarsi come la *larghezza* (col dovuto segno) del campo $\Delta\tau$, dunque, sempre a meno dei soliti infinitesimi, dalle (5) e (2) può trarsi:

$$(6)\quad \begin{cases} \tau\Delta x = \varepsilon_1 \int_s x^2 \operatorname{cotg}\psi\, ds + \varepsilon_2 \int_s xy \operatorname{cotg}\psi\, ds + \varepsilon_3 \int_s x \operatorname{cotg}\psi\, ds \\ \tau\Delta y = \varepsilon_1 \int_s xy \operatorname{cotg}\psi\, ds + \varepsilon_2 \int_s y^2 \operatorname{cotg}\psi\, ds + \varepsilon_3 \int_s y \operatorname{cotg}\psi\, ds \\ \Delta\zeta = \varepsilon_3 \end{cases}$$

donde, stavolta rigorosamente, seguono le formule:

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \frac{1}{\tau}\int_s x^2 \operatorname{cotg}\psi\, ds \quad , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \frac{1}{\tau}\int_s xy \operatorname{cotg}\psi\, ds \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \frac{1}{\tau}\int_s y^2 \operatorname{cotg}\psi\, ds \quad , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_3}\right)_0 = \frac{1}{\tau}\int_s x \operatorname{cotg}\psi\, ds \quad , \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_3}\right)_0 = \frac{1}{\tau}\int_s y \operatorname{cotg}\psi\, ds \quad , \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon_2}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon_3}\right)_0 = 1 \end{cases}$$

dove l'indice *zero* sta a indicare che i valori delle derivate si riferiscono a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Notiamo infine che dalle (7) segue in particolare che

$$(8)\quad \left[\frac{d(x, y, \zeta)}{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}\right]_0 = \frac{1}{\tau^2}\left\{\int_s x^2 \operatorname{cotg}\psi\, ds \cdot \int_s y^2 \operatorname{cotg}\psi\, ds - \left[\int_s xy \operatorname{cotg}\psi\, ds\right]^2\right\}.$$

6. Cerchiamo ora di farci un'idea della maggiore o minore *densità* con cui sono distribuiti nelle varie regioni del corpo Γ i baricentri delle sezioni piane del nostro corpo S. A tale scopo cominciamo con l'osservare che in una corrispondenza *puntuale*, p. es. fra due piani π e π', è facile definire un numero che ci dia un'idea della maggiore o minore *fittezza* degli omologhi in π' di punti *uniformemente distribuiti* sopra π. Invero, supposto riferiti i punti dei due piani a due sistemi qualsiasi di assi cartesiani ortogonali (x, y) e (x', y'), il jacobiano della corrispondenza

$$J = \frac{d(x, y)}{d(x', y')},$$

soddisfa manifestamente alle esigenze indicate in quanto, esprimendo il rapporto fra due aree infinitesime corrispondenti, ci dà anche, supposto disteso su π un reticolato di quadratini di lato piccolissimo, un valore approssimato del rapporto fra i numeri n ed n' dei vertici del reticolato su π e dei loro omologhi in π', che cadono entro due piccoli cerchietti dello stesso raggio con centri in due punti omologhi P e P'.

Nel caso invece di una corrispondenza fra punti e piani di due spazi, le cose non procedono così semplicemente perchè l'elemento analogo al jacobiano J, e cioè il determinante funzionale delle coordinate di piani rispetto alle coordinate di punti, è privo di significato geometrico, non essendo invariante rispetto al gruppo dei movimenti.

Questa difficoltà può però essere girata ricorrendo, invece che ad assi cartesiani fissi, ad opportuni assi *mobili*. Precisamente, considerando parti-

colarmente il caso che a noi più interessa di una corrispondenza univoca fra piani ω e punti dello spazio ordinario, si vede facilmente che il jacobiano

$$\left[\frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{d(x, y, z)}\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0},$$

dove (x, y, z) denotano le coordinate del punto omologo del piano

$$z = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 \tag{9}$$

rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *avente per piano xy il piano* ω $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0)$, non dipende dalla particolare scelta dell'origine e degli assi x, y nel piano ω, epperò è un elemento dotato di significato (metrico) intrinseco che noi potremo assumere come *misura della densità* δ *della corrispondenza* nell'intorno del piano ω o, ciò che è lo stesso, del punto omologo di questo.

Dato però che nella definizione di δ abbiamo dovuto far intervenire dei speciali assi mobili col piano ω, c'incombe ora l'obbligo di trovare l'espressione di δ nel caso da considerarsi come quello di regola, in cui la corrispondenza sia definita assegnando, mediante formule del tipo:

$$\begin{cases} X = F(U, V, W) \\ Y = \Phi(U, V, W) \\ Z = \Psi(U, V, W), \end{cases}$$

le coordinate (rispetto a certi assi ortogonali fissi X, Y, Z) del punto omologo del piano ω di coordinate (p. es. plückeriane non omogenee) U, V, W, cioè del piano

$$UX + VY + WZ + 1 = 0. \tag{10}$$

Allo scopo indicato supponiamo che le formule di passaggio dall'uno all'altro dei due sistemi di assi siano le seguenti

$$\begin{cases} X = X_0 + a_{11} x + a_{12} y + a_{13} \\ Y = Y_0 + a_{21} x + a_{22} y + a_{23} \\ Z = Z_0 + a_{31} x + a_{32} y + a_{33} \end{cases}$$

ed osserviamo anzitutto che, se il piano rappresentato dalla (9) dev'essere lo stesso piano ω rappresentato dalla (10), dovranno sussistere le relazioni

$$(11)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = -\dfrac{a_{11}U + a_{21}V + a_{31}W}{a_{13}U + a_{23}V + a_{33}W} \\ \varepsilon_2 = -\dfrac{a_{12}U + a_{22}V + a_{32}W}{a_{13}U + a_{23}V + a_{33}W} \\ \varepsilon_3 = -\dfrac{X_0U + Y_0V + Z_0W + 1}{a_{13}U + a_{23}V + a_{33}W}, \end{cases}$$

donde, con l'ausilio di una nota formula di Jacobi, si trae facilmente che

$$\frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{d(U, V, W)} = \frac{\mu}{(a_{13}U + a_{23}V + a_{33}W)^4},$$

avendo indicato con μ (uguale ± 1) il modulo della matrice ortogonale $\| a_{rs} \|$. Ma per una nota proprietà dei jacobiani si ha

$$\frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{d(x, y, z)} = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{d(U, V, W)} \frac{d(U, V, W)}{d(X, Y, Z)} \frac{d(X, Y, Z)}{d(x, y, z)},$$

dunque, essendo d'altro lato

$$\frac{d(X, Y, Z)}{d(x, y, z)} = \mu,$$

tenuto conto che $\mu^2 = 1$, se ne deduce che

$$(12)\qquad \delta_0 = \left[\frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{d(x, y, z)}\right]_0 = \frac{\left[\dfrac{d(U, V, W)}{d(X, Y, Z)}\right]_0}{(a_{13}U_0 + a_{23}V_0 + a_{33}W_0)^4},$$

dove gli indici *zero* denotano che alle coordinate correnti devono sostituirsi i loro valori relativi al piano ω.

Ciò premesso osserviamo che, poichè al piano ω corrisponde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, dalle prime due delle (11) segue che dovrà essere

$$(13)\qquad \begin{cases} a_{11}U_0 + a_{21}V_0 + a_{31}W_0 = 0 \\ a_{12}U_0 + a_{22}V_0 + a_{31}W_0 = 0, \end{cases}$$

equazioni cui associeremo l'altra analoga:

$$(14)\qquad a_{13}U_0 + a_{23}V_0 + a_{33}W_0 = k,$$

essendo k una quantità da determinarsi, cioè un'incognita ausiliaria. Ma dal sistema (con determinante dei coefficienti ortogonale e uguale μ) formato dalle (13) e (14) si trae subito che

$$U_0 = \mu k a_{13}, \quad V_0 = \mu k a_{23}, \quad W_0 = \mu k a_{33};$$

donde, dovendo essere

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 ,$$

segue

$$k^2 = U_0^2 + V_0^2 + W_0^2;$$

dunque è

$$(a_{13} U_0 + a_{23} V_0 + a_{33} W_0)^2 = U_0^2 + V_0^2 + W_0^2 ,$$

epperò dalla (12) potrà trarsi finalmente che

$$\delta = \frac{\frac{d(U, V, W)}{d(X, Y, Z)}}{(U^2 + V^2 + W^2)^2} , \tag{15}$$

formula con l'ausilio della quale è facile verificare direttamente come la *densità* δ da noi introdotta sia, a differenza del solo jacobiano che ne costituisce il numeratore, un invariante rispetto ai cambiamenti di assi ortogonali, e quindi nel gruppo dei movimenti.

7. Le considerazioni del § precedente unitamente alla (8) del § 5 permettono di calcolare senza difficoltà sostanziali la *densità* della distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo qualsiasi.

A titolo d'esempio consideriamo il caso in cui il corpo S sia limitato dall'ellissoide a tre assi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

caso in cui però il calcolo di δ si eseguirà più agevolmente fondandosi sulla (15) invece che sulla (8). Invero potremo allora tener fissi come assi cartesiani gli assi dell'ellissoide, rispetto a cui il baricentro dell'intersezione col piano

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

cioè il centro della corrispondente ellisse d'intersezione ha, come immediatamente si vede, le coordinate

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a^2 u}{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2} \\ y = -\dfrac{b^2 v}{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2} \\ z = -\dfrac{c^2 v}{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2} ; \end{cases}$$

troveremo così, avvalendoci della (15) e della già ricordata formula di Jacobi, che:

$$(16) \qquad \delta = \frac{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}}{a^2 b^2 c^2 \left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4} \right)^2}.$$

La formula ottenuta presenta particolare interesse nei casi in cui c sia infinitesimo oppure lo siano a e b, casi nei quali l'ellissoide si può assimilare ad una *piastra* sottilissima oppure a un *tubo* sottilissimo. Precisamente, ponendo $a = b = 1$, $c = \varepsilon$, $\delta_1 = \varepsilon^2 \delta$, oppure $a = b = \varepsilon$, $c = 1$, $\delta_2 = \varepsilon^4 \delta$, si ottengono rispettivamente le formule

$$\delta_1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2/\varepsilon^2}{(x^2 + y^2 + z^2/\varepsilon^4)^2} \quad , \quad \delta_2 = \frac{(x^2 + y^2)/\varepsilon^2 + z^2}{[(x^2 + y^2)/\varepsilon^4 + z^2]^2}$$

che mostrano come, nei due casi in esame, quantità differenti per un irrilevante fattor costante dalla densità δ, mentre prendono valore non infinitesimo sulla « sezione mediana » della piastra ($z = 0$) o sull'asse del tubo ($x = y = 0$), fuori di detta sezione mediana o di detto asse, presentandosi sotto forma del quoziente di un infinito del 2° ordine per uno dell'8° ordine (rispetto ad $1/\varepsilon$), sono *infinitesime del sesto ordine rispetto ad* ε.

Notiamo finalmente che la maggior parte dei risultati stabiliti nella presente Nota e nella precedente, rimangono sostanzialmente immutati se il corpo S, invece che omogeneo, si suppone avente densità variabile con continuità da punto a punto.

Matematica. — *Una proprietà caratteristica delle tangenti di Darboux.* Nota di G. Palozzi, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

1. Nello studio della Geometria proiettivo-differenziale di una superficie (non rigata) dello spazio ordinario sono state introdotte da Bompiani [2] certe quadriche, da lui chiamate quadriche asintotiche osculatrici (del primo e secondo sistema), definite dalla seguente proprietà. Sia C una curva della superficie σ uscente da un suo punto O: le quadriche asintotiche osculatrici alla C in O sono le quadriche osculatrici in questo punto alle rigate costituente dai due sistemi di tangenti asintotiche relative ai punti di C.

In questa Nota mostrerò come si possa far dipendere da quelle quadriche la determinazione delle terne di Darboux. Più precisamente, proverò che *le direzioni di Darboux in* O *sono quelle delle curve* C *ad incontro* 4*-punto con le quadriche asintotiche osculatrici ad esse in* O.

La superficie σ sia individuata (nel gruppo delle collineazioni) mediante la rappresentazione parametrica $x_i(u, v)$, nella quale le linee u e v sono le asintotiche e le x_i le coordinate proiettive omogenee soddisfacenti al sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \dfrac{\partial lg\beta\gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + nx \\ x_{vv} = \dfrac{\partial lg\beta\gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + \nu x \end{cases} \qquad \left(x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \cdots; \ \beta\gamma \neq 0 \right)$$

associato alle *forme normali* di Fubini

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv \quad , \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3);$$

$\varphi_3 = 0$ definisce le direzioni di Darboux.

Si ponga poi

$$T = |X, x, x_u, x_v|, \qquad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|,$$

$$N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|, \qquad \Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|,$$

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) *La Geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* e *Ancora sulla Geometria*, ecc. « Rend. Lincei », 1926; per l'equazione (2) (v. appresso): *Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie*, « Math. Zeitschr. », 1929.

i cui secondi membri rappresentano i determinanti formati con le coordinate correnti X, con le coordinate x di O ($u = 0, v = 0$) e coi valori, in questo punto, delle derivate che vi figurano. Si ha allora, per la quadrica asintotica osculatrice del primo sistema (quella osculatrice alla rigata delle tangenti asintotiche u), l'equazione

$$(2) \qquad a\mathrm{T}^2 + b\mathrm{T}\mathrm{N}_1 + c\mathrm{T}\mathrm{N}_2 + 2e(\mathrm{T}\Omega - \mathrm{N}_1\mathrm{N}_2) = 0$$

ove (a ha un'espressione che a noi non importa conoscere, mentre)

$$b = -\varphi_2\, du \quad , \quad c = -\varphi_2\, dv \quad , \quad e = \gamma du^3 ;$$

e per la quadrica asintotica osculatrice del seeondo sistema l'equazione che si deduce da quella soprascritta scambiandovi u con v e β con γ.

Poichè sulla curva C u e v dipenderanno da un parametro τ, si avrà, per le coordinate di un punto di questa curva, prossimo ad O,

$$x + (x_u u' + x_v v')\,d\tau + \frac{1}{2}(x_{uu}u'^2 + 2x_{uv}u'v' + x_{vv}v'^2 + x_u u'' + x_v v'')\,d\tau^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\{x_{uuu}u'^3 + 3(x_{uuv}u' + x_{uvv}v')u'v' + x_{vvv}v'^3 + 3[x_{uu}u'u'' + x_{uv}(u'v'' +$$

$$+ u''v') + x_{vv}v'v''] + x_u u''' + x_v v'''\}\,d\tau^3 + \cdots \quad , \qquad \left(u' = \frac{du}{d\tau}, \cdots\right);$$

ove, essendo C una curva di σ, x_{uu} ed x_{vv} avranno le espressioni date dalle (1) ed $x_{uuu}, \cdots, x_{vvv}$ quelle che si ottengono dalle (1), derivandole.

Si sostituisca ora, nella (2), X con lo sviluppo precedente. Se si osserva che, facendo questa sostituzione in T, N_1, N_2, Ω, si ottengono gli sviluppi

$$\mathrm{T} = -\Delta u'v'\,d\tau^2 - \frac{\Delta}{6}\left[\beta u'^3 + 3\left(\frac{\partial lg\beta\gamma}{\partial u}u' + \frac{\partial lg\beta\gamma}{\partial v}v'\right)u'v' + \gamma v'^3 + \right.$$

$$\left. + 3(u'v'' + u''v')\right]d\tau^3 + \cdots,$$

$$\mathrm{N}_1 = \Delta v'\,d\tau + \frac{\Delta}{2}\left(\beta u'^2 + \frac{\partial lg\beta\gamma}{dv}v'^2 + v''\right)d\tau^2 + \cdots,$$

$$\mathrm{N}_2 = -\Delta u'\,d\tau - \frac{\Delta}{2}\left(\frac{\partial lg\beta\gamma}{\partial u}u'^2 + \gamma v'^2 + u''\right)d\tau^2 + \cdots,$$

$$\Omega = \Delta + \frac{\Delta}{2}(nu'^2 + \nu v'^2)\,d\tau^2 + \cdots, \qquad (\Delta = |x, x_u, x_v, x_{uv}| \neq 0);$$

si trova immediatamente che i termini di grado più basso che figurano al primo membro della (2), dopo la sostituzione, sono quelli in $d\tau^3$ e che i loro coefficienti valgono

$$\Delta^2\left[(cu' - bv')u'v' + \frac{2}{3}e(\beta u'^3 + \gamma v'^3)\right] = \frac{2}{3}\Delta^2 e(\beta u'^3 + \gamma v'^3),$$

in virtù delle espressioni di b e di c. Mancheranno dunque anche questi quando è soddisfatta la $\varphi_3 = 0$. E siccome questa definisce le direzioni di Darboux, così si conchiude con la proposizione enunciata; almeno per le quadriche del primo sistema. Ed allora anche per quelle del secondo, poichè il precedente risultato non muta scambiando contemporaneamente u con v e β con γ.

2. Viene spontaneo ravvicinare il risultato ora stabilito ad un altro, dovuto a Fubini [1], giusta il quale, se C (non solo esce da O secondo una delle direzioni di Darboux, ma addirittura) è una linea di Darboux, possiede la proprietà caratteristica che le rigate formate dalle tangenti tirate nei punti di C ad uno dei sistemi di asintotiche hanno C come linea flecnodale, ossia le tangenti alle asintotiche curve uscenti dai punti di C incontrano quattro generatrici infinitamente vicine. Sicchè, se C è una linea di Darboux e se si considera la rigata delle tangenti alle linee u, la tangente in O alla linea v uscente da questo punto incontrerà quattro generatrici infinitamente vicine di quella rigata.

Però, differenza essenziale fra le due proprietà è che quest'ultima dipende dall'intorno del terzo ordine di O sulla curva di Darboux considerata per tal punto, mentre quella del numero precedente dipende soltanto dall'intorno del primo ordine.

3. Al risultato del n. 1, posto però sotto altra forma, si può pervenire anche cercando le tangenti in O alla curva Γ d'intersezione della superficie σ con la quadrica, che indicheremo brevemente con Q^1, di equazione (2).

A tal fine assumiamo, com'è lecito, a coordinate $x(=x_1)$, $y(=x_2)$, $z(=x_3)$, $t(=x_4)$ quelle determinate dai seguenti valori iniziali: $x = y = z = 0$, $t = 1$; $x_u = 1$, $y_u = z_u = t_u = 0$; $x_v = 0$, $y_v = 1$, $z_v = t_v = 0$; $x_{uv} = y_{uv} = 0$, $z_{uv} = 1$, $t_{uv} = 0$.

Tenendo conto allora delle espressioni che acquistano le derivate seconde e terze, si trova che vale, nell'intorno di O, sulla superficie σ, lo sviluppo

$$z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) + \cdots,$$

i termini non scritti essendo d'ordine superiore al terzo.

Tenendo poi conto che i determinanti indicati con T, N_1, N_2, Ω divengono rispettivamente uguali a z, $-x$, y, $-t$ e che, per conseguenza, la (1) diviene

$$az^2 + 2\beta\gamma yz\,du^2\,dv - 2\beta\gamma xz\,du\,dv^2 + 2\gamma(xy - zt)\,dv^3 = 0,$$

(1) Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale* («G.P.D.»), Bologna, Zanichelli, 1926, t. 1°, pp. 76 e 92.

si trova che sulla quadrica Q^1, nell'intorno di O, vale l'altro sviluppo

$$z = xy - \beta \frac{du}{dv}\left(x - y\frac{du}{dv}\right)xy + \cdots,$$

anche qui limitatamente ai termini d'ordine non superiore al terzo.

Le tangenti in O alla curva Γ son dunque date dall'equazione

$$\beta \frac{du}{dv}\left(x - y\frac{du}{dv}\right)xy = \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3),$$

da cui risulta che della terna formata da esse fa parte la tangente alla C in O quando $\varphi_3 = 0$; e siccome poi allora la tangente a C in O è una tangente di Darboux e, d'altra parte, la precedente equazione si riduce a

$$(\sqrt[3]{\beta}\, x + \varepsilon_i \sqrt[3]{\gamma}\, y)^3 = 0,$$

ove ε_i è una delle radici cubiche dell'unità e $\sqrt[3]{\ }$ sta ad indicare il valore aritmetico del radicale, così quella terna si riduce a questa tangente contata tre volte.

Raccogliamo tutto ciò che Γ *ha in* O *un punto triplo le cui tangenti sono distinte dalla tangente in* O alla C *tranne nel caso in cui quest'ultima sia una delle tangenti di Darboux, nel qual caso coincidono con essa anche le altre due tangenti a* Γ.

Se si osserva che le quadriche asintotiche osculatrici alle curve C in O sono comprese fra le quadriche osculatrici alla superficie in O (cioè fra quelle che hanno con questa, in O, un contatto del secondo ordine), si vede che il risultato ora ottenuto coincide in sostanza con l'usuale definizione delle tangenti di Darboux (1). Però, fatto notevole è che, mentre per giungere a questa definizione si parte da un sistema ∞^3 di quadriche (tante sono le quadriche osculatrici alla superficie in un punto), per stabilire il precedente risultato basta invece la considerazione di un sistema più ristretto, com'è appunto quello della ∞^2 quadriche asintotiche osculatrici.

Di più, conducendo la ricerca come s'è fatto in questo numero, si ha il vantaggio di potersi rendere esattamente conto come l'essere 4-*punto* l'incontro della C con la quadrica Q^1 sia una proprietà che dipenda soltanto dall'intorno del *primo* ordine di O su C: infatti ai tre punti, riuniti in O, secondo cui C, quando esce da O con direzione qualunque, incontra Γ, e quindi Q^1, se ne deve aggiungere un altro quando quella direzione è una delle direzioni di Darboux, giacchè allora C riesce tangente in O a Γ.

(1) « G. P. D. », t. 1°, p. 62.

Matematica. — *Sulle equazioni intrinseche dell'equilibrio elastico.* Nota di GIACINTA ANDRUETTO, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In tre Note pubblicate lo scorso anno nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » [2] ed in un'altra pubblicata, pure lo scorso anno, nei « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova » [3] il prof. Tonolo ha stabilito le equazioni intrinseche dell'equilibrio dei corpi elastici anisotropi oppure isotropi, considerando anche il caso in cui il corpo elastico è immerso in uno spazio a curvatura costante.

I procedimenti seguiti dal prof. Tonolo sono quelli del calcolo differenziale assoluto: con i quali arriva alle formule finali dopo calcoli assai penosi e complicati. Partendo invece dalle note equazioni vettoriali di equilibrio dei mezzi elastici, ed applicando i moderni metodi vettoriali, si perviene in modo estremamente rapido e con calcoli brevissimi [4] alle equazioni intrinseche stesse, anche nel caso che il corpo elastico sia immerso in uno spazio a curvatura qualunque. Basta infatti proiettare, per così dire, le equazioni vettoriali sopra i vettori tangenti alle linee della terna di congruenze ortogonali, alle quali si possono riferire i punti del corpo che si studia.

Ciò è mostrato in questa Nota, ove in pochissime pagine, e pure sviluppando per intero i calcoli, stabilisco le equazioni accennate.

1. L'equazione indefinita dell'equilibrio di un mezzo continuo S è, come è notissimo [5],

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \varphi \tag{1}$$

(1) Nella seduta del 15 marzo 1931.

(2) TONOLO, *Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici*, Nota I, pp. 247-250; Nota II, pp. 347-351; *Forma intrinseca delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, pp. 652-654.

(3) TONOLO, *Equazioni intrinseche di equilibrio della elasticità negli spazi a curvatura costante*, pp. 1-12.

(4) Il prof. Tonolo nella Nota del « Seminario Matematico di Padova » scrive che « i canoni del calcolo assoluto e della geometria intrinseca conferiscono a tutta la trattazione una singolare naturalezza ed agilità »; ed allora, che cosa si deve dire dei metodi, assai più semplici e rapidi, della moderna Analisi vettoriale, qui applicati?

(5) BURALI-FORTI et MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*; vol. II: *Applications à la Mécanique et à la Physique*, p. 26, Hermann, Paris, 1913. - MARCOLONGO, *Meccanica Razionale*; vol. II, 2ª ediz., p. 341, Manuale Hoepli, 1918.

dove $\mathbf{F}$ è il vettore della forza di massa riferito alla unità di volume e φ è l'omografia degli sforzi, che è una dilatazione.

Consideriamo nello spazio S una terna ortogonale di congruenze di linee; allora in ogni punto Q di S esisteranno tre vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ unitari, a due a due ortogonali, tangenti alle linee della congruenza passanti per Q. Avremo dunque:

$$(2) \qquad \boldsymbol{u}_i^2 = 1 \quad ; \quad \boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{u}_h = 0 \; (i \neq h \quad ; \quad i, h = 1, 2, 3).$$

D'altra parte è noto [1] che:

$$(3) \qquad \operatorname{grad} \varphi = \sum_h \frac{d\varphi}{dQ} \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{u}_h,$$

ma chiamando s_h la lunghezza dell'arco della linea della congruenza, avente per tangente in Q il vettore $\boldsymbol{u}_h$, si ha:

$$(4) \qquad \boldsymbol{u}_h = \frac{\partial Q}{\partial s_h}, \text{ perciò } \operatorname{grad} \varphi = \sum_h \frac{\partial \varphi}{\partial s_h} \boldsymbol{u}_h,$$

da cui moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{u}_i$ e ricordando la (1):

$$\mathbf{F} \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_h} \boldsymbol{u}_h \right) \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \frac{\partial}{\partial s_h} (\varphi \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_i) - \sum_h \varphi \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial s_h} \times \boldsymbol{u}_i -$$

$$- \sum_h \varphi \boldsymbol{u}_h \times \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial s_h} = \sum_h \frac{\partial}{\partial s_h} (\varphi \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_i) - \sum_h \left(\sum_k \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial s_h} \times \boldsymbol{u}_k \cdot \varphi \boldsymbol{u}_k \right) \times \boldsymbol{u}_i -$$

$$- \sum_h \varphi \boldsymbol{u}_h \times \left(\sum_k \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial s_h} \times \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k \right).$$

Trasformiamo l'ultimo membro introducendo i coefficienti γ_{hkl} di rotazione di Ricci, che hanno per espressione [2] $\gamma_{hkl} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial s_l} \times \boldsymbol{u}_k$; ed allora risulta:

$$\mathbf{F} \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \frac{\partial}{\partial s_h} (\varphi \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_i) - \sum_h \sum_k \gamma_{hkh} \varphi \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{u}_i - \sum_h \sum_k \gamma_{ikh} \varphi \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_k;$$

ora, ponendo $\theta_{hk} = \theta_{kh} = \varphi \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_k$, la precedente diviene:

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathbf{F} \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \frac{\partial \theta_{hi}}{\partial s_h} + \sum_{hk} (\gamma_{khh} \theta_{ki} - \gamma_{ikh} \theta_{kk}),$$

(1) Burali e Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*; vol. I, p. 177, Zanichelli, Bologna, 1929.

(2) Burgatti, Boggio, Burali-Forti, *Geometria Differenziale*, p. 265, Zanichelli, Bologna, 1930. Nel seguito quest'opera sarà indicata con *Geometria Diff.*

la quale, ricordando che $\gamma_{ikh} = -\gamma_{kih}$, coincide colla formula (I) della Nota II del prof. Tonolo, la quale così è ottenuta con calcoli rapidissimi.

2. Vediamo ora quali sono le equazioni corrispondenti delle (I) per i mezzi elastici *isotropi*. Chiamando $\boldsymbol{u}$ il vettore spostamento dei punti Q del corpo elastico isotropo S, sotto l'azione delle forze $\mathbf{F}$, si può trasformare la (1) mercè la relazione che esprime la dilatazione φ in funzione di $\boldsymbol{u}$, che è la seguente [1]:

$$\varphi = (2B - A)\,\theta - 2B\xi \tag{5}$$

ove A e B sono le costanti elastiche di Green ed inoltre:

$$\xi = D\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} \quad , \quad \theta = \operatorname{div}\boldsymbol{u} = I_1\,\xi\,, \tag{6}$$

e quindi la (1) diventa:

$$\mathbf{F} = (2B - A)\operatorname{grad}\theta - 2B\operatorname{grad}\xi\,. \tag{7}$$

Ora è noto che la dilatazione ξ ammette sempre almeno tre direzioni unite, a due a due ortogonali, e chiamando $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ tre vettori unitari, paralleli a tali direzioni, risulta definita una terna ortogonale di congruenze di linee, aventi in ogni punto Q per tangenti i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$. Da quanto precede risulta che si può porre:

$$\xi\boldsymbol{u}_h = \varepsilon_h\,\boldsymbol{u}_h \qquad (h = 1, 2, 3), \tag{8}$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono gli *allungamenti principali*. La dilatazione cubica θ risulta allora espressa da:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\,. \tag{9}$$

Moltiplicando scalarmente la (7) per $\boldsymbol{u}_i$, si ha:

$$\mathbf{F} \times \boldsymbol{u}_i = (2B - A)\operatorname{grad}\theta \times \boldsymbol{u}_i - 2B\operatorname{grad}\xi \times \boldsymbol{u}_i\,; \tag{10}$$

ora ricordando le (4), (8), (9) risulta:

$$\operatorname{grad}\theta \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \frac{\partial\theta}{\partial s_h}\,\boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_i = \frac{\partial\theta}{\partial s_i} = \sum_h \frac{\partial\varepsilon_h}{\partial s_i}\,. \tag{11}$$

Dalle (4) si ha pure:

$$\operatorname{grad}\xi = \sum_h \frac{\partial\xi}{\partial s_h}\,\boldsymbol{u}_h = \sum_h \frac{\partial(\xi\boldsymbol{u}_h)}{\partial s_h} - \sum_h \xi\frac{\partial\boldsymbol{u}_h}{\partial s_h}$$

(1) Burali et Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* etc., vol. II, p. 29.

perciò moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{u}_i$, risulta:

$$\operatorname{grad}\xi \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \frac{\partial(\xi \boldsymbol{u}_h)}{\partial s_h} \times \boldsymbol{u}_i - \sum_h \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial s_h} \times \xi \boldsymbol{u}_i ,$$

ossia, ricordando le (8) e l'espressione vettoriale di γ_{hkl}:

$$\operatorname{grad}\xi \times \boldsymbol{u}_i = \sum_h \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial s_h} \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{u}_i + \sum_h \varepsilon_h \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial s_h} \times \boldsymbol{u}_i - \sum_h \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial s_h} \times \varepsilon_i \boldsymbol{u}_i =$$

$$= \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s_i} + \sum_h \gamma_{hih}\, \varepsilon_h - \sum_h \gamma_{hih}\, \varepsilon_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s_i} + \sum_h \gamma_{ihh} (\varepsilon_i - \varepsilon_h) .$$

Sostituendo le espressioni ora trovate di $\operatorname{grad}\theta \times \boldsymbol{u}_i$ e $\operatorname{grad}\xi \times \boldsymbol{u}_i$ nella (10) si ha:

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{F} \times \boldsymbol{u}_i = (2\,\mathrm{B} - \mathrm{A}) \sum_h \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial s_i} - 2\,\mathrm{B} \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s_i} + \sum_h \gamma_{ihh} (\varepsilon_i - \varepsilon_h) \right],$$

che coincide colla equazione (II) della 3ª Nota, del prof. Tonolo, che egli ha ricavato dall'equazione (I), mentre qui è stata dedotta direttamente dalla (1).

Se, in particolare, quelle congruenze principali sono anche *normali*, allora si sa che le γ con tre indici differenti sono tutte nulle (*Geometria diff.*, p. 269) e pure sono nulle le γ che hanno i primi due indici uguali (per la legge di emisimmetria). Allora tenendo conto di queste condizioni dalla (1) si ricavano facilmente le equazioni di Lamé.

3. Cerchiamo ora, sempre per via vettoriale, le equazioni intrinseche dell'equilibrio dei mezzi elastici isotropi, immersi in spazi curvi V_3 a tre dimensioni. Per questo, osserviamo che mentre l'equazione di equilibrio di un corpo elastico isotropo, immerso in uno spazio euclideo, è:

$$\mathbf{F} - \mathrm{A} \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mathrm{B} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0 ,$$

nel caso che il corpo sia immerso in uno spazio curvo V_3 è invece [1]:

$$\mathbf{F} - \mathrm{A} \operatorname{grad}_v \operatorname{div}_v \boldsymbol{u} + \mathrm{B} \operatorname{rot}_v \operatorname{rot}_v \boldsymbol{u} + 2\,\mathrm{B} (\mu \boldsymbol{u} - \mathrm{I}_1\, \mu \cdot \boldsymbol{u}) = 0 ,$$

ove μ è l'omografia di Ricci (*Geometria diff.*, p. 247) (che è una dilatazione) relativa alla varierà V_3, e grad_v, div_v, rot_v sono operatori superficiali relativi alla V_3 (*Geometria diff.*, pp. 192, 197).

Ponendo $\operatorname{div}_v \boldsymbol{u} = \theta$ e $\operatorname{rot}_v \boldsymbol{u} = \Omega$, si ha

$$\mathbf{F} - \mathrm{A} \operatorname{grad}_v \theta + \mathrm{B} \operatorname{rot}_v \Omega + 2\,\mathrm{B} (\mu \boldsymbol{u} - \mathrm{I}_1\, \mu \cdot \boldsymbol{u}) = 0 .$$

(1) Boggio, *Sull'operatore di Laplace e sulle equazioni dell'elasticità negli spazi curvi*, «Rendiconti Accad. Lincei», 1° sem. 1931.

Moltiplicando internamente per $\boldsymbol{u}_i$, si ha:

$$(12)\quad \mathbf{F}\times\boldsymbol{u}_i - A\,\mathrm{grad}_v\,\theta\times\boldsymbol{u}_i + B\,\mathrm{rot}_v\,\Omega\times\boldsymbol{u}_i + 2B(\mu\boldsymbol{u} - I_1\mu\cdot\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}_i = 0\,.$$

Ora si ha, analogamente alle (11):

$$\mathrm{grad}_v\,\theta\times\boldsymbol{u}_i = \sum_j \frac{\partial\theta}{\partial s_j}\boldsymbol{u}_j\times\boldsymbol{u}_i = \frac{\partial\theta}{\partial s_i},$$

poi dall'espressione di $\mathrm{rot}_v\,\Omega$:

$$\mathrm{rot}_v\,\Omega\times\boldsymbol{u}_i = \left(\sum_j \boldsymbol{u}_j\wedge\frac{d_v\,\Omega}{dQ}\boldsymbol{u}_j\right)\times\boldsymbol{u}_i = \sum_j\left(\boldsymbol{u}_j\wedge\frac{\partial_v\,\Omega}{\partial s_j}\times\boldsymbol{u}_i\right) = -$$

$$-\sum_j \boldsymbol{u}_j\wedge\boldsymbol{u}_i\times\frac{\partial_v\,\Omega}{\partial s_j} = \boldsymbol{u}_{i+2}\times\frac{\partial_v\,\Omega}{\partial s_{i+1}} - \boldsymbol{u}_{i+1}\times\frac{\partial_v\,\Omega}{\partial s_{i+2}}$$

e ponendo $\Omega_{hk} = \boldsymbol{u}_h\times\dfrac{\partial_v\,\Omega}{\partial s_k}$, risulta:

$$\mathrm{rot}_v\,\Omega\times\boldsymbol{u}_i = -(\Omega_{i+1,i+2} - \Omega_{i+2,i+1})\,.$$

Sostituendo nella (12) si ha:

$$(13)\quad \mathbf{F}\times\boldsymbol{u}_i - A\frac{\partial\theta}{\partial s_i} - B(\Omega_{i+1,i+2} - \Omega_{i+2,i+1}) + 2B(\mu\boldsymbol{u} - I_1\mu\cdot\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}_i = 0.$$

Se la curvatura dello spazio curvo è uguale ad una costante c, allora l'omografia di Ricci μ si riduce alla stessa c ed $I_1\,\mu = 3c$, quindi l'ultimo termine della (13) diventa $-4Bc\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}_i$ per cui la (13) porge:

$$(14)\quad \mathbf{F}\times\boldsymbol{u}_i - A\frac{\partial\theta}{\partial s_i} - B(\Omega_{i+1,i+2} - \Omega_{i+2,i+1}) - 4Bc\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}_i = 0\,,$$

che coincide colla (II), della 4ª Nota, del prof. Tonolo.

Le equazioni di Beltrami si ottengono dalla (14), supponendo che la terna ortogonale di congruenze prima considerate sia *normale*. In questo caso, esistono tre funzioni q_1, q_2, q_3, del punto Q, tali che le superficie $q_1 = \text{cost.}$, $q_2 = \text{cost.}$, $q_3 = \text{cost.}$ tagliano ortogonalmente le linee della congruenza e perciò:

$$(15)\qquad \boldsymbol{u}_r\times\mathrm{grad}_v\,q_s = 0\,,\qquad (r \neq s).$$

Poniamo poi, adoperando le notazioni di Beltrami;

$$(16)\qquad \boldsymbol{u}_h\times\mathrm{grad}_v\,q_h = \frac{\partial Q}{\partial s_h}\times\mathrm{grad}_v\,q_h = \frac{\partial q_h}{\partial s_a} = \frac{1}{Q_h},$$

ed allora risulta:

$$(17)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}_h \times \dfrac{\partial Q}{\partial q_h} = \boldsymbol{u}_h \times \dfrac{\partial Q}{\partial s_h}\dfrac{\partial s_h}{\partial q_h} = \dfrac{\partial s_h}{\partial q_h} = Q_h\,, \\ \boldsymbol{u}_h \times \dfrac{\partial Q}{\partial q_k} = \boldsymbol{u}_h \times \dfrac{\partial Q}{\partial s_k}\dfrac{\partial s_k}{\partial q_k} = 0\,, \end{cases} \qquad (h \neq k).$$

Inoltre:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u} \times \frac{\partial Q}{\partial s_i} = \boldsymbol{u} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i} = \tau_i\, Q_i\,,$$

avendo posto, secondo le notazioni di Beltrami:

$$\tau_i = \boldsymbol{u} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{1}{Q_i^2}\,.$$

Con ovvie trasformazioni, si ha successivamente, dall'espressione di Ω_{hk}, tenendo conto delle (17), e ponendo, per brevità $\Omega_r = \Omega \times \boldsymbol{u}_r$:

$$\Omega_{i+1,i+2} - \Omega_{i+2,i+1} = \boldsymbol{u}_{i+1} \times \frac{\partial_v \Omega}{\partial s_{i+2}} - \boldsymbol{u}_{i+2} \times \frac{\partial_v \Omega}{\partial s_{i+1}} =$$

$$= \boldsymbol{u}_{i+1} \times \frac{\partial_v \Omega}{\partial q_{i+2}}\frac{1}{Q_{i+2}} - \boldsymbol{u}_{i+2} \times \frac{\partial_v \Omega}{\partial q_{i+1}}\frac{1}{Q_{i+1}} =$$

$$= \frac{1}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\left(\boldsymbol{u}_{i+1} \times \frac{\partial_v \Omega}{\partial q_{i+2}} \cdot Q_{i+1} - \boldsymbol{u}_{i+2} \times \frac{\partial_v \Omega}{\partial q_{i+1}} \cdot Q_{i+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\left[\frac{\partial_v (\Omega_{i+1}\,Q_{i+1})}{\partial q_{i+2}} - \frac{\partial_v (\Omega_{i+2}\,Q_{i+2})}{\partial q_{i+1}}\right] -$$

$$- \frac{1}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\,\Omega \times \left\{\frac{\partial_v}{\partial q_{i+2}}(\boldsymbol{u}_{i+1}\,Q_{i+1}) - \frac{\partial_v}{\partial q_{i+1}}(\boldsymbol{u}_{i+2}\,Q_{i+2})\right\};$$

ora, l'ultimo termine è nullo perchè:

$$\boldsymbol{u}_{i+1}\,Q_{i+1} = \frac{\partial_v Q}{\partial q_{i+1}}, \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{u}_{i+2}\,Q_{i+2} = \frac{\partial_v Q}{\partial q_{i+2}}\,.$$

Sostituendo i risultati ora trovati nella (14), si ha:

$$\mathbf{F} \times \boldsymbol{u}_i - \frac{A}{Q_i}\frac{\partial \theta}{\partial q_i} - \frac{B}{Q_{i+1}\,Q_{i+2}}\left[\frac{\partial (\Omega_{i+1}\,Q_{i+1})}{\partial q_{i+2}} - \frac{\partial (\Omega_{i+2}\,Q_{i+2})}{\partial q_{i+1}}\right] - 4Bc\,Q_i\,\tau_i = 0$$

che sono precisamente le equazioni di Beltrami.

Matematica (Geometria). — *Sulle superficie gobbe di terzo grado (del tipo di Cayley) legate al punto di una data superficie.* Nota di R. Calapso, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

1. Per un punto P di una data superficie consideriamo i coni quadrici aventi in esso contatto 6–punto con un'asintotica: *il luogo dei vertici è una superficie rigata del terzo ordine* F_3 *a direttrici rettilinee infinitamente vicine (tipo di Cayley); tali direttrici coincidono con la tangente asintotica e* P *è il punto uniplanare; il piano relativo ad esso è il piano osculatore all'asintotica.*

2. È interessante studiare il modo di comportarsi delle asintotiche curve della F_3 (che come è noto, sono cubiche gobbe) rispetto alla quadrica di Lie (o a quelle di Darboux).

Dimostreremo che:

a) *Una qualunque asintotica curva di* F_3 *definisce un sistema nullo il cui complesso lineare contiene tutte le generatrici della quadrica di Lie che incontrano la direttrice della* F_3 *(tangente asintotica per la data superficie).*

b) *Una qualunque asintotica curva di* F_3 *incontra la quadrica di Lie (oltre* P*) in tre punti* M_1, M_2, M_3*; sia* M *il punto comune ai piani osculatori alla cubica negli anzidetti punti: il piano* π *proiettante* M *dalla tangente asintotica alla data superficie passa per lo spigolo di Green.*

3. Per dimostrare speditamente queste proposizioni, operiamo una trasformazione di coordinate, ponendo [2]

$$(1)\qquad \begin{cases} x' + \dfrac{1}{3b}\left(\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)y' - \dfrac{6M}{b}z' = X \\ \dfrac{2y'}{b} = Y \qquad \dfrac{6z'}{b} = Z \\ t' - \dfrac{2N}{b}y' - \dfrac{6H}{b}z' = T \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) In questa Nota adottiamo le notazioni dichiarate in nostri precedenti lavori (vedi, p. es.: *Un teorema sullo spigolo di Green*, questi «Rendiconti», 1931).

per il che le equazioni parametriche della cubica osculatrice all'asintotica v della data superficie prendono la forma

$$X = m \quad , \quad Y = m^2 \quad , \quad Z = m^3 \quad , \quad T = 1 ,$$

essendo m il parametro.

Un calcolo che omettiamo mostra allora che la superficie F_3 è rappresentata dall'equazione

$$Z^2 T - 3 XYZ + 2 Y^3 = 0$$

o, in forma parametrica, per esempio dalle equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \lambda^2 + \mu^2 \ ; \ Y = 2\mu \ ; \ Z = 2 ; \\ T = 3\lambda\mu - \mu^3 \end{cases}$$

essendo λ, μ i parametri.

Le formule trovate confermano intanto le proprietà enunciate al n. 1.

4. Occorre ora formare il sistema di asintotiche curve della superficie (2).

Avendosi

$$\left| X \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \mu} \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda \partial \mu} \right| = 12 ,$$

$$\left| X \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \mu} \frac{\partial^2 X}{\partial \mu^2} \right| = -48\mu ,$$

l'equazione differenziale delle linee richieste è

$$d\lambda - 2\mu\, d\mu = 0$$

e si deduce integrando

$$\lambda = \mu^2 + 2\rho_2 \qquad (\rho_2 = \text{cost})$$

dopo di che le (2) dànno:

$$X = \mu^2 + \rho_2 \quad , \quad Y = \mu \quad , \quad Z = 1 \quad , \quad T = \mu^3 + 3\rho_2\mu ,$$

ossia, ponendo $\mu = \frac{1}{\rho_1}$:

$$X = \rho_1 + \rho_2 \rho_1^3 \quad , \quad Y = \rho_1^2 \quad , \quad Z = \rho_1^3 \quad , \quad T = 1 + 3\rho_2\rho_1^2 .$$

Queste equazioni, al variare di ρ_2, dànno tutte le asintotiche curve della rigata di Cayley: in particolare per $\rho_2 = 0$ si ha la cubica osculatrice.

Tornando ora alle coordinate $(x'\,y'\,z'\,t')$ troviamo per le asintotiche curve della F_3 le equazioni parametriche seguenti:

$$(3)\qquad \begin{cases} x' = \rho_1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u} - 2a\right)\rho_1^2 + (M + \rho_2)\rho_1^3 \\ y' = \frac{b}{2}\rho_1^2 \\ z' = \frac{b}{6}\rho_1^3 \\ t' = 1 + (N + 3\rho_2)\rho_1^2 + H\rho_1^3 . \end{cases}$$

Queste si possono anche intendere come le equazioni parametriche della superficie F_3 riferita alle sue asintotiche (che sono le generatrici rettilinee $\rho_1 = \text{cost}$ e le cubiche gobbe $\rho_2 = \text{cost}$).

5. Dalle (3) discendono subito i teoremi a) e b) del n. 2.

Infatti le equazioni del sistema nullo definito dalla cubica $\rho_2 = \text{cost}$ sono allora:

$$\begin{cases} w_1' = y' \\ w_2' = -x' + \frac{2}{b}(3M + N + 6\rho_2)z' \\ w_3' = -\frac{2}{b}(3M + N + 6\rho_2)y' + t' \\ w_4' = -z' ; \end{cases}$$

di più, dalla forma di queste si desume per il complesso lineare l'equazione:

$$(4)\qquad p_{34} + \frac{2}{b}(3M + N + 6\rho_2)p_{23} + p_{12} = 0 .$$

D'altra parte, per le coordinate p_{ik} delle generatrici della quadrica di Lie (anzi di una generica quadrica di Darboux) che incontrano la tangente all'asintotica v nel punto considerato $P(u\,v)$ della data superficie, si verifica che

$$(5)\qquad p_{34} = -k \quad , \quad p_{23} = 0 \quad , \quad p_{12} = k$$

essendo k il parametro al variare del quale la generatrice varia nel regolo.

Le (5) soddisfano alla (4) ed il teorema a) è dimostrato[1].

(1) Su un'inversione di questo teorema torneremo in seguito. Notiamo frattanto che per $\rho_2 = 0$ resta dimostrato analiticamente il teorema fondamentale da noi dato per via sintetica nella Nota: *Sui sistemi nulli osculatori alle asintotiche di una data superficie.* (Questi « Rendiconti », 1931).

6. Quanto alla proprietà b), osserviamo che l'equazione cubica che definisce i punti comuni ad una cubica $\rho_2 = \text{cost}$ ed alla quadrica di Lie coincide, anche in questo caso, con quella da noi data nel lavoro citato e quindi, per le coordinate del punto M (intersezione dei piani osculatori nei punti considerati) si ha anche qui;

$$\begin{cases} y'_0 = \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3}\right) = \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{1}{4b}\dfrac{\partial b}{\partial u} - \dfrac{a}{2}\right) \\ z'_0 = \dfrac{b}{2}\,. \end{cases}$$

Se ne deduce che il piano π che proietta questo punto della tangente asintotica alla data superficie, ha l'equazione

$$y' - \left(\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{a}{2}\right)z' = 0\,,$$

e passa per lo spigolo di Green, come si era affermato.

Matematica (Analisi matematica). — *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti.* Nota di R. Caccioppoli, presentata[1] dal Corrisp. G. Scorza.

È ben noto come per le equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali non esistano sempre integrali considerati *in grande*, esistenti cioè in tutto un campo assegnato ed assoggettati a condizioni cosiddette ai limiti. Per esempio questo è spesso il caso delle equazioni lineari contenenti un parametro suscettibile di certi valori eccezionali (autovalori). Non è quindi priva d'interesse la conoscenza di qualche condizione generale che garentisca la risolubilità senza eccezione di un problema di valori ai limiti.

Indico appunto qui un tipo generalissimo (per quanto di interesse prevalentemente teorico) di problema sempre risolubile. Da questo risultato seguono immediatamente i teoremi più comprensivi di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie, per i sistemi, e per le equazioni iperboliche a derivate parziali, nonchè alcuni teoremi generali sulle equazioni ellittiche e sulle equazioni integrali non lineari, che rientrano in quelli di Hammerstein[2]. Mi servo per quest'indagine di considerazioni di cui ho già fatto

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, « Acta Mathematica ». t. 54 (1930).

uso in un lavoro precedente [1], riguardando le soluzioni cercate come elementi uniti di trasformazioni funzionali.

Queste considerazioni topologiche sono state introdotte per la prima volta, ed applicate allo studio di equazioni funzionali, da Birkhoff e Kellogg [2]; colgo qui l'occasione per riconoscere la priorità di questi Autori.

1. Sia $u(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ una funzione generica di p variabili, assegnata in un dominio limitato D dello spazio S_p di queste, e per cui si possa definire una certa espressione a derivate parziali $L[u]$, di ordine m. Supponiamo che il problema di determinare un integrale dell'equazione

$$L[u] = f(x_1, x_2, \cdots, x_p), \tag{1}$$

dove f è una qualunque funzione continua in D, sia univocamente risolubile, quando ad u si imponga una condizione supplementare di un certo tipo (α), che non occorre qui specificare. La funzione u, definita dalla (1) e dalla condizione (α), risulterà funzionalmente dipendente da f:

$$u(x_1, \cdots, x_p) = \Phi\,|[f; x_1, \cdots, x_p]|\,.$$

Supponiamo ancora che l'operazione funzionale Φ sia *continua* in questo senso che, dette $u_1, u_2, \cdots, u_q$ alcune fra le derivate di ordine $< m$ della u si abbia, per $\bar{f} \to f$ uniformemente in D,

$$\bar{u} = \Phi\,|[\bar{f}; x_1, \cdots, x_p]| \to u = \Phi\,|[f; x_1, \cdots, x_p]|,$$
$$\bar{u}_1 \to u_1, \cdots, \bar{u}_q \to u_q \quad , \quad (L[\bar{u}] \to L[u]),$$

sempre uniformemente in D [3]. Supponiamo infine che esista una costante positiva K per cui

$$|u| \leq K(\max|f| + 1) \quad , \quad |u_i| \leq K(\max|f| + 1) \quad (i = 1, \cdots, q),$$

e che le funzioni $u, u_1, \cdots, u_q$ si conservino *equicontinue* quando $\max|f|$ resta limitato.

Queste ipotesi potrebbero ulteriormente generalizzarsi, ma le conserveremo, poichè in questa forma già esauriscono un gran numero di casi concreti, come mostreremo esemplificando in seguito.

(1) *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, questi «Rendiconti», 1° sem., 1930.

(2) Birkhoff and Kellogg, *Invariant points in function space*, «Trans. of the Am. Math. Society», vol. 23, 1922. Cfr. anche Schauder, «Math. Zeitschrift», t. 26 (1927) e «Studia Math.», t. 2 (1930).

(3) In particolare potrebbero figurare tra le u_i tutte le derivate di ordine $< m$ della u; ed eventualmente potrebbe non considerarsene nessuna.

Sia ora $F(x_1, \cdots, x_p; u, u_1, \cdots, u_q)$ una funzione di $p + q + 1$ argomenti, definita e continua per $(x_1, \cdots, x_p)$ in D e $u, u_1, \cdots, u_q$ qualunque [1]. Ci proponiamo di indagare sotto quali ipotesi possa affermarsi sempre risolubile l'equazione

$$(2) \qquad L[u] = F(x_1, \cdots, x_p; u, u_1, \cdots, u_q),$$

con una condizione supplementare (α).

Si tratta di riconoscere quando debba ammettere elementi uniti la trasformazione funzionale che fa corrispondere alla funzione $u(x_1, \cdots, x_p)$ l'altra

$$(3) \qquad v(x_1, \cdots, x_p) = \Phi[F; x_1, \cdots, x_p].$$

Per ipotesi, la trasformazione (3) è continua in questo senso che per

$$\bar{u} \to u \quad , \quad \bar{u}_i \to u_i \qquad (i = 1, \cdots, q),$$

uniformemente, si ha

$$\bar{v} \to v \quad , \quad \bar{v}_i \to v_i \ (i = 1, \cdots, q) \quad , \quad (L[\bar{v}] \to L[v]),$$

sempre uniformemente. Sicchè la trasformazione (3) ammetterà certamente elementi uniti se converte lo spazio Σ delle funzioni u continue con le loro derivate $u_1, \cdots, u_q$ in un insieme *compatto* [2]; ciò avverrà, p. es., se la F è *limitata*, risultando allora per ipotesi $v, v_1, \cdots, v_q$ equicontinue ed equilimitate.

Ma si trova subito un risultato più generale: non occorre infatti che tutto lo spazio Σ, basta che una sua porzione Σ' sia trasformata in un insieme compatto in essa contenuto, purchè allora Σ' sia così costituita da ammettere, al pari di Σ, come modelli topologici approssimati campi n–dimensionali semplicemente connessi [3]. Quest'ultima circostanza si presenterà, p. es., se Σ' è dedotta da Σ imponendo un limite superiore M ai valori assoluti di $u, u_1, \cdots, u_q$, le u potendo approssimarsi con le loro derivate mediante polinomi, nello spazio dei cui coefficienti limitazioni del tipo ora detto staccano insieme convessi.

Non occorre allora più supporre F limitata; basta che essa sia infinita con gli argomenti $u, u_1, \cdots, u_q$ di ordine < 1, cioè più precisamente che si abbia, posto $\omega = \sqrt{u^2 + u_1^2 + \cdots + u_q^2}$,

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{F(x_1, \cdots, x_p; u, u_1, \cdots, u_q)}{\omega} = 0,$$

uniformemente rispetto alle x.

(1) Più generalmente potrebbe supporsi di carattere funzionale la dipendenza di F dalle u.

(2) V. i lavori citati.

(3) V. i lavori citati.

Infatti, in quest'ipotesi si potrà determinare M tanto grande da aversi, per $|u| < M$, $|u_i| < M$,

$$|F| < \frac{M}{K} - 1,$$

e quindi, in virtù di un'ipotesi precedente,

$$|v| < M \quad , \quad |v_i| < M,$$

sicchè Σ' conterrà l'insieme in cui è trasformata dalla (3).

Abbiamo così dimostrato che *il problema* (2), *con una condizione supplementare* (α), *è sempre risolubile, se* F *è infinita di ordine* < 1 *con i suoi argomenti* u, u_i, *e nelle ipotesi premesse sulla* (1).

Si può anche dire che per il problema $L[u] = \lambda F$ il parametro λ non ammette valori eccezionali; e che dunque in un certo senso è necessario, perchè vi siano eccezioni alla risolubilità, che in F qualche argomento u figuri *almeno linearmente* [1].

Occorre appena ricordare, a questo proposito, che è proprio in problemi lineari che si presentano gli autovalori di un parametro.

2. Rientrano nell'enunciato precedente, p. es., i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi all'equazione ellittica

$$\Delta_2 u(x, y) = F(x, y, u),$$

e per l'equazione integrale non lineare

$$u(x) = \int_a^b F[x, \xi, u(\xi)]\, d\xi,$$

nell'ipotesi che F sia infinita con u di ordine < 1.

Per una funzione $u(x)$ di una variabile, posto $L[u] = u^{(m)}$ si ha il teorema generale di esistenza per l'equazione differenziale ordinaria di ordine m

$$u^{(m)} = F(x, u, u', \cdots, u^{(m-1)});$$

in questo caso sono condizioni (α) tutte quelle valevoli a determinare un polinomio di grado $m - 1$.

Il teorema generale si estende senz'altro a sistemi di equazioni. Per i sistemi ordinari del primo ordine sussiste il teorema:

(1) Oppure (ma è un'ipotesi artificiosa) che un gruppo di argomenti u figuri in un prodotto di grado complessivo almeno 1.

Le n funzioni $F_i(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ *siano definite per* $a \leq x \leq b$ *e per tutti i valori delle u, e si abbia, posto* $\omega = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$,

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{F_i}{\omega} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n);$$

allora il sistema

$$u_i' = F_i(x, u_1, \cdots, u_n) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

ammette sempre integrali verificanti le condizioni $u_i(x_i) = c_i$, *essendo* $x_1, \cdots, x_n$ *n punti qualunque dell'intervallo* (a, b), *e le c costanti arbitrarie.*

Sia $u(x, y)$ definita in un dominio rettangolare del piano xy, e poniamo

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q \quad , \quad \omega = \sqrt{u^2 + p^2 + q^2}.$$

Si ottiene il teorema:

Il problema di Cauchy è sempre risolubile per l'equazione

$$s = F(x, y, u, p, q)$$

quando $\lim_{\omega \to \infty} \frac{F}{\omega} = 0$.

3. Il risultato fondamentale precedente è suscettibile evidentemente di una formulazione molto più generale, $L[u]$ potendo essere un'espressione funzionale qualunque (p. es. integro–differenziale). Il punto essenziale consisterà sempre in questo, che *se la soluzione u della* (1) *ha un certo tipo di continuità come funzionale di f, la* F *dovrà risultare continua, al variare di u secondo quel tipo di continuità.*

Matematica (Fisica-Matematica). — *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione.* Nota di R. Serini, presentata[1] dal Corrisp. G. Giorgi.

1. In una importante Memoria[2], avente il titolo di questa Nota, il Giorgi studia l'equazione di propagazione

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial U}{\partial t} + cU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

e la integra nel campo $(0, \infty)$ per la x, nell'ipotesi che per $x = 0$ sia $U = U_0(t)$ per ogni valore di t da $-\infty$ a $+\infty$, applicando il metodo degli operatori $f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Io ho studiato la stessa equazione[3], collo stesso metodo, qualora il campo sia limitato tra 0 e l per la x, e $U_0(t) = U(0, t)$ sia data per t da 0 ad ∞ nella ipotesi che per $t = 0$ sia $U(x, 0) = 0$, $\left(\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

Scopo della presente Nota è di far vedere come si risolve il problema, che dirò di Giorgi, quando si supponga, non più che il sistema sia privo di perturbazione iniziale, ma che si abbia per $t = 0$,

$$(2) \qquad \begin{cases} U(x, 0) = f(x) & , \quad \text{con } f(0) = 0, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi(x) & , \quad \text{con } \varphi(0) = 0: \end{cases}$$

cioè quando si supponga che all'istante in cui comincia ad agire la perturbazione $U_0(t)$ (quindi $U_0(0) = 0$) il sistema abbia già un movimento proprio. S. L. Straneo[4] ha trattato il problema analogo quando $a = 0$.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Vedi G. Giorgi, *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, «Rend. Circolo Mat. Palermo», *52*, 1928, pp. 265-312.

(3) Vedi R. Serini, *Propagazione di vibrazioni trasversali in una corda finita con resistenza del mezzo*, «Rend. Lincei», XIII, fasc. 5, p. 354.

(4) Vedi S. L. Straneo, *Problemi di propagazione lineare del calore e della elettricità risolti col metodo degli operatori funzionali*, «Atti Società Ligustica di Scienze e lettere di Genova», 1929, VIII, fasc. 3°.

Per risolvere il problema lo spezzo in due: uno che è quello trattato dal Giorgi, un altro di tipo classico. Mostrerò come quest'ultimo si possa anche risolvere per mezzo degli operatori $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

2. Sia $U_1(x,t)$ quella funzione che soddisfa alla (1) nel campo assegnato e tale che per $x = 0$ si abbia:

$$U_1(0,t) = U_0(t) \tag{3}$$

e per $t = 0$, $x > 0$,

$$U_1(x,0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{t=0} = 0, \tag{3'}$$

e soddisfi inoltre alle altre condizioni imposte alla U: per es. di essere finita per $x \to \infty$, oppure di annullarsi per $x = l$ (nel caso di una linea finita).

Diciamo poi $U_2(x,t)$ quella funzione che soddisfa alla (1) e tale che si abbia

$$U_2(0,t) = 0 \quad , \quad U_2(x,0) = f(x) \quad , \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi(x). \tag{4}$$

Le ulteriori condizioni imposte alla U sono generalmente lineari: orbene se una di tali condizioni è omogenea, tale la prenderemo anche per U_2; altrimenti prenderemo la corrispondente condizione omogenea; per es. se per $x = l$ si deve avere $U(l,t) = c$ sottoporremo la U_2 alla condizione $U_2(l,t) = 0$.

Allora io dico che la funzione

$$U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t), \tag{5}$$

soddisfa al nostro problema. Essa infatti soddisfa alla (1) come somma di due soluzioni: per le (3), (3'), (4), (5), si ha

$$U(0,t) = U_1(0,t) + U_2(0,t) = U_0(t),$$

$$U(x,0) = U_1(x,0) + U_2(x,0) = f(x),$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{t=0} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi(x):$$

è facile inoltre verificare che sono soddisfatte le ulteriori condizioni.

La determinazione di U_1 si può ottenere col metodo degli operatori $f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ che è particolarmente adatto perchè si può tener conto della condizione di successione.

Il secondo problema (determinazione di U_2) è di tipo classico: mostrerò che si può risolverlo col metodo degli operatori $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ eseguendo i calcoli nel campo $(0, \infty)$ per x, come è nella Memoria del Giorgi: ma è chiaro come i calcoli medesimi si possano estendere anche ad altri casi.

Colla sostituzione

$$(6) \qquad U = e^{-\frac{b}{a}t} u \quad , \quad t = \frac{a}{\sqrt{b^2 - ac}}\tau \quad , \quad x = \sqrt{\frac{a}{b^2 - ac}}\xi ,$$

la (1) diventa

$$(1)' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + u ;$$

posto $\frac{\partial}{\partial \xi} = \mathfrak{D}$ si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = (\mathfrak{D}^2 + 1) u ,$$

e integrando (cosh e senh significano coseno e seno iperbolici)

$$u = \cosh \tau \sqrt{\mathfrak{D}^2 + 1}\, C_1(\xi) + \operatorname{senh} \tau \sqrt{\mathfrak{D}^2 + 1}\, C_2(\xi) ,$$

essendo $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ due funzioni da determinarsi in modo tale che per $\tau = 0$

$$u = \Phi(\xi) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_{\tau = 0} = \Psi(\xi) .$$

Si ha quindi immediatamente

$$(7) \qquad u(\xi, \tau) = \cosh \tau \sqrt{\mathfrak{D}^2 + 1}\, \Phi(\xi) + \frac{\operatorname{senh} \tau \sqrt{\mathfrak{D}^2 + 1}}{\sqrt{\mathfrak{D}^2 + 1}} \Psi(\xi).$$

Le funzioni $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ sono date per ξ tra 0 e ∞, e sono nulle per $\xi = 0$: completiamole, per ora arbitrariamente, nell'intervallo $(-\infty, 0)$, colla sola condizione della continuità per $\xi = 0$.

Allora se le esprimiamo per mezzo del teorema di Fourier avremo:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-i\lambda(\alpha - \xi)}\, d\alpha ,$$

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\, e^{-i\lambda(\alpha - \xi)}\, d\alpha$$

e siccome

$$F(\mathfrak{D})\, e^{\rho\xi} = F(\rho)\, e^{\rho\xi}$$

e per $\rho = i\lambda$,

$$\cosh \tau\sqrt{-\lambda^2+1} = \cos \tau\sqrt{\lambda^2-1} \quad ; \quad \frac{\operatorname{senh} \tau\sqrt{-\lambda^2+1}}{\sqrt{-\lambda^2+1}} = \frac{\operatorname{sen} \tau\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-1}}$$

avremo in definitiva dalla (7)

$$(7)' \qquad u(\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-i\lambda(\alpha-\xi)} \cos \tau\sqrt{\lambda^2-1}\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\, e^{-i\lambda(\alpha-\xi)} \frac{\operatorname{sen} \tau\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-1}}\, d\alpha,$$

che è il risultato che si ottiene applicando alla (1)′ il metodo di integrazione di Cauchy [1] e che è qui ottenuto in modo molto più naturale.

Resta da soddisfare alla condizione che per $\xi = 0$ sia sempre $u = 0$ qualunque sia τ: per questo osserviamo che ci rimangono arbitrarie, a meno della continuità per $\xi = 0$, le funzioni $\Phi(\alpha), \Psi(\alpha)$ per α tra $-\infty$ e 0, e che

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-i\lambda\alpha} \cos \tau\sqrt{\lambda^2-1}\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\, e^{-i\lambda\alpha} \frac{\operatorname{sen} \tau\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-1}}\, d\alpha.$$

Prolunghiamo $\Phi(\alpha), \Psi(\alpha)$ nel tratto $(-\infty, 0)$ come funzioni dispari: se si scrive che

$$e^{-i\lambda\alpha} = \cos \lambda\alpha - i \operatorname{sen} \lambda\alpha$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-i\lambda\alpha}\, d\alpha = i\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \operatorname{sen} \lambda\alpha\, d\alpha$$

(perchè l'altro termine è nullo essendo l'integrale, tra $-\infty$ e $+\infty$, di una funzione dispari)

$$= i\Phi_1(\lambda)$$

(1) Vedi A. G. Webster, *Partial differential Equations of mathematical physics*, Teubner, (1927), pp. 160–179.

dove Φ_1 è funzione dispari di λ. Quindi il primo termine di $u(0,\tau)$ è

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\lambda)\cos\tau\sqrt{\lambda^2-1}\,d\lambda = 0$$

perchè la funzione integranda è dispari: ragionando analogamente sul secondo termine di $u(0,\tau)$ si trova che anche esso è nullo, quindi $u(0,\tau)=0$.

Se si trasforma opportunamente [1] la (7') si trova che anche per $x\to\infty$ la u resta finita. Il problema completo del Giorgi è così risolto e siccome, nei casi fisici, la $U_2(x,t)$ per effetto del fattore $e^{-\frac{b}{a}t}$ si estingue col tempo, ne viene che asintoticamente tutto accade come se il sistema si fosse trovato inizialmente in riposo e si fosse propagata solo la perturbazione $U_0(t)$ dell'origine.

Matematica. — *Sopra un metodo di sommazione nel calcolo delle matrici infinite.* Nota di R. Caccioppoli, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Formalismo matematico in uno spazio funzionale continuo retto da un elemento lineare di seconda specie.* Nota di D. Conforto, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul prodotto di serie sommabili secondo Cesaro.* Nota di G. Mammana, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur la sommation des séries trigonométriques.* Nota di N. Cioranescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les formes différentielles d'un complexe de droites.* Nota di P. Mentré, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedi A. G. Webster, op. cit., pp. 174-179.

Matematica. — *Sur les zéros de la dérivée d'une fonction holomorphe.* Nota di L. Theodoriu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Direzioni concorrenti.* Nota di A. de Mira Fernandes, presentatata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Contributo alla trattazione dei sistemi elastici doppiamente iperstatici.* Nota di G. M. Pugno, presentata [1] dal Corrisp. C. Guidi.

Consideriamo un sistema elastico del tutto arbitrario del quale sia nota l'ellisse di elasticità; riguardo ai vincoli, facciamo la ipotesi che esso sia incastrato alla terra in corrispondenza di una sua sezione A, e sia fissato con una cerniera ancora alla terra in corrispondenza di una sua sezione C.

Il complesso elastico così costituito può essere riguardato come la successione in serie di due tronchi; uno rappresentato dal sistema elastico AC completamente definito dalla sua ellisse di elasticità e l'altro, rappresentato dalla cerniera, definito da una ellisse di elasticità facile a determinarsi. Basta assumere il collare della cerniera (od un elemento superficiale a questo connesso) come elemento iniziale del sistema o elemento d'incastro, ed il perno della cerniera (od un elemento superficiale a questo connesso) come elemento terminale, e considerare la deformazione di quest'ultimo per effetto di sollecitazioni ad esso applicate. Si riconosce immediatamente che il peso elastico dell'ellisse propria della cerniera è di grandezza infinita; che ogni raggio dell'ellisse è nullo. Dobbiamo dunque immaginare concentrato in C un peso elastico infinitamente grande.

L'ellisse degli spostamenti elastici relativi di tutto il sistema, essendo, per definizione, l'ellisse resultante in serie delle ellissi proprie di tutti i tronchi elastici (reali o ideali), che successivamente si incontrano procedendo dall'elemento iniziale a quello terminale, si otterrà componendo in serie l'ellisse propria al sistema elastico AC e l'ellisse degenere propria alla cerniera in C.

Eseguiamo questa composizione riferendoci alla figura 1.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

Le equazioni fondamentali [1] che definiscono le caratteristiche elastiche di un complesso di tronchi disposti in serie; sono:

$$S = \Sigma s$$
$$J = \Sigma j .$$

La prima afferma l'uguaglianza tra il momento di primo ordine del peso elastico del tronco resultante eseguito rispetto alla retta d'azione della forza applicata e la somma degli analoghi momenti dei pesi elastici dei tronchi componenti.

La seconda afferma l'uguaglianza tra il momento di secondo ordine del peso elastico del tronco resultante eseguito rispetto alla retta d'azione

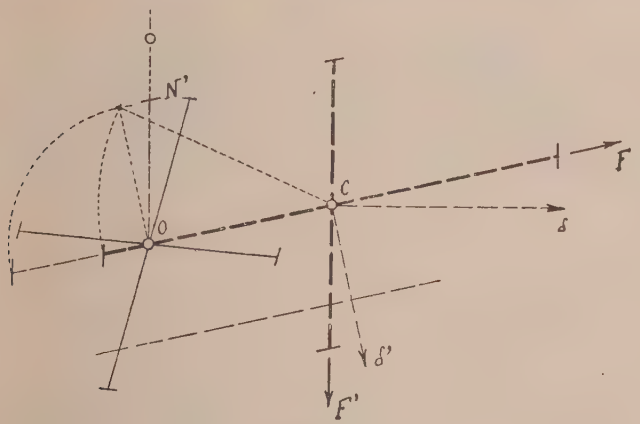


Fig. 1.

della forza applicata ed alla retta secondo la quale valutasi lo spostamento, e la somma degli analoghi momenti di secondo ordine dei pesi elastici dei tronchi componenti [2].

Assumiamo per l'elemento iniziale (di incastro) del sistema complessivo l'elemento iniziale del primo sistema componente, cioè un elemento superficiale rigidamente connesso alla sezione di incastro di quello e per elemento terminale del sistema complessivo l'elemento terminale del secondo sistema componente, cioè un elemento superficiale rigidamente connesso al

(1) Cfr. G. M. Pugno, *Procedimento grafico generale per la determinazione dell'ellisse di elasticità di un complesso di tronchi elastici in derivazione.* «Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei». Anno LXXXI, Sezione V del 15 aprile 1928.

(2) Trattandosi esclusivamente di tronchi connessi in serie, non è necessaria l'avvertenza riguardo alle direzioni, secondo le quali valutare le distanze dei baricentri e degli antipoli.

perno della cerniera e consideriamo per sollecitazione esterna una forza infinitamente lontana.

L'equazione

$$S = \Sigma s$$

ci dichiara che il peso elastico del sistema complessivo è infinitamente grande dovendo essere la somma dei due pesi elastici componenti. Ne deduciamo che il centro della ellisse resultante deve coincidere con C.

Consideriamo ora per sollecitazione esterna una forza F spirante secondo la retta OC congiungente i baricentri dei due tronchi componenti e per direzione dello spostamento quella della ON′ coniugata alla OC rispetto alla ellisse di centro O. L'equazione

$$J = \Sigma j$$

fornisce per il termine J il valore zero, il che presenta le direzioni OC e ON′ come coniugate, oltre che rispetto alla ellisse di centro O, anche rispetto alla ellisse resultante che stiamo cercando di definire. Se per direzione dello spostamento assumiamo la direzione OC della forza F, la stessa equazione

$$J = \Sigma j$$

che può essere messa nella forma

$$W\rho^2 = \Sigma j$$

essendo W il peso elastico resultante, ρ il raggio (valutato normalmente alla OC) dell'ellisse resultante steso secondo la ON′, ci avverte che il termine $W\rho^2$ ammette un valore generalmente finito e ben definito e che, in conseguenza, il quadrato del raggio ρ è nullo.

Analogamente, supponendo di applicare una forza F′ passante per C e parallela alla ON′ e valutando gli spostamenti una volta secondo la OC e un'altra volta secondo la ON′ stessa, vediamo confermato il coniugio tra le direzioni della OC e della ON′ e riaffermata, anche per il raggio ρ' stesso secondo la OC, la proprietà già riconosciuta per il raggio ρ, di ammettere un quadrato nullo.

L'ellisse resultante da noi così presentata ammette dunque un peso elastico infinitamente grande, concentrato in corrispondenza della cerniera; due tra le infinite direzioni coniugate di essa, sono identiche a due tra le infinite direzioni coniugate della ellisse componente di peso elastico finito ed una di queste direzioni è quella della retta congiungente i due baricentri.

A questo punto osserviamo che fin tanto che useremo una tale ellisse di elasticità per forze passanti per C, dovremo considerare di essa soltanto i momenti di secondo ordine che, come abbiamo visto, sono generalmente

finiti e poco ci importa, dal punto di vista della loro presentazione teorica, se questi sono forniti da due fattori dei quali uno sia nullo ed uno infinitamente grande, piuttosto che da due fattori finiti. Ma dal punto di vista pratico, del maneggio delle ellissi e della loro utilizzazione, non è la stessa cosa, ed anzi, come vedremo, è assai più comodo valerci di elementi finiti.

Assumiamo dunque per l'ellisse del complesso un peso elastico fittizio ed uguale a quello dell'ellisse componente non degenere e, per i vari raggi dell'ellisse, quelli che discendono in conseguenza, allo scopo di fornire i vari valori finiti dei momenti di secondo ordine.

Avendo assunto per il peso elastico fittizio il valore del peso elastico proprio dell'ellisse non degenere, l'equazione

$$J = \Sigma j$$

debitamente utilizzata, fornisce per il raggio steso secondo la direzione ON' un valore identico a quello steso nella stessa direzione e relativo all'ellisse di centro O; la stessa equazione mostra poi ancora che il raggio steso secondo la OC è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono rappresentati dal segmento OC e dal raggio dell'ellisse di centro O steso secondo la OC.

* * *

Come abbiamo detto più sopra, una ellisse così definita può servirci come una ellisse di elasticità per tutte le forze che soddisfino alla condizione di passare per il punto C; aggiungiamo a ciò che la composizione di tali ellissi può effettuarsi, con speciali cautele, sfruttando le norme fondamentali che regolano la composizione delle ellissi di elasticità. Per queste ragioni ed anche perchè una tale ellisse può immaginarsi come l'ingrandimento di una ellisse di elasticità, saremmo tentati di adottare ancora per questi nuovi elementi ora introdotti il nome di ellisse di elasticità facendo seguire a questa denominazione un qualsiasi predicato che stesse ad avvertire in modo ben chiaro che la definizione è esatta e che l'elemento da questo definito vale quando, e soltanto quando, la forza applicata agisce nell'àmbito di uno speciale campo d'azione che, nel caso testè preso in esame, sarebbe rappresentato dalla stella di rette di centro C.

Con tutto ciò però, dubitando che la necessaria restrizione nel campo di azione delle forze esterne possa resultare in ogni caso tanto semplice quanto chiara e precisa, e pensando che la sola denominazione di ellisse di elasticità potrebbe parere estendere, anche a questi nuovi elementi, alcune proprietà che invece non posseggono, rinunciamo fin d'ora, prudenzialmente, all'estensione della denominazione di ellisse, per adottare quella di « Diagramma polare dei parametri di spostamento » che ci sembra rispondere perfettamente all'oggetto.

* * *

Consideriamo un sistema elastico (fig. 2) costituito da due archi AC, BC e da un pilastro DC incastrati in corrispondenza di A, B, D alla terra e mutuamente connessi con una cerniera in corrispondenza di C.

Proponiamoci, come applicazione di quanto sopra abbiamo esposto, di determinare le caratteristiche delle tensioni interne in corrispondenza di una sezione S considerata nell'arco AC.

Per seguire il procedimento generale, dobbiamo procurarci l'ellisse degli spostamenti elastici relativi per l'arco AC idealmente completato a destra da un tronco elastico ideale che, in fatto di elasticità, sostituisca il sistema BCD.

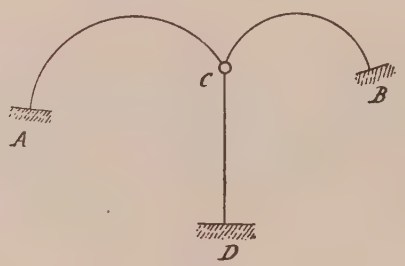


Fig. 2.

Sulle caratteristiche di questo tronco ideale, o meglio, sulle caratteristiche dell'ellisse che elasticamente lo definisce, possiamo affermare che essa può essere rappresentata da un diagramma polare dei parametri di spostamento per il punto C. L'ellisse degli spostamenti elastici relativi per l'arco AC incastrato in A e incernierato in C al sistema BCD, resultante in serie del diagramma polare ora definito e dell'ellisse propria dell'arco AC, è ancora, come sappiamo, un diagramma polare dei parametri di spostamento con centro in C.

Definito questo diagramma polare, il secondo principio di reciprocità è di immediata applicazione per la determinazione delle caratteristiche delle tensioni interne in una sezione S qualsiasi scelta nell'arco AC.

Meccanica. — *Algoritmi di calcolo motoriale.* Nota di G. Galanti, presentata dal Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla teoria degli archi ad una o due cerniere.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Corrisp. C. Guidi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia (Astrofisica). — *Misure microfotometriche della riga* Hα *al centro ed al lembo del sole.* Nota di B. Novàkovà, presentata[1] dal Corrisp. G. Abetti.

Come è stato pubblicato in una Nota precedente [2], sugli spettrogrammi fatti alla torre solare in Arcetri, ho eseguito alcune misure col microfotometro di Moll, dell'Istituto di Chimica Fisica, all'Università Carlo di

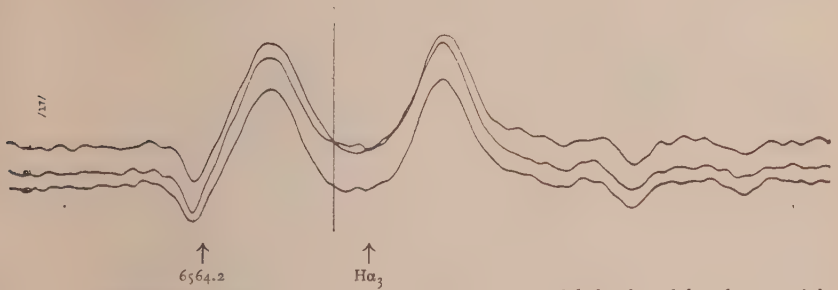


Fig. 1. — Microfotogrammi della riga Hα nello spettro del lembo del sole con righe atmosferiche deboli.

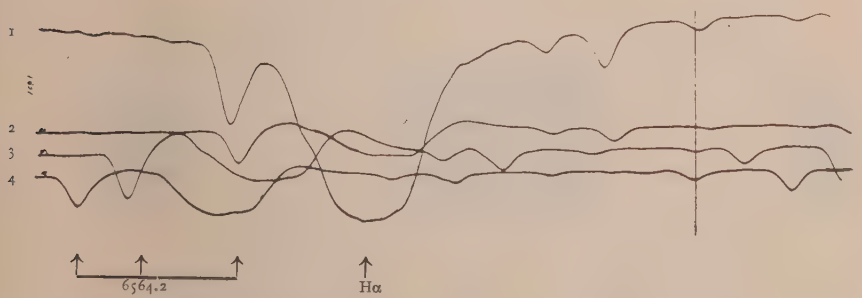


Fig. 2. — Microfotogrammi della riga Hα nello spettro del sole; 1. spettro del centro; 2, 3 e 4, spettri dei lembi con righe atmosferiche intense.

Praga. Le misure sono state fatte sulle stesse lastre che hanno servito per la determinazione della dissimmetria della riga Hα, e del suo periodo di rotazione[3]. Esempi dei microfotogrammi ottenuti sono riprodotti nelle figg. 1 e 2.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.
(2) «Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei», X, 1929, 227.
(3) «Pubbl. Arcetri», fasc. 46, p. 27.

Dapprima si era pensato, che da queste misure si potessero dedurre gli spostamenti ($H\alpha_3 - H\alpha_2$) a conferma di quelli ricavati con lo spettrocomparatore. Siccome però esiste la circostanza, che le righe di emissione e quella di assorbimento si sovrappongono, non è possibile dai microfotogrammi misurare le posizioni delle componenti della riga $H\alpha_2$, che corrisponderebbero alle stesse misurate con lo spettrocomparatore. Ciò si comprende meglio dalla figura 3, che rappresenta la relazione che passa fra il

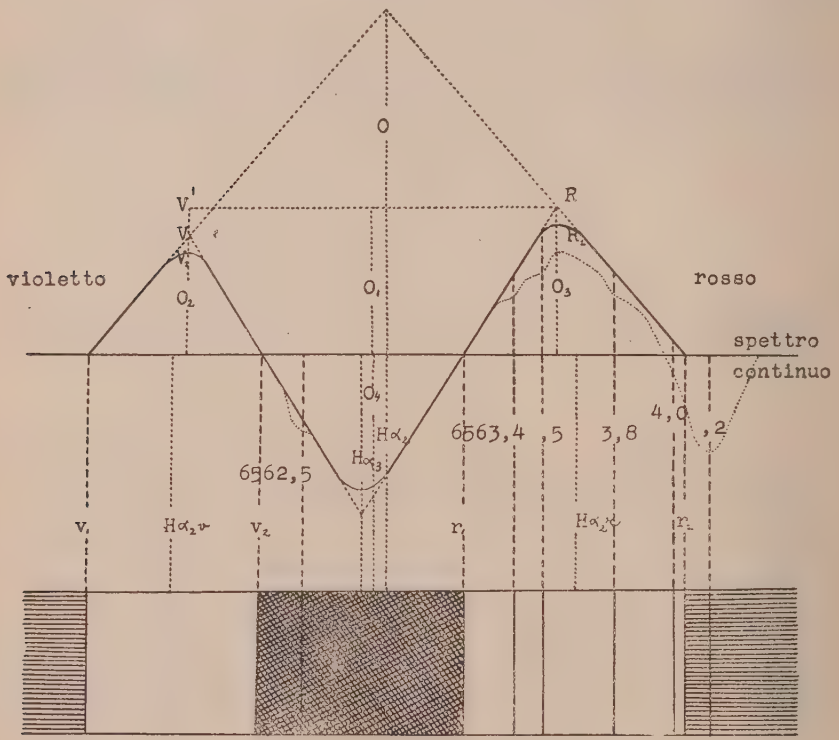


Fig. 3. — Curva microfotometrica (sopra)
e apparenza della riga Hα doppiamente invertita (sotto) nello spettro del lembo solare.

microfotogramma e la configurazione dello spettro della riga Hα doppiamente invertita.

Si hanno le seguenti uguaglianze:

$$H\alpha_2 r = \frac{r_1 + r_2}{2}, \; H\alpha_2 v = \frac{v_1 + v_2}{2}, \; H\alpha_3 = \frac{v_2 + r_1}{2}, \; H\alpha_2 = \frac{v_1 + r_2}{2},$$

$$O_4 = \frac{H\alpha_2 r + H\alpha_2 v}{2} = \frac{v_1 + v_2 + r_1 + r_2}{4} \quad , \quad O_1 = \frac{O_2 + O_3}{2}.$$

Si vede che non è possibile determinare lo spostamento $(H\alpha_3 - H\alpha_2)$ dalle seguenti ineguaglianze:

$$R \sim O_3 \neq H\alpha_2 r \quad , \quad V \sim O_2 \neq H\alpha_2 v \quad , \quad O_1 \neq O_4 .$$

Le misure con lo spettrocomparatore sono state fatte nei punti v_1, v_2, r_1 e r_2; e da esse sono state dedotte, come dalle formole sopra scritte $H\alpha_2 r$ e $H\alpha_2 v$. Invece le misure microfotometriche sono state fatte nei punti R_1, V_1 che si possono identificare con R e V. In generale si ha che: $\{H\alpha_3 - (R + V) : 2\} \neq \{H\alpha_3 - (H\alpha_2 r + H\alpha_2 v) : 2\}$, e quindi si può solamente dire che l'esistenza di uno di questi spostamenti porta di conseguenza all'esistenza dell'altro; inoltre se la distribuzione della intensità delle componenti non è disturbata da altre cause, si deve trovare che:

$$\{H\alpha_3 - (R + V) : 2\} < 2\{H\alpha_3 - (H\alpha_2 r + H\alpha_2 v) : 2\},$$

e ambedue dello stesso segno. Perciò non sarà senza interesse di determinare la differenza: $\{H\alpha_3 - (R + V) : 2\}$.

Nelle precedenti determinazioni [1] sono state concluse le lunghezze d'onda della riga Hα e delle componenti. Questi risultati sono riportati nella tabella I, dove i valori della colonna terza sono stati corretti per lo spostamento (S–L) delle righe metalliche che hanno servito per la loro determinazione, cioè per la differenza delle lunghezze d'onda di queste righe fra lo spettro del centro e del lembo.

Tabella I.

Le lunghezze d'onda della riga Hα *negli spettri del centro e del lembo del sole.*

riga	λ	
	non corretto	corretto
Hα	6562.811	6562.811
$H\alpha_3$	6562.793	6562.803
$H\alpha_2$	6562.853	6562.863

Dai microfotogrammi, e con la lunghezza d'onda corretta $H\alpha_3$, sono state determinate le differenze $\{H\alpha - H\alpha_3\}$, come sono date nella colonna

(1) «Pubbl. Arcetri», fasc. 46, 1929, pp. 67-69.

seconda della tabella II, separatamente per le diverse latitudini eliografiche; invece il valore medio ottenuto dalle misure con lo spettrocomparatore in Arcetri è $\{H\alpha - H\alpha_3\} = +0.008$ A (quinta colonna). Si nota uno certo

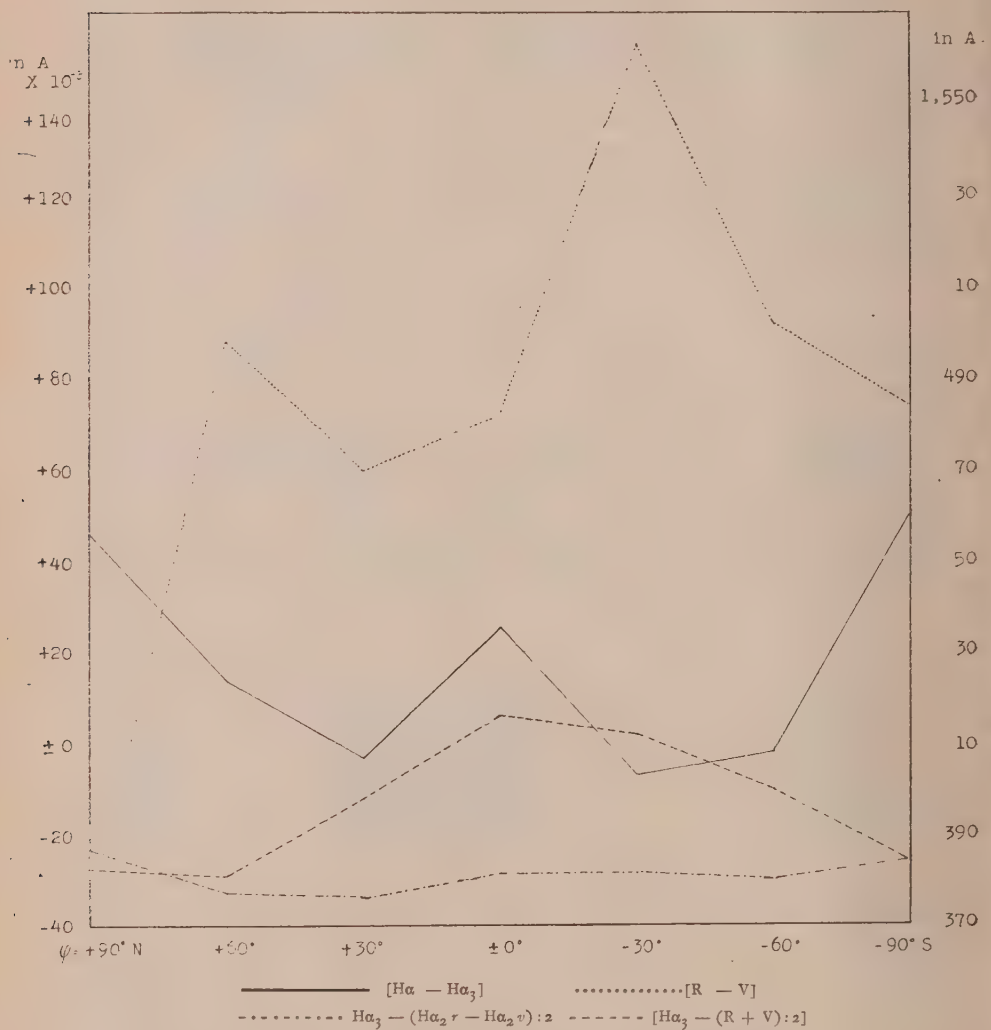


Fig. 4. — Valori delle differenze $[H\alpha - H\alpha_3]$, $[H\alpha_3 - (H\alpha_2 r + H\alpha_2 v) : 2]$, $[R - V]$ e $[H\alpha_3 - (R + V) : 2]$ per diverse latitudini eliografiche.

andamento con la latitudine (fig. 4), ed un andamento simmetrico nei due emisferi. Se si confronta questo con la fig. 5, che rappresenta la variazione dell'altezza della cromosfera alle diverse latitudini, come risulta dalle

osservazioni di Arcetri per gli anni 1927–28 [1] si nota un simile andamento in corrispondenza alle zone, ai poli, a 30°, a 60° e all'equatore. Parrebbe dunque probabile una influenza delle protuberanze sulla lunghezza d'onda della riga $H\alpha_3$. Facendo la differenza dei valori medi fra la quinta e la

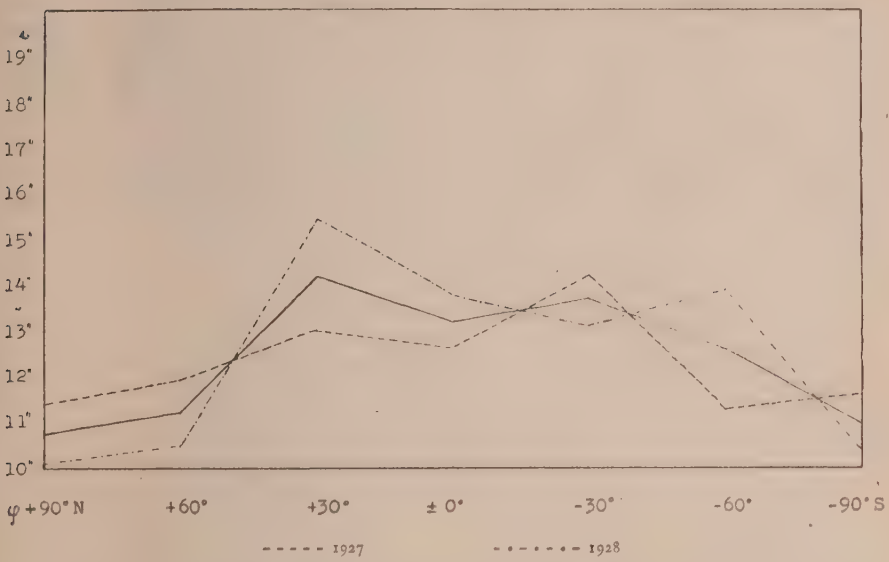


Fig. 5. — Altezza della cromosfera
con protuberanza dalle misure fatte ad Arcetri negli anni 1927-28.

seconda colonna si ottiene: $-0.010\,A = m - n$, dove m e n rappresentano le distanze del centro geometrico dal punto della maggiore intensità che possiamo chiamare centro fotometrico, rispettivamente per il centro ed il lembo del sole.

(1) «Pubbl. Arcetri», fasc. 45, 1928 e fasc. 46, 1929.

Tabella II.

Confronto fra le misure microfotometriche e quelle ottenute con lo spettrocomparatore.

φ	microfotometro			spettrocomparatore	
	A × 10⁻³				
	$H\alpha - H\alpha_3$	$H\alpha_3 - \frac{R+V}{2}$	R — V	$H\alpha - H\alpha_3$	$H\alpha_3 - \frac{H\alpha_2 r + H\alpha_2 v}{2}$
+ 90° N	+ 46	— 27	1373	—	— 23
+ 60	+ 14	— 29	1498	—	— 33
+ 30	— 3	— 12	1470	—	— 34
0	+ 25	+ 6	1482	—	— 29
— 30	— 7	+ 2	1563	—	— 28
— 60	— 2	— 10	1502	—	— 30
— 90 S	+ 50	— 26	1484	—	— 26
medie:	+ 18	— 14	1482	+ 8	— 30

Nella colonna terza sono dati i valori $\{H\alpha_3 - (R + V) : 2\}$ e nella sesta $\{H\alpha_3 - (H\alpha_2 r + H\alpha_2 v) : 2\}$. Si nota che i valori per ambedue i poli sono in buon accordo, la maggiore divergenza si ha all'equatore, ma in questo caso bisogna notare che esistono pochissime misure. Le due curve che rappresentano l'andamento di questi valori sono tracciate nella fig. 4.

Possiamo anche calcolare la differenza (R — V), cioè la distanza dei punti di massima intensità delle componenti $H\alpha_2 r$ e $H\alpha_2 v$. Anche qui si nota un andamento alle varie latitudini eliografiche nei due emisferi, e quindi sembra probabile concludere che tanto le differenze fra le lunghezze d'onda, quanto le larghezze delle componenti sono, almeno in parte, sotto l'influenza delle perturbazioni, causate dalla presenza di eruzioni o protuberanze nelle zone di maggiore attività solare.

Già ad Arcetri, negli anni 1927–28, fu osservata nello spettro del sole la presenza di righe sovrapposte alla riga Hα e le sue componenti. Avendo notato che queste righe si osservano soltanto sugli spettrogrammi presi con forte assorbimento atmosferico si può dedurre che si tratti di righe appartenenti all'atmosfera terrestre, alcune delle quali sono state date già nella mappa di Rowland. Dagli stessi microfotogrammi, di cui si è qui parlato, si può determinare le lunghezze d'onda di queste righe.

Per questo lavoro sono stati scelti gli spettrogrammi che mostrano le righe atmosferiche più intense. Nella fig. 2 si vede bene la posizione delle righe atmosferiche sovrapposte, specialmente sui microfotogrammi dello spettro del lembo dove il contrasto è maggiore; appunto su questi spettri si sono fatte le misure.

I risultati di queste per tre righe sono dati nella tabella III ed ivi confrontati coi valori del catalogo RR.[1]. Anche pel fatto che queste righe non subiscono l'effetto Doppler si conferma che esse non sono di origine solare.

Secondo questi risultati si sono segnate le posizioni delle dette righe nella fig. 3, allo scopo di poter discutere la loro influenza sulla Hα.

Quando si misurano con lo spettrocomparatore i punti v_1, v_2, r_1, r_2, possono aver influenza le righe 1, 5 e 6, invece sulle misure col microfotometro le righe 2, 3 e 4.

Tabella III.

Le righe sovrapposte o vicine alla riga Hα.

riga	λ		
	microfot.	RR.	origine
1	6562.55	—	Atm.
2	6563.50	6563.533	Atm.
3	6563.83	—	Atm.
4	—	6563.42	Co
5	—	6564.075	Atm.
6	—	6564.220	Atm.

Per eliminare il più possibile l'influenza di queste righe si è sempre cercato di misurare gli spettrogrammi con deboli righe atmosferiche.

Dal confronto dei nostri microfotogrammi con le righe atmosferiche più intense, con quelli con le stesse righe molto deboli, si nota che esiste certamente una influenza dell'assorbimento dell'atmosfera terrestre sulle intensità delle componenti di emissione di Hα. Infatti il punto R è quasi sempre

(1) St. John, Moore, etc., *Revision of Rowland's Preliminary Table.* «Carnegie Institution of Washington», 1928.

più basso o tutto al più alla stessa altezza, ma mai più alto del punto V. Invece quando le righe atmosferiche sono più deboli si può osservare R tanto più alto, quanto più basso che V. Da questo io credo si possa concludere che le righe atmosferiche, anche quando sono deboli, possono avere influenza sulla intensità della componente $H\alpha_2 r$. La circostanza che anche quando le righe atmosferiche sono molto deboli si trovano i casi in cui R è più basso di V non confuta il precedente ragionamento, ma ci porta a considerare altre cause per l'indebolimento della intensità della componente $H\alpha_2 r$, e cioè la presenza della riga 6563.42, o lo spostamento $(H\alpha_3 - H\alpha_2)$, o la irregolare distribuzione della intensità delle componenti $H\alpha_2$ e $H\alpha_3$. Dai risultati ottenuti con lo spettrocomparatore (tab. II, ultima colonna) si vede che lo spostamento $(H\alpha_3 - H\alpha_2)$ cambia in tal modo da poter credere che ciò sia dovuto ad uno spostamento delle componenti di $H\alpha$. Dai risultati ottenuti col microfotometro (tab. II, colonna seconda) si è trovato, che la lunghezza d'onda della riga $H\alpha_3$ cambia in modo da far credere alla influenza di perturbazioni occasionali. In definitiva si può concludere che la variazione della intensità delle due componenti è dovuta, almeno in parte, alle variazioni della relativa posizione delle righe $H\alpha_3$ e $H\alpha_2$.

Sono lieta di ringraziare il prof. Giorgio Abetti per avermi concesso gentilmente di misurare le lastre a Praga e per i suoi consigli, come pure il prof. Václav Dolejšek per la cortese ospitalità concessami nel suo laboratorio.

Fisica. — *Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di altezza variabile.* Nota I di R. Zoja, presentata [1] dal Corrisp. C. Guidi.

L'altezza h della sezione trasversale di quota z sia una funzione di z, funzione soddisfacente alle solite restrizioni ma del resto completamente arbitraria.

Supponiamo inoltre verificate tutte le ipotesi di Saint-Venant riguardo alle sollecitazioni: il solido, incastrato ad una base, sarà sollecitato solamente in corrispondenza della base libera, nulle essendo sia le forze di massa sia quelle agenti sulla superficie laterale.

Mantenendo le solite convenzioni circa la posizione degli assi, in questa prima Nota mi limito alla ricerca della distribuzione delle tensioni interne per il sistema di sollecitazioni

$$\mathfrak{N}_l \quad , \quad \mathfrak{M}_l \quad , \quad \mathfrak{T}_l$$

giacenti nel piano verticale yz.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

Data la forma della sezione trasversale anche il sistema di tensioni interne sarà piano e quindi in ogni punto sarà rigorosamente

$$\sigma_x = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = 0 \quad , \quad \tau_{xz} = 0 .$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico si riducono quindi alle due seguenti

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

e così pure le equazioni ai limiti alle due

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) = 0 \\ \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) = 0 . \end{cases}$$

Considerando una sezione generica di quota z, per l'equilibrio tra il sistema di tensioni interne e la sollecitazione esterna relativa alla sezione stessa, avremo:

$$(3) \qquad \begin{cases} \int \sigma_z \, dA = \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_l \\ \int \sigma_z \, y \, dA = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_l - \mathfrak{T}_l (l - z) \\ \int \tau_{yz} \, dA = \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_l \end{cases}$$

dove gli integrali vanno estesi a tutta la sezione.

Componenti di tensione.

Diamo alla σ_z la solita espressione

$$(4) \qquad \sigma_z = \frac{\mathfrak{N}}{A} + \frac{\mathfrak{M} y}{J}$$

dove A e J sono funzioni note di z in quanto lo sono di h, e dimostriamo che partendo da tale espressione è possibile risalire in modo univoco alla τ_{yz} ed alla σ_y soddisfacendo a tutte le condizioni dell'equilibrio elastico, e cioè alle (1), alle (2) ed alle (3).

Innanzi tutto si vede immediatamente che la σ_z soddisfa alle prime due relazioni (3).

In virtù della seconda equazione indefinita dell'equilibrio elastico abbiamo poi

$$\tau_{yz} = -\int \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dy + \varphi$$

dove φ è una funzione di z da determinare, ed otteniamo la seguente espressione di τ_{yz}

$$(5) \qquad \tau_{yz} = \varphi - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{A}\right)\mathfrak{M} \cdot y - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{M}}{J}\right) \cdot y^2 .$$

Per la determinazione di φ si deve ricorrere alle condizioni ai limiti rappresentate dalla seconda delle (2), la quale, introducendo l'angolo α che la tangente al profilo del solido fa coll'asse delle z, diviene:

$$\text{per } y = \pm \frac{h}{2} \qquad \tau_{yz} = \pm \sigma_z \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{2}\sigma_z \frac{dh}{dz} ;$$

donde, fatte le dovute sostituzioni e semplificazioni, si ricava:

$$\varphi = \frac{1}{4}\frac{h}{J}\frac{dh}{dz}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{M}}{J}\right) .$$

È opportuno osservare che risulta identicamente nulla la somma dei termini che cambiano di segno insieme ad h.

Sostituendo nella (5) la funzione ora determinata per φ, sviluppandovi le derivazioni, ed ordinando si ha infine

$$(6) \qquad \tau_{yz} = \frac{1}{A}\frac{y}{h}\frac{dh}{dz}\mathfrak{M} - \frac{1}{8}\frac{h}{J}\left(1 - 12\frac{y^2}{h^2}\right)\frac{dh}{dz}\mathfrak{M} + \frac{M}{bJ}\mathfrak{T}$$

dove M rappresenta il solito momento statico, funzione di y e di z.

La τ_{yz} soddisfa, come è facile verificare, alla condizione rappresentata dalla terza delle (3).

Passiamo ora al calcolo di σ_y.

Con procedimento analogo a quello seguito per τ_{yz} si ha per la prima delle (1)

$$\sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dy + \psi$$

e quindi per la (5)

$$(7) \qquad \sigma_y = \psi - \frac{d}{dz}(\varphi) \cdot y + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{A}\right)\mathfrak{M} \cdot y^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\mathfrak{M}}{J}\right) \cdot y^3 .$$

La ψ viene determinata colla condizione che

$$\text{per } y = \pm \frac{h}{2} \qquad \sigma_y = \pm \tau_{yz} \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{4} \sigma_z \left(\frac{dh}{dz}\right)^2$$

donde, con le stesse osservazioni fatte per la φ, si ricava

$$\psi = \left[\frac{1}{4A}\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{A}\right)\right] \mathfrak{M}.$$

Sostituendo nella (7), sviluppando le derivazioni e dopo diverse semplificazioni si ottiene

$$(8) \quad \sigma_y = \frac{1}{A}\left[\frac{y^2}{h^2}\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 + \frac{M}{A}\frac{d^2h}{dz^2}\right]\mathfrak{M} -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{y}{h}\left[\left(1 - 8\frac{y^2}{h^2}\right)\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 - 4\frac{M}{A}\frac{d^2h}{dz^2}\right]\mathfrak{M} + 2\frac{M}{bJ}\frac{y}{h}\frac{dh}{dz}\mathfrak{T}.$$

Il problema posto è quindi risolto completamente dalle formole (4), (6), (8), le quali, come è opportuno notare esplicitamente, sono del tutto rigorose.

Il risultato ottenuto mi sembra interessante e suscettibile di applicazioni a casi particolari, mentre il procedimento seguito può venire esteso ad altri tipi di solidi, come mi propongo di esporre in prossime Note.

Riguardo alla forma delle espressioni trovate per τ_{yz} e per σ_y mi limiterò per ora ad osservare che:

1) oltre al termine contenente $\mathfrak{T}$, la τ_{yz} ha due termini in $\mathfrak{N}$ ed in $\mathfrak{M}$ nei quali figura $\frac{dh}{dz}$ alla prima potenza; da essi quindi non si potrà prescindere senza commettere un errore sensibile anche nel caso di una piccola variazione dell'altezza.

2) nell'espressione di σ_y il termine in $\mathfrak{T}$ contiene $\frac{dh}{dz}$ pure alla prima potenza e non può quindi essere trascurato, mentre si potrà invece prescindere, almeno in prima approssimazione, dall'influenza di $\mathfrak{N}$ e di $\mathfrak{M}$, nei casi di lieve inclinazione e grande raggio di curvatura del profilo.

Fisica (Fisica-Chimica). — *Sul comportamento in campo elettrico dei complessi colloidali umico-minerali* [1]. Nota di C. Antoniani, presentata [2] dal Socio A. Menozzi.

Riferisco in questa Nota alcune osservazioni da me fatte sul comportamento in campo elettrico di un complesso colloidale umico-minerale separato dal terreno per estrazione con NaOH 10 % previo trattamento con HCl 5 %.

La dispersione colloidale utilizzata per la ricerca venne spogliata dai costituenti argillosi mediante trattamento con KCl 5 %; essa rappresenta la frazione decantata dopo un periodo di sedimentazione di 90 giorni. L'ulteriore purificazione venne compiuta mediante elettrodialisi dopo di che all'analisi il complesso rivelò la seguente composizione:

Sostanza organica . . .	82.75 %
Ferro (Fe_2O_3	5.05 »
Alluminio (Al_2O_3). . .	4.35 »
Silicio (SiO_2)	4.65 »
Acido fosforico (P_2O_5) .	2.90 »

Tale complesso è elettronegativo ed ha il punto isoelettrico a $p_H = 7.4$.

Il comportamento in campo elettrico venne studiato in dispersione alcalina per NaOH a gradi diversi di reazione. L'apparecchio a tale scopo impiegato consta di due cilindri di vetro verticalmente disposti e tra loro congiunti, a circa un terzo dell'altezza, da un tubo a forma di V rovesciato, munito al vertice di rubinetto di chiusura.

Le ricerche riguardano principalmente il comportamento del costituente organico del complesso, cioè del colloide umico, di cui venne quantitativamente seguita l'azione di trasporto ad alcalinità diverse.

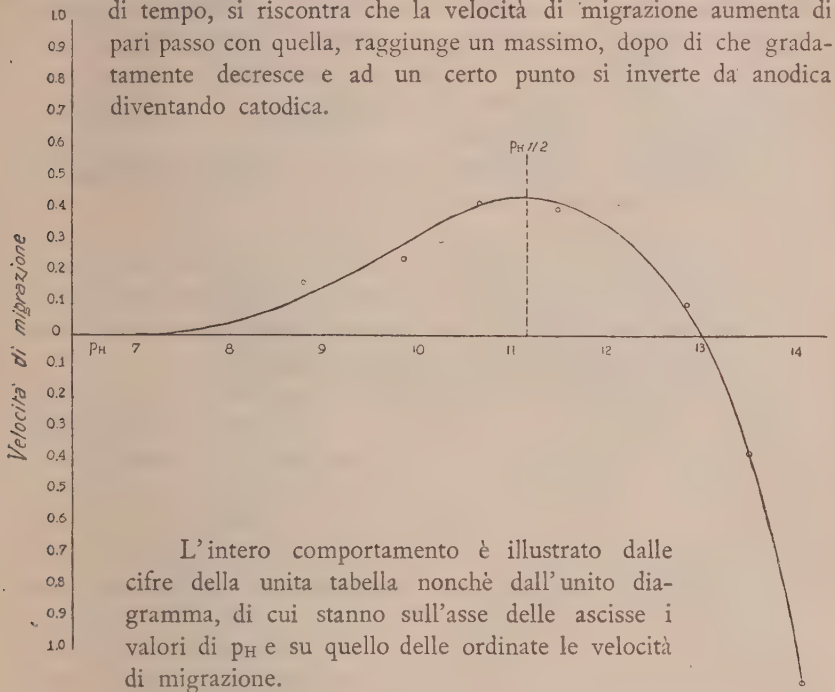
Se, dopo flocculazione al punto isoelettrico, il complesso colloidale viene riportato allo stato di dispersione per aggiunta di NaOH e quindi sottoposto all'azione del campo elettrico, esso manifesta migrazione anodica.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano. Marzo 1931.

(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.

Tutte le esperienze furono compiute con una differenza di potenziale di 8 Volta ed una F. E. M. per cm. pari a 0.36 Volta/cm.

Aumentando la concentrazione in joni OH della dispersione e contemporaneamente misurando la quantità di sostanza che migra nell'unità di tempo, si riscontra che la velocità di migrazione aumenta di pari passo con quella, raggiunge un massimo, dopo di che gradatamente decresce e ad un certo punto si inverte da anodica diventando catodica.



L'intero comportamento è illustrato dalle cifre della unita tabella nonchè dall'unito diagramma, di cui stanno sull'asse delle ascisse i valori di p_H e su quello delle ordinate le velocità di migrazione.

N°	p_H	Sostanza contenuta, dopo migrazione, nella branca		Quantità di sostanza migrata	Durata della migrazione (ore)	Migrazione unitaria
		Anodica	Catodica			
1	8.84	gr. 0.054	gr. 0.034	mg. 10	53	0.18
2	9.92	» 0.102	» 0.083	» 10	40	0.25
3	10.63	» 0.184	» 0.102	» 42	96	0.42
4	11.58	» 0.290	» 0.146	» 72	161	0.40
5	12.71	» 0.241	» 0.220	» 10	96	0.10
6	13.48	» 0.196	» 0.239	» 22	56	0.37
7	14.07	» 0.163	» 0.201	» 19	19	1.00

Le determinazioni vennero eseguite raccogliendo separatamente, alla fine di ogni esperienza, la dispersione colloidale delle due branche dell'apparecchio, flocculandola con HCl, lavandola ripetutamente con acqua per decantazione e infine sottoponendola alla dialisi. Sulla sostanza così purificata veniva determinato il contenuto in sostanza organica per calcinazione.

Il comportamento, quale appare dai risultati ottenuti, indica chiaramente che il colloide umico, *tipicamente elettronegativo in dispersione alcalina per* NaOH *sino ad un certo valore della concentrazione in joni* OH, *diventa elettropositivo al di là di questo valore.*

Due fatti sono poi interessanti a rilevarsi per quanto concerne la stabilità della dispersione dell'intero complesso.

Oltre un certo valore di p_H ($p_H = 12$ circa) il complesso soggiace lentamente a dissociazione. Questa ha per effetto la flocculazione dei costituenti minerali, cosicchè rimane allo stato disperso il solo colloide umico. Ora, tale dissociazione si compie molto più rapidamente in prossimità del punto in cui si osserva l'inversione di segno del colloide umico.

A $p_H = 11$ per contro, cioè in corrispondenza del punto in cui si ha per il colloide umico la massima velocità di migrazione e quindi la massima carica elettronegativa delle particelle, il complesso presenta la massima stabilità rispetto a quegli elettroliti che sono capaci di determinarne la flocculazione.

Questo comportamento permette di pensare che in dispersione alcalina il colloide umico, protettore essenziale del complesso, *manifesti la propria azione protettiva solo entro determinati valori della concentrazione in joni* OH. E che precisamente il valore di $p_H = 11$, corrispondente alla carica massima elettronegativa, coincida col punto del massimo potere di protezione, mentre il valore di $p_H = 13$, caratterizzato dall'inversione di carica, denoti il punto in corrispondenza del quale il potere protettore si estingue.

Parimenti degno di nota è il fatto che al di là di $p_H = 13$ le particelle disperse e dotate ora di segno positivo, rivelino valori di migrazione nuovamente crescenti col crescere della concentrazione in joni OH. Tale comportamento, tipicamente colloidale, denota che l'inversione di segno non ha privato il costituente umico del complesso delle sue caratteristiche colloidali, ma ne ha soltanto, verosimilmente, mutata la individualità.

Sulla composizione e sul comportamento in genere del colloide umico elettropositivo testè accennato le ricerche sono attualmente in corso.

Fisica. — *Condizioni di equilibrio in un ponte di Wheatstone nelle misure ad audio e radio frequenza.* Nota di A. Marino, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Assorbimento e diffusione della radiazione corpuscolare penetrante nel piombo e nel ferro.* Nota di B. Rossi, presentata dal Socio A. Garbasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *L'Idrogenazione dei composti azotati contenuti nel catrame primario* [1]. Nota di G. Roberti, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Il catrame che si ottiene per distillazione a bassa temperatura del carbon fossile e della lignite è composto di una frazione neutra, di una frazione acida e di una frazione basica. Le proporzioni di queste frazioni e la natura dei loro componenti variano entro limiti abbastanza vasti, a seconda della materia prima che s'impiega e del sistema con il quale si conduce la distillazione.

Si può però affermare che mentre la frazione acida può costituire anche più del 30 % del catrame [3], la frazione basica raramente supera il 4 % [4]; che la frazione acida contiene composti caratterizzati da un gruppo OH fenolico, e che nella frazione basica si trovano composti azotati della serie aromatica quale l'anilina [5] e i suoi omologhi e composti eterociclici come la piridina, la chinolina, l'isochinolina e i loro omologhi [6].

Gli olii neutri, composti da idrocarburi delle diverse serie, costituiscono la parte più pregiata del catrame, in quanto si prestano a sostituire i derivati del petrolio, mentre i prodotti acidi e basici non hanno finora trovato impieghi rimunerativi, sopratutto per la complessità della loro composizione, che si oppone ad una separazione e valorizzazione delle singole specie chimiche che vi sono contenute.

Gli olii neutri devono essere separati dalle altre due frazioni; l'eliminazione pura e semplice dei prodotti fenolici e delle basi azotate che si può realizzare rispettivamente con un lavaggio con soda e uno con acido solforico, costituisce una operazione facile, ma costosa, che porta naturalmente ad una notevole diminuzione di peso degli olii di catrame.

Anzichè separare gli olii fenolici è stata tentata la loro trasformazione in idrocarburi, e la via che ha dato i risultati migliori è stata l'idrogenazione catalitica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.
(3) Fischer, *Die Umwandlung der Kohle in Oele.* Ediz. 1924, p. 18.
(4) Brown e Pollock, « Journ. Ind. Eng. Chemistry », 1929, p. 234.
(5) Oehler, « Zeit. f. Angew. Chemie », 1889, p. 561.
(6) Franck e Vollmer, « Braunkohle », 23, p. 505.

Avendo sperimentato con successo un catalizzatore, il solfuro di cobalto, capace di trasformare i fenoli in idrocarburi operando in corrente di idrogeno a 100 atmosfere e intorno a 350° [1], mi è sembrato interessante vedere, se nelle stesse condizioni, i composti azotati subivano anch'essi una trasformazione analoga.

È questo studio che forma l'oggetto della presente Nota.

I composti azotati che ho preso in esame sono: l'anilina, la piridina e la chinolina.

Questi ultimi due presentano una grande resistenza all'azione della temperatura. Sottoponendo un catrame proveniente dalla distillazione a bassa temperatura di un carbone Cannel, ad un comune processo di craking, il Dubbs, Morrel e Faragher [2] hanno riscontrato la presenza dei composti basici nell'olio ottenuto.

Per distruggere la piridina e la chinolina, Ruhemann, Herzenberg e Inouye [3] hanno dovuto raggiungere temperature assai elevate, oltre 700°. Essi così ottennero prevalentemente idrocarburi gassosi e l'eliminazione di azoto sotto forma di acido cianidrico ed ammoniaca; 10 % del prodotto di partenza si trasformava in un catrame che conteneva però ancora composti azotati del gruppo del dipiridile. Queste esperienze dimostrano che la pirogenazione pura e semplice non è la via adatta per eliminare le basi dagli olii di catrame.

L'idrogenazione dell'anilina, della piridina e della chinolina è stata tentata da parecchi Autori con risultati diversi. Per lo più gli sperimentatori hanno ottenuto i corrispondenti prodotti idrogenati e prodotti di condensazione senza staccare l'azoto dalla molecola. Taluni giungono invece all'eliminazione di questo elemento, sotto forma di ammoniaca, e sono queste le esperienze più interessanti dal punto di vista della trasformazione dei composti basici contenuti nel catrame primario.

Kischner [4] ottenne cicloesano riscaldando per parecchi giorni a 300° anilina con acido iodridico, e Scheurer e Kestner [5] osservarono la trasformazione in benzolo ed ammoniaca dell'anilina formatasi per riduzione a caldo del nitrobenzolo con idrogeno nascente, prodotto da ferro ed acido acetico, in recipiente chiuso, a una pressione di 8.5 atmosfere.

Sabatier e Senderens [6], Willstätter e Hatt [7] idrogenando l'anilina in presenza di catalizzatori, a pressione ordinaria, osservarono accanto alla

(1) Roberti, « Memorie Reale Acc. d'Italia », vol. I, p. 183.
(2) Morrel e Faragher, « Journ. Ind. Eng. Chemistry », 1929, p. 1084.
(3) Ruhemann, Erzenberg e Inouye, « Braunkohle », *28*, p. 749.
(4) Kischner, « J. Pr. Ch. », *2*, 56, p. 374.
(5) Scheurer e Kestner, « Bull. Soc. Chim. de France », 1862, p. 43.
(6) Sabatier e Senderens, « Ann. de Chimie », (8) *4*, p. 376.
(7) Willstätter e Hatt, « Ber. », *45*, p. 1471.

ammina idrogenata, la formazione di piccole quantità di idrocarburi. Ssadikoff e Klebansky [1] operando con il metodo di Ipatiew, impiegando come catalizzatore amianto iridiato, ottennero fino a 25 % di benzolo e cicloesano.

Dalla piridina Hofmann [2] ottenne sopra 300° con acido iodridico la riduzione a pentano.

Hofmann e Lang [3] operando a 240 atmosfere dovettero spingere la temperatura fino a 500° per avere l'eliminazione parziale dell'azoto sotto forma di ammoniaca; gli idrocarburi formatisi erano in parte gassosi ed in parte liquidi.

Skita e Brunner [4] per idrogenazione catalitica in presenza di platino colloidale, ottennero a 50° quasi esclusivamente pentano ed ammoniaca.

La trasformazione della chinolina in ammoniaca ed idrocarburi benzenici, (d_{25} 0.87) è stata ottenuta da Ipatiew e Orlof [5], idrogenando sotto pressione, in presenza di ossidi di ferro ed alluminio tra 440 e 460°.

Ho eseguito l'idrogenazione dell'anilina, della piridina e della chinolina, con il dispositivo precedentemente descritto e nelle condizioni sperimentali sopraricordate: 350°, 100 atmosfere e solfuro di cobalto come catalizzatore.

Ho riportato altrove [6] i risultati raggiunti nel caso dell'anilina e cioè formazione di cicloesano e cicloesene e di una piccola frazione di derivati idrogenati del difenile.

Qui riferirò quanto ho ottenuto idrogenando gli anelli eterociclici.

La piridina con la quale ho sperimentato conteneva una certa quantità di omologhi superiori, come indicano i seguenti dati ottenuti distillando 50 cc.:

116° passano 20 cc.
116–135° passano 29 cc.

L'idrogenazione ha fornito degli idrocarburi che sono stati separati dalla piridina inalterata mediante acido cloridrico diluito, poi sono stati lavati con acqua e seccati su carbonato di potassio fuso. La distillazione di 17 cc. di idrocarburi ha fornito 12 cc. di idrocarburi che sono passati tra 36 e 100°, e 3.5 cc. che si sono raccolti fra 170 e 178.5°. La prima frazione, che si presentava perfettamente incolore, è stata ridistillata impiegando una colonna Vigreux per la rettificazione.

Ho separato tre nuove frazioni di ciascuna delle quali è stata determinata la densità e il numero di bromo con il metodo Parker Mc Illiney,

(1) Ssadikow e Klebansky, « Ber. », *61*, p. 131.
(2) Hofmann, « Ber. », *16*, p. 590.
(3) Hofmann e Lang, « Brenstoffchemie », *10*, p. 203.
(4) Skita e Brunner, « Ber. », *99*, p. 1597.
(5) Ipatiew e Orloff, « Ber. », *62*, p. 593.
(6) Roberti, « Ann. di Chim. Appl. », 1931.

seguendo la manualità descritta da Agostini [1]. Riporto le caratteristiche delle tre frazioni.

Frazione	distilla tra:	$d_{11,5}$	Br di addizione	Brt totale
I	35°–60°	0.6425	19	22.5
II	60°–69°	0.6578	24	24
III	69°–100°	0.7091	11.7	11.7

Questi numeri indicano che si hanno miscugli di pentano e amilene, esano ed esene, eptano ed eptene.

La frazione che passa fra 170 e 178.5° è gialla e presenta le seguenti caratteristiche:

d_{12}	Br di addizione	Br totale	$n_D^{15.3}$
0.7503	2.42	2.42	1.4223

Si tratta prevalentemente di un idrocarburo che proviene dalla idrogenazione di un prodotto di condensazione di due molecole di piridina.

Dalla idrogenazione della chinolina, che era pressochè pura, ho ottenuta ammoniaca ed idrocarburi che trattati analogamente a quelli provenienti dalla piridina hanno dato le seguenti frazioni:

Frazione	distilla tra	d_{16}	Br di addizione	Br totale
I	135°–153°	0.8141	95.61	95.61
II	160°–179°	—	—	—
III	300°–345°	0.9058	19.39	64.19

La prima frazione che è incolore, risulta costituita probabilmente da un miscuglio di propil–cicloesano e propil–cicloesene. Le altre due frazioni sono scure e imbruniscono con il tempo. La seconda non era in quantità sufficiente per determinarne la densità. La terza risulterebbe da una condensazione analoga a quella osservata nel caso della piridina.

La caratterizzazione precisa della costituzione di tutti gli idrocarburi ottenuti richiederebbe un lavoro assai lungo, che esula dallo spirito di questo studio. Tuttavia gli idrocarburi di cui si può affermare la formazione sono sufficienti per permettere una estensione a questi prodotti azotati dello schema di reazione di cui ho dimostrato l'attendibilità, nel caso dell'idrogenazione del fenolo [2]. Cioè si può ammettere che in un primo

(1) Agostini, « Annali di Chim. Appl. », 1929, n. 6.
(2) Roberti, « Annali di Chim. Appl. », 1931, n. 5.

tempo l'idrogeno si fissi sulla molecola e che la molecola idrogenata si scinda poi, liberando l'azoto sotto forma di ammoniaca.

La successione delle reazioni sarebbe dunque la seguente:

Per l'anilina:

$$C_6H_5NH_2 \xrightarrow{3H_2} C_6H_{11}NH_2 \begin{cases} \xrightarrow{+H_2} C_6H_{12} + NH_3 \\ \longrightarrow C_6H_{10} + NH_3 \end{cases}$$

Per la piridina:

$$C_5H_5N \xrightarrow{+3H_2} C_5H_{10}NH \begin{cases} \xrightarrow{+2H_2} C_5H_{12} + NH_3 \\ \longrightarrow C_5H_{10} + NH_3 \\ \quad +H_2 \end{cases}$$

Per la chinolina:

$$C_9H_7N \xrightarrow{+5H_2} C_9H_{16}NH \begin{cases} \xrightarrow{+2H_2} C_9H_{18} + NH_3 \\ \longrightarrow C_9H_{16} + NH_3 \\ \quad +H_2 \end{cases}$$

Accanto a queste reazioni principali ne avvengono altre che comportano una condensazione oltre all'idrogenazione.

Conclusione: Mediante il processo di idrogenazione che ho studiato, tanto i composti acidi che quelli basici contenuti nel catrame primario vengono trasformati in idrocarburi.

L'azoto si libera dai composti basici sotto forma di ammoniaca, che può costituire un sottoprodotto della lavorazione.

Geologia (Paleobotanica). — *Di alcune Corallinacee fossili delle Canarie.* Nota II di M. Airoldi, presentata[1] dal Corrisp. C. Rovereto.

Porolithon inaspectum n. sp. (fig. 1).

Descrivo con questo nome una specie di dimensioni minori delle precedenti, che ha pure forma di ciottoletto, di 1 cm. di diametro, con intumescenze che forse in origine erano abbastanza sviluppate. Le sezioni sottili sono assai opache, così che lo studio riesce alquanto difficile. Nel tallo, che è sviluppato sopra un briozoario, si distingue l'ipotallo, poco sviluppato (fino a 50 μ di spessore), formato da cellule rettangolari che misurano da 14 a 23 μ di lunghezza, per 7-9 μ di larghezza. Queste cellule sono disposte in file rampanti, e forse hanno tendenza a raggrupparsi in serie concentriche, ma, data l'opacità del tessuto e la sottigliezza dei setti intercellulari, riesce difficile controllare questa disposizione. Il peritallo è fermato da cellule rettangolari misuranti 10-15 μ di altezza, su 7-10 μ di larghezza. Le dimensioni delle cellule sono quindi assai simili a quelle dell'ipotallo, così che la distinzione dei due tessuti non è netta.

Le varie sezioni dei rami mostrano un ipotallo midollare, e un peritallo con zone di accrescimento, e con cellule di dimensioni uguali a quelle della parte crostosa. Nel peritallo le cellule sono disposte in file verticali, ed in alcune zone in serie orizzontali. Nel peritallo dei rami osservo alcune zone più o meno estese, occupate da grandi corpi cellulari in numero variabile, tra 6 e 24, di forma diversa come si vede nella figura, e che sono assai stipati gli uni contro gli altri.

Queste speciali zone sono distribuite in serie concentriche e sovrapposte, che seguono l'andamento delle serie cellulari del peritallo.

Le cellule da me misurate hanno dimensioni varianti da 65-100 μ per l'altezza, e 9-23 μ per la lunghezza: ho potuto osservare un solo concettacolo munito di unico poro nel tetto; misura 381 μ × 153 μ (fig. 1).

La struttura del peritallo ricorderebbe quella del genere *Lithophyllum*, ma l'ipotallo non mi pare abbia le caratteristiche di questo genere.

La presenza di zone di cellule di dimensioni così diverse dalle altre del peritallo, mi fa ascrivere la specie al genere *Porolithon*, stabilito dal Foslie nel 1906 per alcune specie viventi; questo genere è stato accettato

(1) Nella seduta del 15 marzo 1931.

della Lémoine, secondo la quale sarebbe caratterizzato dalla seguente struttura: ipotallo o ridotto a una sola fila di cellule, o, se più sviluppato, di tipo *Lithothamnium*; peritallo a file cellulari più o meno irregolari e con gruppi, composti normalmente di 3-8 cellule, almeno due volte più grosse delle cellule del resto del tessuto. Organi riproduttori come nel genere *Lithopyllum*.

L'esemplare da me descritto corrisponde complessivamente a questa struttura; però quei gruppi di cellule caratteristici di questo genere, sono

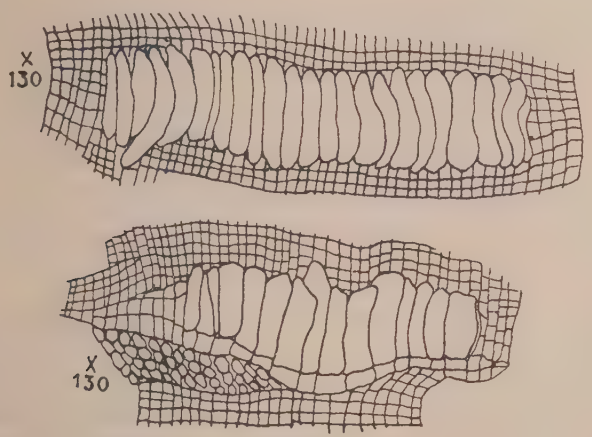


Fig. 1. - Peritallo con gruppi di cellule giganti in *Porolithon inaspectum*.

formate perfino da 24 cellule, che inoltre hanno dimensioni ben maggiori di quelle misurate nei viventi, poichè solo nel *Porolithon praetextatum* Foslie del Pacifico, raggiungono i 40 $\mu \times$ 9-20 μ.

Quanto alla funzione di queste cellule giganti essa è assai discussa: il Foslie ritiene che sieno cellule madri di sporangi, e invero la loro disposizione in zone concentriche potrebbe lontanamente ricordare quella degli sporangi degli *Archaeolithothamnium*. Il genere *Porolithon* non era stato mai sicuramente segnalato allo stato fossile; infatti è incerto che sia da ascriversi ad esso il *Lithophyllum homogeneum* Höwe dell'eocene superiore o oligocene inferiore della Governor's Bay S. Bartolomew nell'America Centrale.

Mélobesia (Lithoporella) melobesioides. Foslie, sp. (fig. 2).

Mastophora melobesioides Foslie (1903); *Mélobesia* (*Lithoporella*) *Melobesioides* Foslie, Léncoine 1927.

Frammisti nei talli di *Lithophyllum fortunatum* sono ben visibili alcuni talli di quest'alga epifita, costituiti da due o tre serie di cellule, assai più

trasparenti di quelle del tallo inglobante, e dalle dimensioni variabili tra i 23-47 μ di altezza e 15-22 μ di lunghezza. L'andamento di queste serie cellulari, mostranti la tipica disposizione a cartuccera, è piuttosto cappriccioso poichè ora si sovrappongono direttamente, ora si allontanano alquanto (fig. 2).

Le dimensioni cellulari sono un poco inferiori a quelle osservate dalla Lémoine in esemplari provenienti dal terziario di varie regioni della Spagna [1]; questa autrice dà come valori per l'altezza da 30 a 70 μ, e per la larghezza da 15 a 40 μ. Data la mancanza di concettacoli, e di altri caratteri spe-

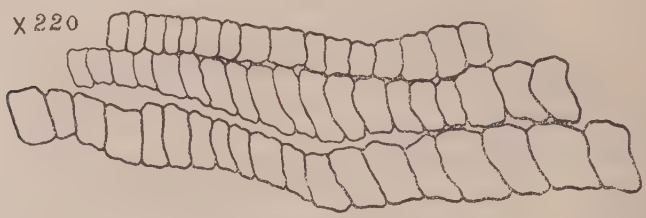


Fig. 2. – Serie cellulari a cartuccera di Melobesia (*Lithoporella*) *Melobesioides* Foslie.

cifici, seguendo l'esempio dei precedenti autori, conservo a questa specie fossile il nome della vivente.

La stessa specie è stata da me trovata in alcuni talli di corallinacee dell'oligocene ligure. Essa è stata descritta per l'oligocene del Canale di Panama, per il nummulitico di Catalogna, per il neogene di Valenza, per l'eocene della Savoia, per gli strati a Lepidociclina dell'Algeria, e per il burdigaliano della Nuova Guinea. Se non si vuole ammettere che si descrivino collo stesso nome specie molto affini, ma diverse, bisogna concludere che *Lithoporella melobesioides* non abbia subito variazioni dell'eocene ai giorni nostri, e che fosse, fin dagli inizi del terziario, specie cosmopolita.

MELOBESIA sp. (fig. 3).

In una sezione di *Porolithon inaspectum* ho potuto osservare varii talli, costituiti da una fila isolata di cellule quasi quadrate, disposte a guisa di nastro ondulato. Le dimensioni di queste cellule sono comunemente di 18-19 μ di altezza per 18-19 μ di larghezza; alcune misurano 18 μ × 23 μ. Ad un certo punto da questa fila di cellule pare ne derivino altre che si sovrappongono, come è indicato nella figura, e raggiungono il numero di 9, così che il tallo viene a misurare 164 μ di spessore. Le cellule delle file sovrapposte hanno dimensioni pressochè eguali a quelle formanti il nastro isolato; altre misurano però 14 μ × 18 μ: la fila di base ha cellule misu-

(1) LÈMOINE Mme Paul, *Corallinacées fossiles de Catalogne et de Valence*, etc. loc. cit.

ranti 9 μ × 23 μ. Non vi è traccia di organi riproduttori, per il chè non è possibile la determinazione specifica (fig. 3).

Questo genere allo stato fossile è stato segnalato per la prima volta dalla signorina Raineri (1) per il miocene di Driana e Haua Zarda in Cirenaica. Le dimensioni delle cellule della forma libica, secondo l'autrice, sono: 40 μ × 26–30 μ e 26–30 μ × 26–30 μ, quindi alquanto superiori a quelle osservate da me.

La signora Lémoine (2) descrive pure una specie del miocene di Villafranca in provincia di Barcellona, e dà le seguenti dimensioni cellulari: 8.17 μ di altezza × 15–22 μ di larghezza; esse si avvicinano quindi assai a quelle della specie delle Canarie. La stessa autrice segnala questo genere nel burdigaliano dell'Albania.

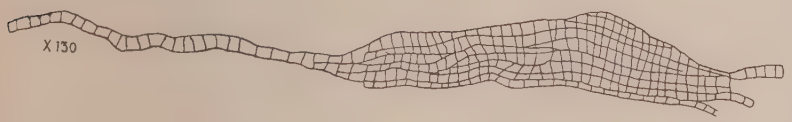


Fig. 3. – Tallo di Melobesia sp.
(riduzione a metà da ingrandimento a 130)

Concludendo: Il *Lithophyllum fortunatum* Lémoine corrisponde veramente al *Lithothamnium racemus* descritto dal Rothpletz; nel miocene delle Canarie oltre a questo genere e specie, esistono i generi *Mesophyllum*, *Porolithon*, *Melobesia* e *Lithoporella*; pare invece mancante assolutamente il genere *Archaeolithothamnium*.

Si possono notare le affinità esistenti con i terreni miocenici dei paesi mediterranei, e in special modo con quelli della Catalogna e della provincia di Valenza. Lo stato attuale delle conoscenze non indica invece affinità con la flora a *Lithothamnium* degli strati a lepidocicline dell'Algeria, regione che invece, secondo la Lémoine (3) ha, nel burdigaliano, varie specie in comune con il burdigaliano dell'Albania. Lo studio delle alghe viventi alle Canarie (4) indica, per le corallinacee, che persistono i generi che già esistevano al miocene, mentre il genere *Archaelithothamnium* neppure oggi vive su quelle coste.

(1) Raineri Rita, *Alghe fossili mioceniche di Cirenaica raccolte dall'ing. Crema*, « La Nuova Notarisia », serie XXXV, gennaio–giugno, 1924.

(2) Lémoine Mme Paul, loc. cit.

(3) Lémoine Mme Paul, *Étude des Melobesiées tertiaires d'Algerie*, « Ass. Fr. pour l'Av. des Sciences », 51e session, p. 194, Constantine 1927.

(4) Borgesen F., *Marine Algae from the Canary Islands. Les Melobenées par M. Lémoine*, « Det Kgl. Danske Videnskabernees Selskäb », Copenagen, 1929.

Biologia. — *Sulla flora batterica di alcuni pesci*[1]. Nota preliminare di G. Cannicci, presentata[2] dal Corrisp. F. Raffaele.

Sulla flora batterica dei pesci esistono diversi studi ed osservazioni, condotti specialmente con lo scopo di spiegare i non rari casi d'intossicazione prodotti dall'uso delle loro carni, sia allo stato naturale, sia variamente conservate; intossicazioni che, anche nel caso che siano dovute a ingestione di sostanze venefiche già formate nelle carni anzichè a infezione diretta per microbi viventi introdotti con esse nell'organismo, si possono spesso ricondurre alla presenza di speciali microrgamismi che le hanno decomposte e alterate con la loro attività biochimica.

Trevisanello[3], in una sua memoria recentemente pubblicata dall'Istituto Wassermann, ha riferito ampiamente su questo capitolo e raccolto una vasta bibliografia: evidentemente però gli studi condotti con scopi igienici non hanno esaminato dal punto di vista biologico la provenienza degli stipiti riscontrati, collegandola coi parallelismi e divergenze che si possono riscontrare nelle alterazioni delle carni di diversa specie, onde cercare d'indagare se queste dipendono da una diversità di composizione chimica di esse, o da una differente provenienza d'infezione batterica.

Anche il « Department of scientific and industrial research » di Londra si è occupato della batteriologia dei pesci: Lumley, Piqué e Reay[4] hanno studiato quantitativamente l'infezione del muscolo, della pelle e dell'intestino fin dal momento nel quale il pesce usciva dal mare per vedere con quali metodi di conservazione fosse più facile arginare l'invasione batterica, e non hanno trascurato qualche osservazione sulle attività biochimiche che i microrganismi presenti, nel loro insieme, potevano esplicare sia sui terreni di coltura, sia sul pesce stesso mantenuto in ghiaccio; d'accordo con Harrison, Perry e Smith[5] e con Fellers[6] che hanno esaminato pesci catturati

(1) Lavoro eseguito nel *R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia* di Roma.

(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(3) Trevisanello C., *Intossicazioni da carni di pesce alterate.* Opera medica Wassermann. Milano, giugno 1930, n. 65.

(4) Lumley, Piqué e Reay, *The handling and stowage of white fish at sea* « Department of scient. and industr. Research. Food Investigation Board » Rep. n. 37, London, 1929.

(5) Harrison, Perry and Smith, *Bacteriology of Certain Sea Fish.* « Nat. Res. Council », Canadà, Rep. 19, 1926.

(6) Fellers, *Bacteriological investigation on raw salmon spoilage.* « University of Washington Publications on Fisheries », 1926, 1, n. 8.

in acque americane, essi hanno osservato un predominio degli *Achromobacter* e una certa resistenza del muscolo all'invasione batterica.

Savage [1] e i suoi collaboratori hanno esaminato pesce conservato e riportano tabelle con tutti i caratteri colturali, morfologici e biochimici delle specie microbiche riscontrate, molto varie, poichè trattandosi di materiale che aveva subìto numerose manipolazioni, le fonti d'inquinamento erano molte.

Ulrich, [2] esaminando nel 1906 muscolo di pesce, trovò una netta predominanza di protei e coli, microbi che effettivamente sono stati riscontrati abbondanti e caratteristici anche da Schleimer [3] negl' isolamenti eseguiti da muscolo di pesce di mare venduto sul mercato, pescato da qualche tempo e già invaso da batteri, da Reed [4] e Spence che hanno studiato la flora intestinale del « haddock » (*Gadus aeglefinus*).

Il prof. Brunelli ha desiderato che nel laboratorio da lui diretto venisse studiata la flora batterica di alcune specie di pesci comuni sui mercati italiani, e venissero paragonate le prime alterazioni della carne di pesce con quelle delle carni bovine, con speciale riferimento – oltre che alla parte puramente biologica – ai problemi della conservazione dei prodotti della pesca, affinchè questa venga effettuata nel modo più opportuno dal punto di vista della igiene alimentare.

Fin dalle prime indagini condotte nell'Istituto di Batteriologia della R. Università di Roma, osservai che l'attacco batterico della carne di pesce non poteva venire trattato in maniera perfettamente analoga a quella seguita da Tissier e Martelly [5] nel loro studio sulle putrefazioni delle carni di macelleria – cioè triturando una certa quantità di muscolo e lasciandola a una temperatura determinata in un pallone sterile in presenza di aria – in quanto che noi desideravamo pórci il più possibile nelle condizioni reali nelle quali il pesce viene a trovarsi prima di passare al consumatore. Naturalmente, per il pesce, bisognava distinguere il caso di quello a taglio, che è inquinato oltre che dai batteri delle acque da cui proviene, anche da quelli acquisiti dall'aria e nelle numerose manipolazioni, e nel quale il decorso della putrefazione deve essere diverso tanto da quello delle carni bovine, come da quello dei pesci meno soggetti a inquinamento una volta usciti dal loro ambiente. Questo era appunto l'altro caso da tener presente, quello cioè in cui il pesce di piccola taglia, e pescato in superficie o in piccola profondità,

(1) Savage, Hunwicke and Calder, *The bacteriology of canned meat and fish.* « Depart. of scient. and industr. Research. Food investigation Board », Rep. n. 11, London, 1922.

(2) Ulrich S., *Ueber den Bakteriengehalt des fischfleisches.* « Zeitschrift für Hygiene », Bd. 43, 1906.

(3) Schleimer P. C., *Bakteriologische Untersuchungen von fischfleisch mit besonderer Berücksichtigung der Frage der " Fischvergiftungen „* « Inaug. Dissert. », Giessen, 1921.

(4) Reed and Spence, *The intestinal and slime flora of the haddock.* « A preliminary report. Contrib. canad. Biol. e Fish », 4, 19, 1929.

(5) Tissier et Martelly, *Recherches sur la putréfaction de la viande de boucherie.* « Annales Inst. Pasteur », n. 12, 1902.

esce dalle reti perfettamente intatto, senza lesioni esterne, e – poichè dopo l'asfissia gli opercoli rimangono generalmente chiusi, e la squama è un'ottima protezione contro l'attacco centripeto – si poteva supporre che le prime alterazioni avvenissero essenzialmente per opera dei batteri che esso si porta dal mare.

Abbiamo cominciato con lo studiare la flora batterica di sardelle, triglie e merluzzi (piccoli e di piccola profondità) immediatamente dopo la pesca e dopo tempi fissati, sciegliendo gl' individui senza lesioni sulla pelle e con opercoli chiusi.

Il piano degli studi in corso comprende l'esame dei microrganismi che si riscontrano nel materiale fresco e durante le prime alterazioni, e l'indagine dei prodotti che essi elaborano a spese dei tessuti nel loro biochimismo; ma, data la vastità dell'argomento, abbiamo diviso il lavoro cominciando dalle osservazioni sugli aerobi, anche perchè questi costituiscono la flora delle carni non ancora putrefatte delle quali sono i primi aggressori, quelli che preparano, modificandone le proprietà chimiche, il substrato confacente allo sviluppo degli anaerobi.

Basandoci sui lavori già citati di Schleimer e del « Food Investigation Board » nei quali sono stati usati pei batteri dei pesci terreni comuni con buoni risultati, e su quello di Lloyd [1] che non li ha riscontrati inferiori a quelli preparati con acqua di mare proprio nello studio dei batteri del mare, abbiamo usato anche noi terreni comuni sebbene con speciali precauzioni.

Riferiremo in un lavoro più completo sulle particolarità della tecnica e sui singoli risultati delle ricerche compiute, e riporteremo in esso le tabelle delle specie isolate con le loro caratteristiche colturali, chimiche e morfologiche, limitandoci in questa breve nota ad accennare alle deduzioni d' indole generale che ci sembra di poter trarre da questa prima serie di esperimenti, e che ci serviranno di base per completare le nostre indagini.

Il materiale esaminato è stato preso dal Golfo di Napoli, fornito dalla Stazione Zoologica nei cui laboratori abbiamo eseguito gl' isolamenti da moltissimi individui di ognuna delle tre specie allo stato di perfetta freschezza, sia nel periodo estivo che nell'autunnale.

Le semine sono state compiute dal celoma, dalle branchie e dal muscolo, poichè tanto il celoma come le branchie presentano il massimo interesse come centri di propagazione dei microrganismi; nel celoma abbiamo riscontrato esclusivamente batteri e bacilli.

Anche nelle branchie predominano batteri mobili, insieme con pochi bacilli: muffe e colonie cromogene – se si toglie una colonia verde pallido presente con una certa frequenza – sono state trovate in così pochi individui e in così esigua quantità, che non ci sono sembrate da considerare

(1) Lloyd B., *Bacteria of the Clyde Sea Area: A quantitative investigation.* « Journ. of Mar. Biol. Ass. of. the Unit. Kingdom », 16, n. 3, 1930.

come caratteristiche dei filamenti branchiali. Tra le specie dotate di maggior attività sulle proteine e sugli zuccheri, abbondante e costante la presenza di colonie piuttosto piccole, simili a quelle dei coli, costituite da individui fusiformi, fluidificanti la gelatina in modo simile al *Vibrio cholerae*, producenti indolo in piccola quantità, coagulanti il latte (sebbene lentamente) e capaci di neutralizzare i terreni di Barsikow fino alla scomparsa della tinta ametista, ma non di acidificarli fino al viraggio al rosso del tornasole.

Questa specie, che potrebbe essere la stessa trovata da Russell (1) nel Golfo di Napoli dal quale il nostro materiale proviene, e da lui indicata col nome di *Spirillum marinum*, insieme con specie appartenenti ai protei e ai coli, costituisce la flora più caratteristica dei filamenti branchiali.

Riguardo al complesso delle differenze esistenti fra merluzzi, sarde e triglie, si può osservare che le sarde sono le più ricche di protei, e i merluzzi di germi fusiformi fluidificanti la gelatina ad imbuto; si possono anche osservare differenze individuali fra esemplari di una stessa specie provenienti da una medesima pescata, nel senso che in un esemplare può predominare una specie di colonie assente in un altro.

Abbastanza notevole la diversità riscontrata tra il materiale esaminato in estate (luglio–agosto) e quello nell'autunno–inverno (novembre–dicembre–gennaio–febbraio): durante l'estate, sempre nelle branchie, erano abbondantissime le colonie del *Bacterium vulgare* Hauser, con la loro caratteristica tendenza a dare patina diffusa sul terreno di coltura; già poche ore dopo che il pesce era uscito dal mare questi germi predominavano in modo tale da rendere difficile l'isolamento delle altre colonie, talvolta poco numerose e in alcuni esemplari di sardelle anche assenti: la massima abbondanza di *Bacterium vulgare* Hauser è stata notata appunto nelle sardelle.

Nell'autunno e nell'inverno, pur trovandosi dei protei, rilevabili anche mediante la semina su agar al fenolo, questa specie si riscontra raramente, mai nelle prime semine eseguite dopo la pesca, e sempre in esigua quantità.

Ci sembra anche interessante rilevare come gli stipiti di *Bacterium vulgare Hauser* provenienti dalle sardelle mostrino nettamente l'attivo biochimismo caratteristico della specie, sia sulle sostanze proteiche che sugl'idrati di carbonio, mentre gli stipiti provenienti da merluzzi e da triglie, pur possedendo le stesse proprietà, le manifestano alquanto attenuate.

Dagli esami condotti sul muscolo si è potuto constatare che questo può rimanere ancora sterile quando già la testa presenta i primi segni di alterazione: la invasione dei microrganismi avverrebbe o dalle branchie o centrifugamente dal celoma, come si può rilevare da semine con prelevamenti di materiale nella parte più superficiale e nella più profonda del muscolo; la regione caudale, la più lontana da questi centri d'irradiazione, è infatti l'ultima ad alterarsi.

(1) Russell H., *Untersuchungen über im Golf von Neapel lebende Bakterien.* « Zeitschrift für Hygiene und Infektionskrankheiten », XI, 1892.

Ci sembra di poter affermare che i primi invasori del muscolo siano coli, anzichè protei.

Ricordando quanto è stato trovato da Tissier e Martelly per le carni bovine, possiamo intanto notare che mentre in quelle il primo attacco delle proteine avviene soprattutto per opera di cocchi, nelle carni di pesce non tagliato la presenza dei cocchi in principio manca; e ciò perchè in tal caso il materiale subisce quasi esclusivamente l'invasione da parte dei microrganismi che si porta dal mare, dove, secondo i risultati di Fischer [1] riportati nella sua monografia, predominano i batteri, mentre streptococchi e sarcine sono assenti, almeno in mare aperto.

Nel Golfo di Napoli, sebbene si abbiano numerose fonti d'inquinamento dovute allo sbocco delle fognature, Sanfelice [2] non ha riscontrato mai microbi patogeni, e ha trovato che anche gli altri microrganismi trasportati rimangono in massima parte solo in vicinanza della costa.

Negl' isolamenti che abbiamo effettuati dai pesci non abbiamo riscontrato nessuna specie patogena, nè coli d'origine fecale, ciò che del resto va d'accordo con la limitata sopravvivenza nell'acqua di mare dei microbi del tifo e del colera, osservata dal De Giaxa e da molti altri autori, e col rapido scomparire dello stesso coli fecale, riscontrato dal Gabbano [3].

Dal punto di vista igienico si può osservare che il *Bacterium vulgare* Hauser è capace di determinare una degradazione delle proteine, con formazione di sostanze intermedie provviste di notevole tossicità; inoltre non è escluso che alcuni batteri presenti nei pesci, ingeriti dall'uomo, provochino talvolta una virulentazione della flora microbica intestinale, rendendosi così indirettamente responsabili dei disturbi che possono sopravvenire in seguito ad alimentazione con carne di pesce.

Durante le semine per gl' isolamenti da materiale non freschissimo abbiamo potuto notare che alcune piastre e tubi di brodo nei quali si era sviluppato l'insieme dei germi, oltre a svolgere odore di ammoniaca e di ammine e qualche volta di acido butirrico, mandavano un odore simile a quello del pesce in incipiente decomposizione: su ciò fermeremo ancora l'attenzione per indagare se – come abbiamo supposto – le sostanze graveolenti che si svolgono durante la putrefazione del pesce si debbano attribuire all'attività biochimica di microrganismi che esso si porta dal mare e che nelle altre carni non sono presenti, più che a una specificità di composizione chimica delle carni di pesce.

(1) Fischer B., *Die Bakterien des Meeres.* « Ergebnisse der Plankton-Expedition der Humboldt-Stiftung », Bd. IV, Kiel, 1894.

(2) Sanfelice F., *Ricerche batteriologiche delle acque del mare in vicinanza dello sbocco delle fognature e in lontananza da queste.* Estr. del « Boll. della Soc. dei Nat. in Napoli », 1889.

(3) Gabbano L., *Ricerche sull'estensione dell'inquinamento prodotto dallo sbocco in mare aperto di fogne di portata diversa.* « L'Igiene Moderna », n. 4, 1926.

Botanica (Morfologia vegetale). — *Sulla struttura delle gemme del gelso e del loro sviluppo*[1]. Nota II di Amelia Tonon, presentata[2] dal Corrisp. S. Baglioni.

Osservazioni sullo sviluppo dei germogli.

Il primo accenno alla ripresa dello sviluppo della gemma è dato dal turgore e dalla comparsa di piccole zone verdi in corrispondenza dei bordi delle perule esterne; zone che si estendono sempre più man mano che la gemma ingrossa. Le perule esterne cadono (vedasi tav. I), le incappucciantì si aprono e lasciano libera la parte intera della gemma, compaiono così gli apici delle foglie esterne già cresciute; i primi internodi si allungano e distanziano le prime infiorescenze e foglie, cadono tutte le perule incappucciantì e quelle delle prime foglie (vedasi tav. I). Il germoglio cresce rapidamente, le infiorescenze ingrandiscono e ingrossano, le foglie si sviluppano con rapidità (vedasi tav. II), le perule ingrandiscono poco, si assottigliano e finiscono col cadere, percui le gemme ascellari diventano visibili.

La crescita non è contemporanea e proporzionale in tutte le foglie; queste si possono dividere in due gruppi: l'esterno le cui foglie crescono rapidamente, l'interno le cui foglie crescono lentamente (vedasi tav. II e relativi diagrammi).

In un primo tempo non si ha la formazione, intorno all'apice, di nuovi abbozzi fogliari, perchè il numero delle foglie e abbozzi si aggira su quello della gemma ibernante; di tutti i germogli osservati solo quattro avevano, in questo primo periodo di sviluppo, più di 12 foglie e abbozzi, numero massimo trovato nella gemma ibernante, ed erano germogli apicali di rami. La maggior parte dei germogli aveva 10–12 foglie, (vedasi tav. II). Nei germogli, sviluppatesi dalle gemme ascellari, l'apice ad un certo momento si dissecca e cade e con esso cadono le foglioline del gruppo interno; di modo che il nuovo rametto porta 4–7 foglie (vedasi tav. II e relativi diagrammi). Ho fatta questa osservazione sui germogli di un gelso, in questo le gemme erano inturgidite intorno il 10 aprile e il 17 maggio gli apici vegetativi dei nuovi rametti erano già caduti avizziti. Ritengo però che tale fenomeno sia

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.
(2) Nella seduta del 1° febbraio 1931.

TABELLA I.

Numero degli elementi costituenti le gemme in isviluppo di un gelso.

(Aprile 1930).

Giorno di osservazione	Numero d'ordine delle gemme	PERULE				FOGLIE			Infiorescenze	Gemme ascellari	*Osservazioni*
		esterne	incappucciantì	interne	totale	grandi	piccole	totale			
10-IV-30	I	7	2	14	23	—	—	8	4	1	
»	II	6	2	20	28	—	—	10	4	4	
17-IV-30	III	2	2	13	17	—	—	9	5	5	
»	IV	—	2	14	16	—	—	6	5	4	
»	V	—	2	12	14	—	—	6	5	5	
»	VI	—	1	18	19	—	—	10	4	6	
»	VII	—	—	14	14	3	4	7	3	8	
»	VIII	—	—	24	24	4	8	12	5	7	
22-IV-30	IX	—	—	18	18	3	7	10	5	6	
»	X	—	—	14	14	3	5	8	2	7	
»	XI	—	—	14	14	5	3	8	3	7	
»	XII	—	—	18	18	4	5	9	3	8	
24-IV-30	XIII	—	—	28	28	8	9	17	—	11	germoglio dell'apice.
»	XIV	—	—	18	18	6	5	11	2	10	
»	XV	—	—	17	17	5	5	10	5	8	
25-IV-30	XVI	—	—	16	16	6	4	10	6	8	
28-IV-30	XVII	—	—	12	12	3	7	10	4	8	
»	XVIII	—	—	14	14	5	6	11	4	8	
»	XIX	—	—	16	16	5	6	11	2	10	
3-V-30	XX	—	—	12	12	8	4	12	—	10	
»	XXI	—	—	12	12	7	4	11	2	8	
»	XXII	—	—	8	8	6	3	9	5	7	
»	XXIII	—	—	10	10	5	4	9	—	6	

Segue: TABELLA I.

Numero degli elementi costituenti le gemme in isviluppo di un gelso.

(Aprile 1930).

Giorno di osservazione	Numero d'ordine delle gemme	PERULE				FOGLIE			Infiorescenze	Gemme ascellari	*Osservazioni*
		esterne	incappucciantì	interne	totale	grandi	piccole	totale			
5-V-30	XXIV	—	—	12	12	6	6	12	4	8	
»	XXV	—	—	14	14	7	5	12	3	9	
6-V-30	XXVI	—	—	12	12	5	5	10	5	7	
»	XXVII	—	—	10	10	5	5	10	5	7	
»	XXVIII	—	—	10	10	6	4	10	—	8	
13-V-30	XXIX	—	—	10	10	5	7	12	4	8	
»	XXX	—	—	12	12	5	7	12	1	10	
»	XXXI	—	—	12	12	5	7	12	1	11	
»	XXXII	—	—	10	10	6	6	12	4	10	
»	XXXIII	—	—	12	12	5	7	12	4	11	
»	XXXIV	—	—	12	12	5	7	12	3	11	
17-V-30	XXXV	—	—	—	—	6	—	6	4	6	apice secco
»	XXXVI	—	—	—	—	5	—	5	—	5	»
»	XXXVII	—	—	—	—	5	—	5	2	5	»
»	XXXVIII	—	—	12	12	7	8	15	4	11	germoglio dell'apice
19-V-30	XXXIX	—	—	—	—	4	—	4	3	4	apice secco
»	XL	—	—	—	—	4	—	4	3	4	»
»	XLI	—	—	—	—	6	—	6	1	6	»
»	XLII	—	—	—	—	5	—	5	5	5	»
»	XLIII	—	—	—	—	5	—	5	5	5	»
»	XLIV	—	—	—	20	8	8	16	3	11	germoglio dell'apice
»	XLV	—	—	—	20	10	8	18	—	13	»

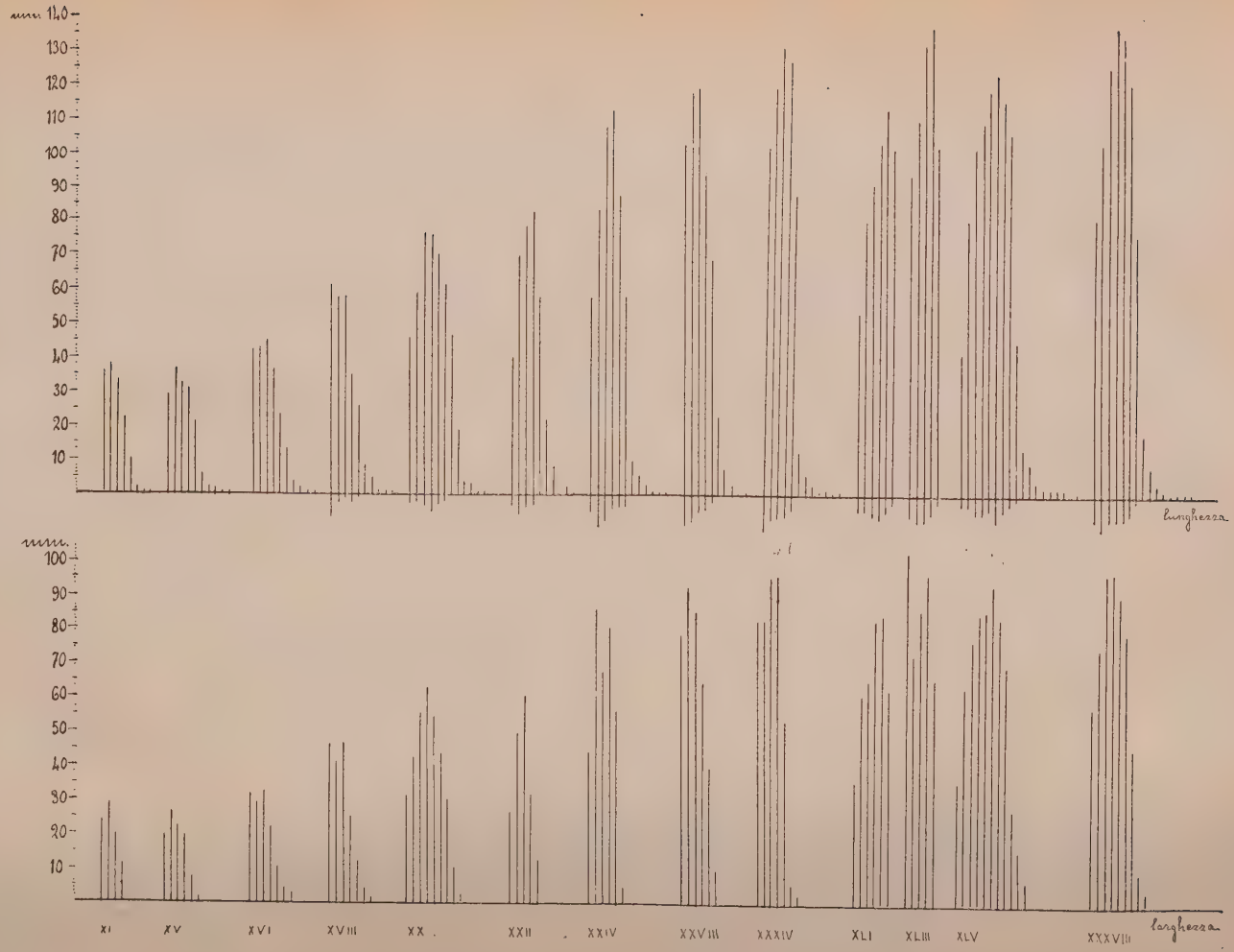
Lunghezza e larghezza in mm. delle foglie in is
(apr

Data dell'osservazione	Numero d'ordine delle gemme	(esterne)							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	
22–IV	XI	36.0- 24.0	38.0- 29.0	33.0- 20.0	22.0- 11.5	10.0- —	2.0- —	1.0- —	1
»	XXI	35.0- 24.0	30.0- 21.5	23.5- 12.5	17.0- 7.0	8.0- —	4.5- —	3.0- —	1
24–IV	XXIII	25.0- 19.0	18.5- 14.0	30.0- 21.0	27.0- 19.0	27.0- 17.0	24.0–15.5	20.0–12.0	11
»	XIV	26.0- 21.5	29.0- 22.0	28.0- 22.0	25.0- 17.0	17.0- 9.5	13.5- 6.0	6.0- 2.0	4
»	XV	29.0- 20.0	36.5- 27.0	32.5- 22.5	31.0- 20.0	23.0- 8.0	6.0- 2.0	3.0- —	2
25–IV	XVI	42.5- 32.5	43.0- 30.0	45.0- 33.0	37.0- 22.0	24.0- 11.0	13.0- 5.0	5.0- 3.0	2
28–IV	XVII	43.5- 31.0	55.0- 42.5	57.5- 43.0	8.0- 3.5	4.0- —	3.0- —	2.0- —	1
»	XVIII	68.0- 47.0	61.0- 42.0	60.0- 47.5	38.0- 25.5	27.5- 12.5	9.0- 4.5	5.0- 2.0	2
»	XIX	69.5- 48.5	70.0- 49.0	65.0- 44.0	50.5- 30.0	31.0- 14.0	12.0- 6.5	7.0- 2.0	3
3-V	XX	49.0- 32.0	62.0- 42.5	80.0- 56.0	81.0- 63.0	73.0- 57.0	63.0-44.0	47.0–30.5	19
»	XXI	52.0- 35.0	59.5- 43.0	62.5- 45.0	60.0- 46.0	58.5- 45.0	42.5-25.0	23.0- 9.0	7
»	XXII	43.0- 27.0	76.0- 50.0	83.0- 61.0	87.0- 32.5	58.0- 13.0	22.0- 4.0	9.0- —	3
»	XXIII	44.0- 31.5	62.0- 55.0	76.0- 45.0	60.0- 42.0	40.0- 21.5	9.0- 4.0	3.0- —	2
5-V	XXIV	62.5- 45.0	93.5- 87.0	116.0- 70.0	118.0- 82.0	92.0- 60.0	62.0-34.0	10.0- 5.5	5
»	XXV	77.5- 54.0	105.0- 72.5	104.0- 74.5	107.0- 75.5	80.0- 52.5	56.0-31.5	14.0- 6.0	6
6-V	XXVI	78.5- 62.5	106.0- 77.5	100.5- 77.0	99.0- 66.0	52.0- 29.5	8.5- 4.0	3.0- —	2
»	XXVII	116.0- 81.5	111.0- 82.0	111.0- 77.5	89.0- 49.0	44.0- 22.0	8.5- 5.0	3.5- —	2
»	XXVIII	112.0- 79.0	126.0- 93.0	124.0- 86.0	100.0- 66.0	70.5- 40.0	23.0-10.0	8.0- —	3
13-V	XXIX	82.0- 54.0	112.0- 86.5	123.0- 87.0	129.0- 85.0	76.0- 43.0	9.0- 5.0	4.0- —	2
»	XXX	88.0- 60.0	103.5- 74.5	111.0- 84.0	120.5- 84.0	84.0- 53.0	14.5- 7.0	7.0- —	4
»	XXXI	83.0- 52.0	110.5- 76.0	123.0- 90.0	125.0- 90.0	96.0- 54.0	10.0- 5.0	6.0- 2.5	2
»	XXXII	68.0- 44.5	88.0- 62.0	121.0- 80.0	123.0- 85.0	118.0- 87.0	105.0-63.5	13.0- 5.5	4
»	XXXIII	87.5- 60.0	109.0- 77.0	123.0- 73.0	129.0- 90.0	115.0- 93.5	15.0- 6.0	7.0- 3.0	2
»	XXXIV	113.0- 83.5	126.0- 83.5	138.0- 96.0	134.5- 96.5	93.0- 54.0	13.0- 6.0	6.0- 3.0	2
17-V	XXXV	91.0- 65.0	103.0- 74.0	118.0- 89.0	123.0- 94.0	123.0- 93.0	115.0–64.0	—	
»	XXXVI	101.0–103.0	118.0- 73.0	140.0- 86.0	143.5- 97.0	105.0- 66.0	—	—	
»	XXXVII	101.0- 86.0	120.0- 74.0	138.0-101.0	132.0- 88.0	120.0- 70.0	—	—	
»	XXXVIII	88.0- 58.0	114.0- 75.0	133.0- 97.0	144.0- 97.0	141.0- 91.0	127.0–80.0	78.0-46.0	18
19–V	XXXIX	74.0- 53.0	90.0- 68.5	94.0- 71.0	108.0- 70.0	—	—	—	
»	XL	70.0- 47.5	86.0- 63.0	104.0- 73.0	111.0- 78.0	—	—	—	
»	XLI	58.0- 36.0	86.0- 61.0	98.0- 66.0	111.0- 83.5	118.0- 85.0	105.0–63.0	—	
»	XLII	72.5- 52.5	82.0- 56.0	98.0- 74.0	104.0- 71.5	108.0- 69.0	—	—	
»	XLIII	82.0- 59.0	97.0- 75.0	111.0- 79.0	131.0- 96.0	141.0- 84.0	—	—	
»	XLIV	94.0- 66.0	103.0- 75.0	118.0- 95.0	125.0- 99.0	130.0- 96.5	125.0-88.5	65.0–38.0	1
»	XLV	44.5- 36.0	85.0- 64.0	108.0- 77.5	115.0- 86.0	125.0- 86.5	131.5-94.0	121.0-84.0	10

mogli apicali e laterali di rami di un gelso.
30).

GLIE (abbozzi)

X	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.5	5.0- —	3.5- —	2.0- —	2.0- —	1.5- —	1.0- —	1.0- —	0.5- —	—
—	1.0- —	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—
2.0	3.0- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
3.0	2.0- —	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.5- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	0.5- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	—	—	—	—	—	—	—	—
—	1.5- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.5- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.0- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
—	1.5- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	4.0- —	2.0- —	1.5- —	1.0- —	1.0- —	0.5- —	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	5.0- 2.0	3.0- —	2.0- —	2.0- —	1.5- —	1.0- —	0.5- —	—	—
28.0	13.5-16.0	9.5- 7.0	4.0- —	2.0- —	2.0- —	1.5- —	1.0- —	1.0- —	0.5- —



Diagrammi costruiti con i dati della tabella II.

comune a tutti i gelsi e non sia dovuto a particolari condizioni del gelso da me osservato.

Sulla modalità di sviluppo del primo gruppo di foglie si osserva che, in un primo tempo, le foglie crescono in rapporto al loro ordine poi, generalmente, le prime restano più piccole e diventano più grandi o le mediane o le ultime del gruppo (vedasi tav. II e relativi diagrammi).

Concludendo. Nel germoglio, in un primo tempo, si sviluppano solo le foglie già formate nella relativa gemma e di queste solo quelle del gruppo esterno; in seguito, nei germogli apicali dei rami, si ha la formazione e lo sviluppo di nuove foglie e questo avviene quando le foglie della gemma hanno raggiunto, o quasi, il completo sviluppo; invece in quasi tutti i germogli laterali l'apice si avizzisce e il rametto porta sviluppate solo una parte, circa la metà, delle foglie preformate nella gemma.

Botanica (Patologia Vegetale). — *Per la lotta contro la « stretta » dei cereali.*[1] Nota di R. Perotti, presentata[2] dal Socio P. R. Pirotta.

I risultati di una serie di ricerche, da me condotte o dirette, per oltre tre anni consecutivi, sull'influenza esercitata dalla polvere di carbone somministrata al terreno, nei riguardi dello sviluppo della vegetazione, autorizzano a trarre alcune conclusioni che, sembranmi, possano essere di non piccolo valore nella prevenzione o nell'attenuazione dei danni arrecati dalla deficienza di acqua nel periodo critico della maturazione delle cariossidi dei cereali per l'insufficiente migrazione in esse dell'amido dalle foglie o dal culmo: fatto molto grave, noto con l'espressivo nome di « stretta », compromettente nel volgere di qualche giorno e irrimediabilmente l'entità del prodotto.

Tali ricerche furono occasionate, oltre che da alcune antiche osservazioni empiriche, dall'esame di alcuni prodotti messi in commercio a scopo antiparassitario o concimante risultati contenere il 50-75 per cento di carbone.

Volendosi controllare, in forma pura, i fenomeni riscontrati nell'applicazione di detti prodotti, si prescelse il carbone di legna o di ossa, per quanto possibile, finissimamente polverizzati.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia Vegetale del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa.

(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.

Una prima serie di indagini [1], mentre pose in evidenza che il carbone non possiede alcuna proprietà antimicrobica, ne dimostrò una favorevole azione sullo sviluppo di Schizomiceti, Eumiceti, Alghe e Fanerogame. Le attività microbiochimiche del terreno vegetale, sono, in genere, favorevolmente influenzate dal trattamento fatto ad esso subire con la polvere carboniosa.

Siffatto trattamento, che va eseguito, di norma, nelle proporzioni di Q.li 2–3 ad Ea., determinò, per il Frumento, il Mais, il Pomodoro ed altre Solanacee, un incremento, a volte ragguardevole, della produzione ed il miglioramento della sua qualità.

Imponendosi, pertanto, la ricerca del possibile meccanismo dei fenomeni e dei loro favorevoli risultati, una seconda serie di ricerche [2] stabilì che detta sostanza estremamente divisa, in confronto dei controlli determina:

una maggiore ritensione di umidità nel suolo;

un maggiore adsorbimento dei sali ammoniacali;

una minore dispersione di nitrati, per essere questi trattenuti nel maggior volume di liquido nutritivo interstiziale;

un evidente potere disintossicante nei riguardi dei materiali reflui della vita microrganica terricola, unitamente ad una maggiore attivazione di questa, rilevata dall'intensificazione dei suoi processi respiratori [3].

Fu inoltre constatato che l'azione dimostrata dal carbone si protraeva almeno per un anno successivo a quello della sua somministrazione.

Istruttivi sono i dati desunti dal quantitativo di acqua, fornita in volumi uguali (cm.c. 350), percolata attraverso tubi, contenenti ciascuno gr. 320 di terra in strato di cm. 20 con aggiunte varie di polvere di carbone:

controllo;		acqua percolata	cm.c.	255
id.		»	»	256
carbone	gr. 1	»	»	252
»	» 2	»	»	248
»	» 3	»	»	245
»	» 4	»	»	241
»	» 5	»	»	238
»	» 6	»	»	234
»	» 7	»	»	229
»	» 8	»	»	225

(1) R. Perotti e S. Adler, *Sull'impiego del carbone e di alcuni suoi preparati negli speciali riguardi fitopatologici.* « Boll. R. Istituto Sup. Agrario di Pisa », Ser. 2ª, vol III, 1927.

(2) R. Perotti e C. Ruso, *Studi concernenti l'azione del carbone sulla vegetazione.* II Memoria. « Boll. R. Istituto Superiore Agrario di Pisa », Ser. 2ª, vol. IV, 1928.

(3) R. Perotti e C. Ferretti, *L'azione del carbone sulla vegetazione.* III Memoria « Boll. R. Istituto Superiore Agrario di Pisa », Ser. 2ª, vol. VI, 1930.

Con l'aumento del contenuto del carbone, la terra quindi trattiene una proporzione sempre maggiore di acqua.

La mia attenzione si soffermò adunque in modo particolare sul fatto della maggiore capacità per l'acqua acquistata dal terreno per effetto del trattamento e delle possibili conseguenze di esso; il che implicava l'estensione delle prove di campo, per quantità e qualità, cioè, l'esperimento in più vasta scala su colture estive non irrigue e coincidenti con il periodo annuale della massima siccità.

Anzitutto, per quanto riguarda il Frumento, le coltivazioni, che in parcelle di mq. 7.50 avevano portato ad aumenti di prodotto di oltre il 700 per cento, estese a mq. 5000, *in ringrano*, e quindi in condizioni molto sfavorevoli, nelle quali sarebbe dovuto entrare in azione il potere disintossicante della sostanza, dettero il più soddisfacente aumento di prodotto del 30 per cento.

Per quanto riguarda il Mais, in colture su appezzamenti di mq. 1870 l'aumento del prodotto fu dal 5 al 33 per cento.

Ma ciò che più colpì nei risultati di queste colture a granella è l'aspetto e la qualità delle cariossidi, documentati dalle annesse fotografie (figure 1 e 2); molto diversi a seconda che esse provenissero da piante trattate, oppur non, con carbone, sì che, nel primo caso, *il grano è più turgido, nutrito e pesante* che non nel secondo.

Su patate in numerose parcelle di mq. 7.5 i risultati sono stati non meno buoni: aumento del prodotto di circa il 40 per cento [1].

Più interessanti ancora sono stati i risultati ottenuti con piante di Tabacco Kentuchy.

Nel 1929, somministrando Q.li 3 ad Ea. di polvere carboniosa in confronto di una ordinaria concimazione minerale di perfosfato e solfato potassico, su appezzamenti di circa mq. 1000, si ebbero questi pesi di prodotto secco rapportati ad Ea. [2]:

Controllo	Kg.	689.5
Carbone	»	958.5
Concimazione di perfosfato minerale e solfato potassico	»	1111.3

Nel 1930, sulla stessa coltura e su appezzamenti di ancora maggiore estensione, il peso fresco di 30 piante fu [3]:

(1) O. Verona e F. Villa, *Ancora sull'azione del carbone sulla vegetazione.* IV Memoria; in corso di pubblicazione.

(2) Bonuccelli G. e Cini V., *Azione del carbone sulle colture del Tabacco*, « Boll. R. Istituto Superiore Agrario di Pisa », Ser. 2ª, vol. VI, 1930.

(3) M. Monsacchi, *Azione del carbone sulle colture di Tabacco*; in corso di pubblicazione.

1	Controllo	kg. 27 —
2	Carbone (3 Q.li)	» 60.200
3	» (5 »)	» 49.500
4	Carbone (3 Q.li) + perfosfato azotato	» 59.300
5	Carbone (5 Q.li) + perfosfato azotato	» 65.050
6	Concimi minerali completi	» 59.150
7	Perfosfato azotato	» 50.450

Donde emerge che la favorevole azione esplicata dal carbone sulle colture di Tabacco, migliore in genere come in altri casi, per somministrazioni di Q.li 3 ad Ea., è evidente anche in presenza di concimi minerali ed anzi a volte superiore a quella esercitata da questi impiegati da soli.

Di più, prove di combustibilità della foglia, eseguite con appropriato metodo (Nuccorini) hanno permesso di rilevare che essa è superiore non soltanto a quella delle piante provenienti da terreno non trattato, ma anche di quelle ottenute da terreno concimato mineralmente.

Dal complesso di tutti questi risultati può dedursi che l'incorporamento di polvere molto fine di carbone allo strato di terreno pervaso dall'apparato radicale di clorofite di famiglie diverse, tra cui Graminacee, permette una minore dispersione di acqua dal suolo e di conseguenza una migliore utilizzazione della riserva alimentare di esse. Il fatto si è dimostrato evidente in condizioni siccitose naturali od anche artificialmente determinate mediante appositi ripari, ed in numero rilevante di casi, anzi si può dire con una certa costanza, sempre che il suolo non fosse stato già di per se stesso ben formato, ricco, umoso e, cioè, fresco. Le qualità già rilevate del prodotto in cariossidi confermano i reperti ottenuti sullo sviluppo erbaceo, sì che in definitiva, sembra, con fondamento, che un qualche indirizzo possa essere segnato dal trattamento del suolo con polvere di carbone nella lotta contro le complesse e gravi avversità dipendenti da difetto di acqua.

Botanica. — *Fattori eccitativi dell'accrescimento di neoplasmi vegetali da «B. tumefaciens»*. Nota di V. Rivera, presentata dal Corrisp. L. Petri.

Sara pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Le mico-batteriosi.* Nota di R. Perotti, presentata dal Socio P. R. Pirotta.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà alla Classe il triste annunzio della scomparsa del Socio Raffaele Nasini del quale rievoca brevemente la figura di scienziato, mettendo in luce in special modo i suoi meriti come pioniere della Chimica fisica.

Il Socio Marchiafava trae occasione della presentazione del trattato « Infezione malarica » per ricordare come nella prima edizione ebbe a collaboratore il Socio Bignami che commemora brevemente.

Il Presidente ringrazia il Socio Marchiafava anche per ciò che ha detto in memoria del Socio Bignami.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Marchiafava presenta in omaggio la 2ª edizione del trattato « Infezione malarica », con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia la seconda edizione del Trattato " *La infezione malarica* ", la cui prima edizione, pubblicata, or sono circa trent'anni, fu scritta da me e dal rimpianto Amico Bignami Socio Corrispondente dell'Accademia e vincitore di un premio Santoro.

« Si era d'accordo col mio valoroso collaboratore di fare una seconda edizione; ma sopravvenne la di lui lunghissima e triste malattia terminata con la morte, che fu per me di grandissimo cordoglio e una vera perdita per la scienza, cui egli ha lasciato notabili e duraturi contributi del suo sapere e della sua operosità, specialmente nel campo della etiologia e della patologia della malaria, com'è riconosciuto dagli scienziati in Italia e fuori. A conferma di ciò, e come omaggio alla memoria di Amico Bignami, mi permetto di riferire che in una Memoria sulla malaria pubblicata nel mese scorso (« Transactions of the R. Society of Tropical Medicine ecc. », Londra, marzo 1931) da un eminente malariologo inglese S. P. James, a proposito di un lavoro sulla malaria pubblicato da me e da Bignami nel 1892 e tradotto in inglese nel 1894, viene detto che « questo classico lavoro deve essere letto e riletto da tutti coloro che si occupano dello studio della malaria ».

« Dopo la morte di Amico Bignami avvenuta nel settembre 1929, io pensai che fosse quasi mio dovere di attuare il proposito maturato insieme di una seconda edizione del Trattato, e così, *vires ultra sortemque senectae*, mi misi al lavoro e mi riuscì di portarlo a fine. I fatti fondamentali, messi in luce dalle conquiste scientifiche della seconda metà del secolo scorso ed esposti nella prima edizione, sono rimasti. Si doveva per altro tener conto della letteratura sulla malariologia, senza esagerazione, divenuta enorme nel

tempo trascorso dalla prima edizione ad oggi e dei nuovi fatti esporre i più importanti e i più utili.

« Sento il dovere di ringraziare del valido aiuto ricevuto i colleghi prof. Alessio Nazari, il cui nome è associato al mio in questa seconda edizione, il dott. Giulio Raffaele della stazione sperimentale antimalarica Rockfeller e il prof. Piero Chiarini.

« La prima edizione ebbe fortuna e ciò è arra che altrettanto sia della seconda. Ma il compenso migliore al mio lavoro, che, mi sia lecito dirlo, non fu tenue, sarà che il libro torni gradito ed utile ai molti medici che prestano l'opera loro benefica, spesso salvatrice della vita nelle molte regioni d'Italia ancora desolate dal flagello della malaria, dal quale, per virtù nostra, devono essere liberate ».

Il Socio Bordoni a nome dell'Ass. Elettrotecn. Italiana presenta il volume del 35° Congresso di Trieste e ne parla brevemente.

L'Accademico Segretario Parravano presenta i libri giunti in dono segnalando il « Dizionario di Merceologia e di Chimica applicata » del prof. V. Villavecchia; il volume edito in occasione del II centenario della Royal Dublin Society; « Il Cancro nella patologia moderna » del prof. Roncali; tre fascicoli pubblicati dal Servizio Idrografico del Ministero dei Lavori Pubblici; il tomo IV degli « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici »; G. Tassinari, « Distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana ».

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Presenta quindi un plico suggellato pervenuto all'Accademia il 18 marzo u. s. da parte del Sig. R. Bendandi.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Presidente comunica che è giunta per l'inserzione nei « Rendiconti » una Nota del dott. Gerundo di Topeka Kansas, senza la consueta presentazione di alcun Socio. Si dà incarico di esaminarla ai Soci Marchiafava e Baglioni.

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci Corbino, Garbasso, Giorgi, Guidi, Lo Surdo, Parravano, Pirotta.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 aprile 1931

Agostini Angela. — Clenosporella dermatitidis n. sp. causa di dermatomicosi umana. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia ». Vol. II, 1930, pp. 93–101). Siena, 1931. 4°.

Annuario del R. Osservatorio Astrofisico di Catania. 1931. Catania, 1930. 8°, pp. 1–36.

Atti del Congresso internazionale dei Matematici. Bologna, 3–10 settembre 1928. Tomo IV. Bologna, Edit. Nicola Zanichelli, s. d. 8°, pp. 1–429.

Bartsch Paul. — New and old land shells from the islands of Luzon Philippinis. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°, pp. 1–9.

Bergamaschi Maria. — Una nuova malattia dei frutti del susino. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia ». Vol. II. 1930, pp. 89–91). Siena, 1931. 4°.

Burt Charles E. and Burt May Danheim. — The South American lizards in the collection of the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°, pp. 1–52.

Carta delle irrigazioni Lombarde, Piemontesi, Emiliane. (Ministero dei Lavori Pubblici. Servizio Idrografico). Roma, 1929, 1930. 4°, pp. 1–79, 1–47, 1–99.

Cassinis Gino. — Federico Guarducci (Estr. dal Bollettino del Com. naz. Italiano per la Geodesia e la Geofisica », serie II, Anno I, marzo 1931), s. l. 1931. 8°, pp. 1–4.

Catalogo Astrofotografico internazionale del R. Osservatorio astrofisico di Catania. Vol. VIII, Parti VII–VII. Catania, 1930. 4°, pp. 1–151.

Chittenden F. H. — New species of North American Weevils of the Genus Liscus. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 126.

Delitala Giuseppe. — La formula generale ossia l'ideale del triangolo rettangolo. Sassari, 1931. 8°, pp. 1–9.

Dobell Clifford. — Researches on the intestinal Protozoa of Monkeys and Man, IV. – An esperimental Study of the Histolytica–like species of Entamoeba Living naturally in Macaques. (From « Parasitology ». Vol. XXIII). Cambridge, 1931. 8°, pp. 1–72.

Favaro G. A. — L'attività del sole nell'anno 1930. (R. Osservatorio Astrofisico di Catania). Catania, 1931. 8°, pp. 1–15.

Ferrari Angelo. — Un nuovo metodo per la colorazione del micelio. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia ». Vol. II, 1930, pp. 81–87). Siena, 1931. 4°.

Gilmore Charles W. — On Dinosaurian reptiles from the two medicine formation of Montana. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1–10.

Grabinski Giuseppe. — Cenni storici della Società Agraria di Bologna dalla sua istituzione nell'anno 1807 fino all'anno 1930. (Estr. dal volume « Accademie e Società agrarie Italiane »). Firenze, 1930. 8°, pp. 1–71.

Guidi Ciro. — Il sifone ed una sua applicazione irrigua. Inaugurazione avvenuta

il 31 gennaio 1931-IX celabrandosi la festa degli Alberi per le Scuole medie superiori di Cagliari. Cagliari, 1931. 8°, pp. 1-16.

Högberg Olaf. — Déduction rationelle de la loi de gravitation et solution du problème del n-corpo. – La dynamique planétaire et satellitaire réduite en général a une solution simple et rationelle. Paris, 1930. 8°, pp. 1-97.

Janet Charles. — Considerations sur la structure du noyau de l'Atome. Beauvais, 1929. 8°, pp. 1-43.

Laue (von) M. — Die Lichtfortpflanzung in Räumen mit zeitlich veränderlicher Krümmung nach der allgemeinen Relativitätstheorie (Sonderabd. aus den « Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften » Phys.-Math. Klasse. 1931). Berlin. 1931. 8°, pp. 1-11.

Laue (von) M. — Diffraction of an electron-wave at a single layer of atoms. (Reprinted from the «Review». Vol. XXXVII, 1931, pp. 57-59) s. l. 1931. 8°.

Lockyer William J. S. — The spectrum of H. D. 20336 in Camelopardalis (sp. Type B3ncη) throughout a complete Cycle (1925–1930). (Reprint. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCI, pp. 215-26). Edinburgh, 1930. 8°.

Lokyer William J. S. — Two new Bright-hydrogen-line B5-type Stars. (Reprint. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCI, pp. 187-191). Edinburgh, 1930. 8°.

Mannuzzi Arturo. — Sulla posizione sistematica dei dermatomiceti. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia ». Vol. II, 1930, pp. 103-110). Siena, 1931. 4°.

Menozzi Carlo. — Insetti dannosi alla barbabietola. Genova, 1930. 8°, pp. 1-98.

Mitchell S. A. — Heights in the chromosphere frome eclipse spectra. (Reprinted from the «Proceedings of the American Philosophical Society ». Vol. LXIX, pp. 433-439). Lancaster, 1930, 8°.

Pierce Dwight W. — Studies of the North American weevils beloning to the superfamily Platystomoidea (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-5.

Ricchello Antonio. — I diversi tipi di melasso negli esperimenti di attrazione per il « Dacus » eseguiti in Ascea (Salerno) nel 1930. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. III, 1930, pp. 283-301). Spoleto, 1931. 8°,

Roncali Demetrio B. — Il cancro nella patologia moderna. Napoli, 1930. 4°, pp. 1-607.

Royal Dublin Society. Bi-Centenary. Souvenir, 1731-1931. Dublin, 1931. 4°, pp. 1-72.

Taffara Luigi. — Il nuovo pianeta ultranettuniano « Plutone » fotografato nel R. Osservatorio Astrofisico di Catania. (Estr. dalle « Memorie della Società astronomica Italiana ». Vol. V, n. 2). Pavia, 1930. 8°, pp. 1-8.

Tassinari Giuseppe. — La distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana. Piacenza, 1931. 8°, pp. 1-298.

Toscano S. A. — Considerazioni generali sulla teoria elementare dei numeri nel campo intero (Estr. dalla « Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali ». Anno V). Napoli, 1931. 8°, pp. 1-24.

Villavecchia G. Vittorio. — Dizionario di merceologia e di chimica applicata. Vol. III. Naftalina-Seme. Milano, Edit. Ulrico Hoepli, 1931. 8°, pp. 1-1044.

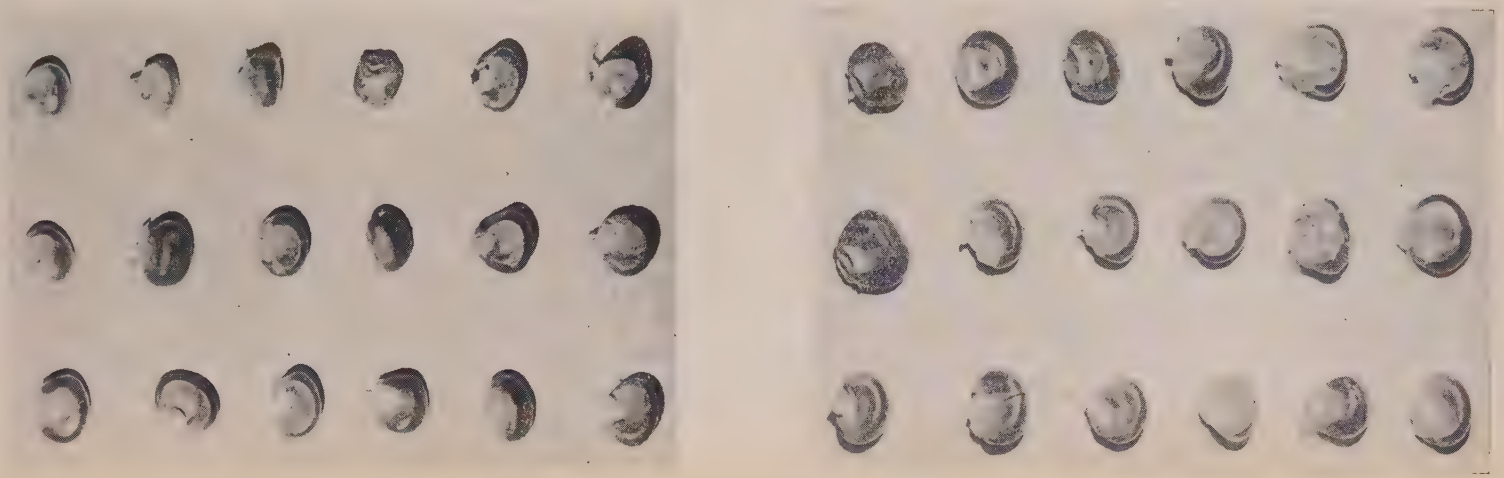
Vyssotsky Alexander. — On the luminosity of the companion of Sirius. (Reprinted. from the « Publications of the Astronomical Society of the Pacific ». Vol. XLII, pp. 155-163), s. l. 1930. 8°.

Webber R. T. — A revision of the North American tachinid flies of the genus Achaetoneura (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1930. 8°, pp. 1-37.

N. P.

a *b*

Fig. 1. - Cariossidi di Frumento che hanno subito la « stretta » (*a*) ed altre ottenute da piante trattate con carbone pulverulento (*b*).



a *b*

Fig. 2. - Cariossidi di Mais che hanno subito la « stretta » (*a*) ed altre ottenute da piante trattate con carbone pulverulento (*b*).

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 26 aprile 1931 (anno IX)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sopra uno speciale operatore lineare.* Nota [1] del Socio S. PINCHERLE.

1. Colle minuscole latine verranno indicati numeri reali o complessi. Una successione formata sia da un numero finito, sia da una infinità numerabile di numeri $c_0, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ verrà indicata con (c_n). Diremo (G) un campo numerico definito come segue: a (G) appartengono anzitutto le (c_n) contenenti un numero finito di numeri; inoltre, tutte quelle (c_n) contenenti infiniti numeri, per le quali sia soddisfatta una certa proprietà Γ, per ora non altrimenti specificata, ma tale che se le successioni (c_n) e (c'_n), ammettono questa proprietà, la ammettano necessariamente le successioni $(c_n + c'_n)$ e $(c_n c'_n)$, ed ogni successione estratta da (c_n); ed infine, se (c_n) ammette la proprietà Γ, la ammetta ogni successione ottenuta aggiungendo a (c_n) o togliendo da (c_n) un numero qualsiasi finito di numeri.

Ad esempio, essendo i c_n numeri reali, la proprietà Γ può consistere nell'essere la serie $\sum c_n^2$ convergente; essendo i c_n numeri reali o complessi, la proprietà Γ può consistere nell'avere la serie di potenze $\sum c_n z^n$ un raggio non nullo di convergenza; può consistere nell'avere la stessa serie un raggio infinito di convergenza, ecc.

2. Sia $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \cdots$ una successione di vettori, pei quali sia definita nel modo usuale l'uguaglianza, la somma e la moltiplicazione per un

(1) Presentata nella seduta del 26 aprile 1931.

numero. Si esclude che la somma di un numero finito di termini $\sum c_n \varepsilon_n$ possa rappresentare il vettore nullo. Ogni tale somma $\sum c_n \varepsilon_n$ dà un vettore in uno spazio ad infinite dimensioni, spazio di cui il sistema $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots$ si può dire la *base*: amplieremo ora questo spazio aggiungendovi il vettore nullo e le somme $\sum c_n \varepsilon_n$ di un numero infinito di termini, sotto alla condizione che (c_n) appartenga all'insieme numerico (G): escludendosi ancora che una simile somma possa rappresentare al vettore nullo. Lo spazio vettoriale così ottenuto, manifestamente lineare per la proprietà di (G), verrà indicato con (S). Gli elementi (vettori) di (S) si denoteranno colle minuscole greche.

3. Prendiamo a considerare un operatore lineare, che diremo Q, il quale agisce sugli elementi di (S), e che viene definito dalle relazioni

$$(1) \qquad Q(\varepsilon_0) = 0\,,\ Q(\varepsilon_1) = k_1 \varepsilon_0\,,\ Q(\varepsilon_2) = k_2 \varepsilon_1\,,\ \cdots\ Q(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_{n-1}\,,\ \cdots$$

che ne forniscono la matrice. Si intenda che i numeri k_n, tutti diversi da zero, costituiscano un elemento (k_n) di (G).

L'operatore Q, applicato ad un elemento $\varphi = \sum_{n=0} c_n \varepsilon_n$ di (S), dà come risultato

$$Q(\varphi) = \sum c_n k_n \varepsilon_{n-1}$$

e questo, per le proprietà di (G), è ancora un elemento di (S): l'operatore muta dunque lo spazio (S) in sè.

4. Si risolvono molto facilmente varie questioni elementari sull'operatore così definito. Dapprima, si può cercare se per esso esistano elementi invarianti (o autoelementi), cioè vettori φ tali che sia

$$(2) \qquad Q(\varphi) = h\varphi\,.$$

Posto $\varphi = \sum_{n=0} c_n \varepsilon_n$, si sostituisca in (2): verrà

$$\sum_{n=1} c_n k_n \varepsilon_{n-1} = h \sum_{n=0} c_n \varepsilon_n$$

e poichè rimane escluso che possa passare, entro (S), una relazione lineare fra le ε_n, ne verrà che i coefficienti delle ε_n nei due membri devono essere uguali, ciascuno a ciascuno, e si ha pertanto:

$$c_1 k_1 = h c_0\,,\ c_2 k_2 = h c_1\,,\ \cdots\ c_n k_n = h c_{n-1}\,,\ \cdots\,,$$

onde si ricava:

$$c_n = c_0 \frac{h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n}\,.$$

La soluzione formale di (2) è dunque data, all'inferiori di un moltiplicatore numerico arbitrario, da

$$(3) \qquad \varphi = \sum_{n=0} \frac{h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n}, \qquad (k_0 = 1),$$

e questa soluzione formale esisterà effettivamente in (S) se la successione $\left(\frac{h^n}{k_1 \cdots k_n}\right)$ dei coefficienti apparterrà al campo numerico (G): la validità dipenderà dunque, come è naturale, dalle ipotesi che entreranno nella definizione di Γ.

5. In secondo luogo, sia proposta l'equazione (di tipo Fredholm)

$$(4) \qquad Q(\varphi) - h\varphi = \alpha,$$

dove α è un vettore dato di (S) e φ un vettore da determinarsi. Posto

$$\alpha = \sum_{n=0} a_n \varepsilon_n, \qquad \varphi = \sum_{n=0} c_n \varepsilon_n,$$

viene, per l'osservazione già fatta al numero precedente, il sistema di relazioni fra i coefficienti:

$$c_1 k_1 - c_0 h = a_0, \; c_2 k_2 - c_1 h = a_1, \; \cdots \; c_n k_n - c_{n-1} h = a_{n-1}, \; \cdots$$

e da queste, con ovvio procedimento, si deduce

$$\frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{h^n} c_n = c_0 + \frac{a_0}{h} + \frac{a_1 k_1}{h^2} + \cdots + \frac{a_{n-1} k_1 k_2 \cdots k_{n-1}}{h^n};$$

la soluzione è dunque data formalmente dallo sviluppo

$$(5) \qquad \varphi = \sum \frac{h^{n-1}}{k_1 k_2 \cdots k_n} \left(a_0 + \frac{a_1 k_1}{h} + \frac{a_2 k_2}{h^2} + \cdots + \frac{a_{n-1} k_{n-1}}{h^{n-1}} \right) \varepsilon_n$$

cui va aggiunto la soluzione generale della (2)

$$(6) \qquad c_0 \sum \frac{h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n} \varepsilon_n$$

dove c_0 è un moltiplicatore arbitrario. Il problema ammette dunque infinite soluzioni qualunque sia h, soluzioni differenti fra loro per un vettore (6); e la soluzione sarà effettiva qualora i coefficienti appartengano a (G), ripetendosi qui l'osservazione fatta alla fine del numero precedente.

6. Sia B un operatore lineare agente su (S); esso sia dato dalla sua matrice, che risulta dalle

$$B(\varepsilon_n) = b_{n0}\varepsilon_0 + b_{n1}\varepsilon_1 + \cdots + b_{n\nu}\varepsilon_\nu + \cdots, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

dove le successioni $(b_{n\nu})$ sono elementi del campo numerico (G).

L'operatore $QB - BQ$, il quale è zero se B è permutabile con Q, si dica, quando B non sia tale, *scarto di* B *dalla permutabilità rispetto a* Q. Si porrà, per brevità,

$$B' = QB - BQ.$$

Questo B' è un operatore di cui è facile scrivere la matrice; si ha infatti:

$$B'(\varepsilon_0) = (QB - BQ)(\varepsilon_0) = QB(\varepsilon_0) = b_{01}k_1\varepsilon_0 + b_{02}k_2\varepsilon_1 + \cdots + b_{0\nu}k_\nu\varepsilon_{\nu-1} + \cdots,$$

e, per $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$B'(\varepsilon_n) = (b_{n1}k_1 - b_{n-1,0}k_n)\varepsilon_0 + (b_{n2}k_2 - b_{n-1,1}k_n)\varepsilon_1 + \cdots + (b_{n\nu}k_\nu - b_{n-1,\nu-1}k_n)\varepsilon_{\nu-1} + \cdots;$$

la matrice di B' è dunque

$$(7) \qquad \left\| \begin{array}{lllll} b_{01}k_1 & b_{02}k_2 & b_{03}k_3 & b_{04}k_4 & \cdots \\ (b_{11} - b_{00})k_1 & b_{12}k_2 - b_{01}k_1 & b_{13}k_3 - b_{02}k_1 & b_{14}k_4 - b_{03}k_1 & \cdots \\ b_{21}k_1 - b_{10}k_1 & (b_{22} - b_{11})k_2 & b_{23}k_3 - b_{12}k_2 & b_{24}k_4 - b_{13}k_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\|$$

7. La considerazione dello scarto B' permette di rispondere ad alcune questioni non prive d'interesse.

Si chieda dapprima quale forma abbia la matrice di un operatore generico permutabile con Q. La matrice (7) dovrà, in questo caso, ridursi identicamente a zero, e perciò, i numeri k_n essendo supposti essenzialmente diversi da zero, si deduce: 1°) dalla prima linea di (7), che devono essere nulli i coefficienti $b_{01}, b_{02}, \cdots b_{0n}, \cdots$; 2°) che sono arbitrarî i numeri $b_{00}, b_{10}, b_{20}, \cdots$, che indicheremo perciò semplicemente con $b_0, b_1, b_2, \cdots$; 3°) che è $b_{11} = b_{00}$, $b_{22} = b_{11}, \cdots$, in generale dunque, $b_{nn} = b_0$; 4°) che è $b_{n\nu} = 0$ per $\nu > n$; 5°) che è, per $\nu < n$, $b_{n\nu} = b_{n-1,\nu-1}\dfrac{k_n}{k_\nu}$, onde si deduce

$$b_{n\nu} = b_{n-\nu}\frac{k_n k_{n-1}\cdots k_{n-\nu+1}}{k_1 k_2 \cdots k_\nu}.$$

La matrice di un qualsiasi operatore permutabile con Q è pertanto:

$$(8)\qquad \left\| \begin{array}{cccccc} b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_2 & b_1\frac{k_2}{k_1} & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_3 & b_2\frac{k_3}{k_1} & b_1\frac{k_3 k_1}{k_1 k_2} & b_0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\|$$

dove, come si è avvertito, $b_0, b_1, b_2, \cdots$ sono numeri arbitrarî.

È da notarsi l'anologia del sistema dei coefficienti delle b_n col triangolo dei numeri figurati (o di Tartaglia) al quale esso si riduce nel caso di $k_n = n$. Dalla (8) si verifica facilmente che se due operatori B, C sono permutabili con A, sono permutabili fra loro.

8. Un'altra questione cui si risponde facilmente per mezzo della matrice (7) è la seguente: « Quale è la forma di un operatore B di cui lo scarto rispetto a Q sia permutabile con Q, o, in altri termini, di cui sia nullo *lo scarto dello scarto*? ». Qualora si sia ottenuto un operatore dotato di questa proprietà, si può, con ovvio procedimento, determinare tutti gli altri; basterà quindi ricercare, fra questi, quello che ammette, come scarto rispetto a Q, il più semplice dei permutabili, vale a dire l'operatore unità. L'operatore così cercato, che diremo U, è dunque definito da

$$QU - UQ = 1.$$

Posto

$$U(\varepsilon_n) = u_{n0}\varepsilon_0 + u_{n1}\varepsilon_1 + \cdots + u_{nv}\varepsilon_v + \cdots,$$

i coefficienti u_{nv} si determineranno dalla condizioni che la matrice (7), da essi dedotta, venga a coincidere colla matrice unitaria: vi saranno però fra questi coefficienti alcuni elementi arbitrarî, di cui potremo disporre in modo da dare ad U la forma il più possibilmente semplice.

Facendo dunque coincidere la (7), dedotta dagli u_{nv}, colla matrice unitaria, avremo, per gli elementi della diagonale principale di (7):

$$u_{01}k_1 = 1 \quad , \quad u_{1\cdot 2}\,k_2 - u_{01}k_1 = 1\,, \cdots \quad , \quad u_{n-1\cdot n}k_n - u_{n-2\cdot n-1}k_{n-1} = 1\,, \cdots$$

da cui

$$u_{01} = \frac{1}{k_1}\,,\ u_{1\cdot 2} = \frac{2}{k_2}\,,\ \cdots u_{n-1\cdot n} = \frac{n}{k_n}\,,\ \cdots$$

Poi, dalla prima linea di (7), si ha

$$u_{0n} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots),$$

e da queste, per essere, per $\nu \neq n+1$,

$$u_{n\nu} k_\nu - u_{n-1,\nu-1} k_n = 0, \tag{10}$$

segue $u_{n\nu} = 0$ per $\nu > n+1$.

Dalla prima parallela sinistra della diagonale principale, si ha $u_{n,n} = u_{n-1,n-1}$; potendosi fare $u_{0,0} = 1$ per l'arbitrarietà di questo elemento, segue $u_{n,n} = 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Infine, è ancora vera la (10) per $\nu < n$; quindi potendosi porre $u_{n0} = 0$ per l'arbitrarietà di questo elemento, seguirà $u_{n\nu} = 0$ per $\nu < n$. Con ciò si è ottenuto un operatore soddisfacente alla (9), e la sua matrice è

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 1 & \frac{2}{k_2} & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k_3} & 0 \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\| \tag{11}$$

10. Definito, come al n. 6, lo scarto B′ dalla permutabilità rispetto a Q di un operatore B, si vede subito come l'operazione di scarto, essendo B e C due operatori lineari qualsiansi, verifichi le relazioni

$$(B + C)' = B' + C' \tag{12}$$

e

$$(BC)' = B'C + BC', \tag{13}$$

proprietà estensibili al caso di tre o più operatori. È notevole l'analogia della (13) colla regola di derivazione di un prodotto, l'operazione di derivazione essendo qui sostituita da quella di scarto.

Definito lo scarto rispetto a Q, si può definire lo scarto secondo:

$$B'' = QB' - B'Q = Q^2 B - 2QBQ + BQ^2,$$

quindi lo scarto terzo, $\cdots$, m^{simo}, per il quale si stabilisce facilmente la formula:

$$B^{(m)} = Q^m B - m Q^{m-1} BQ + \binom{m}{2} Q^{m-2} BQ^2 - \cdots + (-1)^m BQ^m. \tag{14}$$

L'operatore U, definito al n. 8, soddisfa alla condizione $U'' = 0$. È facile vedere che, indicando colla lettera P, affetta o no da indici, gli operatori permutabili con O, la soluzione generale di $B'' = 0$ è data da $PU + P_1$.

11. Dalla (13) si deducono altre conseguenze degne di nota. Prendendo in (13) gli scarti successivi, si ha la formula, analoga a quella di Leibniz:

$$(15)\qquad (BC)^{(m)} = B^{(m)}C + m\,B^{(m-1)}C' + \binom{m}{2} B^{(m-2)}C' + \cdots + BC^{(m)}$$

che si dimostra agevolmente per induzione. Si ha, in particolare:

$$(BP)^{(m)} = B^{(m)}P;$$

gli operatori permutabili con Q si comportano dunque come le costanti nella derivazione ordinaria.

Dalla (13) si deduce pure

$$(B^2)' = B'B + BB',$$

ed in generale:

$$(16)\qquad (B^m)' = B'B^{m-1} + BB'B^{m-2} + B^2B'B^{m-3} + \cdots + B^{m-1}B'.$$

Questa ultima formula, applicata all'operatore U, dà, poichè $U' = 1$:

$$(17)\qquad (U^m)' = mU^{m-1},$$

la quale mostra che l'operatore U si comporta, rispetto all'operazione di scarto, come la variabile indipendente x di fronte alla derivazione rispetto ad x. Lo scarto di un operatore della forma

$$(18)\qquad P_0U^m + P_1U^{m-1} + \cdots + P_{m-1}U + P_m$$

sarà dunque

$$m\,P_0U^{m-1} + (m-1)\,P_1U^{m-2} + \cdots + P_{m-1}.$$

Infine, risulta dalla (17) che è

$$(U^m)'' = m(m-1)U^{m-2}, \cdots (U^m)^{(m)} = m!\,, (U^m)^{(m+1)} = 0,$$

e quindi l'operatore (18) rappresenta la soluzione generale dell'equazione $B^{(m+1)} = 0$.

12. Assumendo come base di uno spazio (S) la successione $1, x, x^2, \cdots$ delle potenze (nulla e) intere positive di una variabile x, e come elementi di (S) i polinomi interi e le serie di potenze della x a raggio di convergenza non nullo, la teoria precedente trova riscontro assumendo per operatore Q il simbolo D di derivazione. In questo caso, è $k_n = n$. L'operatore U è dato, per la matrice (10), da

$$U(1) = 1 + x, U(x) = x + x^2, \cdots, U(x^n) = x^n + x^{n+1}, \cdots$$

in guisa che è $U(\varphi) = (1 + x)\varphi$.

Dalla (8) si ricava, per gli operatori permutabili con D:

$$P(1) = b_0, P(x) = b_1 + b_0 x, \cdots,$$

$$P(x^n) = b_n + n b_{n-1} x + \binom{n}{2} b_{n-2} x^2 + \cdots + b_0 x^n, \cdots;$$

essi sono i ben noti polinomi di Appell formati colla successione (b_n); pertanto [1] ogni P è esprimibile mediante una serie di potenze di D, a coefficienti costanti.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Formalismo matematico in uno spazio funzionale continuo retto da un elemento lineare di seconda specie.* Nota di F. Conforto, presentata [2] dal Socio V. Volterra.

§ 1. In questa Nota io do una estensione completa di tutta la parte formale del Calcolo Differenziale Assoluto nel caso di uno spazio funzionale continuo, la cui metrica è data da un elemento lineare di seconda specie [3]. Il Moisil, nei lavori citati, ha già indicato la più opportuna definizione per la trasformazione di covarianza e controvarianza in alcuni casi. Io espongo la cosa, come ho detto, nel modo più generale, generalizzando, per la forma dell'elemento lineare, che io ho scelto, e che, a vero dire, è un poco meno generale di quella scelta dal Moisil, tutte le operazioni formali, quali trasformazioni per covarianza e contravarianza, elevamento ed abbassamento degli indici, ecc. [4].

(1) V. Pincherle e Amaldi, *Operazioni distributive*, cap. VII (Bologna, Zanichelli, 1907).

(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(3) Io ho introdotto questa denominazione nella Nota *Parallelismo negli spazi funzionali continui* (cfr. « Rend. Acc. Lincei », ser. 6ª, v. XIII, 1º sem., fasc. 3) febbraio 1931. Questa denominazione si trova però già nei lavori del Moisil, fra i quali citiamo come più attinenti al nostro soggetto: *Sur les variétés fonctionnelles*, « Comptes-Rendus de l'Academie des Sciences », t. 187, p. 796, 5 novembre 1928, e: *La mécanique analitique des systèmes continus*, Thèses présentées a la faculté de Sciences de Bucarest (Paris, Gautier-Villars, 1928).

(4) Segnalo qui un risultato che si può stabilire direttamente dal confronto della equazione integro differenziale, che io ho dato nelle mie due Note precedenti per le linee autoparallele con l'equazione data dal Moisil nel suo primo lavoro sopra citato per le linee geodetiche in una varietà funzionale. Il risultato è questo: Ancora in uno spazio funzionale coincidono linee geodetiche e linee autoparallele.

§ 2. Per comodità formale io introduco (1) una funzione di due variabili $\delta(xy)$ la quale gode delle seguenti proprietà:

I – $\delta(xy)$ è nulla per ogni coppia di valori tali che $x \neq y$. Non è definita per $x = y$. Si ha per $x \neq y$

$$\delta(xy) = \delta(yx).$$

II – Si dà invece un significato alla espressione $\int_0^1 \delta(xy)\,dx$. Sarà precisamente:

$$\int_0^1 \delta(xy)\,dx = \int_0^1 \delta(yx)\,dx = \int_0^1 \delta(xy)\,dy = \int_0^1 \delta(yx)\,dy = 1.$$

III – Se $F(x)$ è una funzione definita tra 0 e 1, come abbiamo sempre supposto, sarà:

$$\int_0^1 F(x)\,\delta(xy)\,dx = F(y).$$

IV – Si porrà ancora:

$$\int_0^1 \delta(xy_1)\,\delta(xy_2)\,dx = \delta(y_1 y_2)$$

e

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{(n)} \delta(y_1 x_1)\,\delta(x_1 x_2) \cdots \delta(x_{n-1} x_n)\,\delta(x_n y_2)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n = \delta(y_1 y_2).$$

Se allora per la funzione $\delta(xy)$ si stabiliscono valide le solite regole, ne viene:

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{(n)} \delta(y_1 x_1)\,\delta(y_2 x_2) \cdots \delta(y_n x_n)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n = 1$$

(1) Osservo che tutti gli sviluppi di questa Nota si potrebbero stabilire senza fare ricorso a una tale funzione. Comunque la funzione $\delta(xy)$ si può immaginare come il limite di funzioni di tipo noto. Precisamente si ha:

$$\lim_{h \to \infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-y)^2} = \delta(xy).$$

Partendo da questa definizione si possono dimostrare tutte le proprietà elencate, il che le giustifica.

e

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{(n)} F(x_1 x_2 \cdots x_n)\, \delta(y_1 x_1)\, \delta(y_2 x_2) \cdots \delta(y_n x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = F y_1 y_2 \cdots y_n).$$

Con l'introduzione della funzione $\delta(xy)$ la formola:

$$ds^2 = \int_0^1 [\delta q(\sigma)]^2\, d\sigma + \int_0^1 \int_0^1 a\,[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi_1\, \xi_2]\, \delta q(\xi_1)\, \delta q(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

che dava l'espressione di un elemento lineare di seconda specie, si scriverà:

$$\alpha) \qquad ds^2 = \int_0^1 \int_0^1 \{a\,[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi_1\, \xi_2] + \delta(\xi_1\, \xi_2)\}\, \delta q(\xi_1)\, \delta q(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 .$$

§ 3. Ciò posto sia data una varietà funzionale, il cui punto generico sia $q(x)$. Mediante la relazione

$$(1) \qquad y(\lambda) = Q[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \lambda]$$

e la inversa

$$(2) \qquad q(\mu) = Y[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \mu]$$

rimane allora definita una trasformazione puntuale in tale varietà. Ad ogni punto $q(x)$ corrisponde mediante la (1) un altro punto $y(\lambda)$ della varietà trasformata e viceversa. La corrispondenza è biunivoca. $y(\lambda)$, fissato λ, è un funzionale del punto generico $q(x)$. Così si dica di $q(\mu)$ per mezzo della (2). Supporremo che le loro variazioni sieno del tipo

$$(3) \qquad \begin{cases} \delta y(\lambda) = \int_0^1 \{Q'[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \lambda\tau] + \delta(\lambda\tau)\}\, \delta q(\tau)\, d\tau \\ \delta q(\mu) = \int_0^1 \{Y'[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \mu\sigma] + \delta(\mu\sigma)\}\, \delta y(\sigma)\, d\sigma . \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $Q'[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda\tau]$ e $Y'[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\mu\sigma]$ sono nuclei coniugati di una medesima equazione integrale lineare di Fredholm.

Poniamo ora

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta y(\lambda)}{\delta q(\tau)} = Q'\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\lambda\tau\right] + \delta(\lambda\tau) \\ \dfrac{\delta q(\mu)}{\delta y(\sigma)} = Y'\left[y\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\mu\sigma\right] + \delta(\mu\sigma) \end{cases}$$

e sarà:

$$(5)\quad \int_0^1 \frac{\delta y(\lambda)}{\delta q(\tau)}\,\delta q(\tau)\,d\tau = \delta y(\lambda) \qquad (6)\quad \int_0^1 \frac{\delta q(\mu)}{\delta y(\sigma)}\,\delta y(\sigma)\,d\sigma = \delta q(\mu)\,.$$

Chiudiamo questo paragrafo dimostrando la formula

$$(7)\qquad \int_0^1 \frac{\delta y(\lambda)}{\delta q(\tau)}\cdot\frac{\delta q(\tau)}{\delta y(\sigma)}\,d\tau = \delta(\lambda\sigma)\,.$$

La dimostrazione è immediata, qualora si tenga conto: 1° della espressione (4) di $\frac{\delta y(\lambda)}{\delta q(\tau)}$ e $\frac{\delta q(\mu)}{\delta y(\sigma)}$; 2° del fatto che $Q'\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\lambda\tau\right]$ e $Y'\left[y\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\mu\sigma\right]$ sono nuclei coniugati e quindi per essi vale il cosidetto principio di inversione della teoria delle equazioni integrali[1]; 3° delle proprietà della funzione $\delta(xy)$.

§ 4. Con la trasformazione puntuale (1) ad ogni punto del primo spazio, corrisponde un punto del secondo spazio. Ogni funzione del punto del primo spazio e di un numero qualsiasi di parametri si trasforma in una funzione del punto del secondo spazio e di un ugual numero di parametri.

Distingueremo gli elementi definiti in uno spazio e gli elementi che compiono l'ufficio geometrico corrispondente nel secondo spazio, mediante una linea sovrapposta ai secondi. Se per una funzione del punto del primo spazio è:

$$f\left[q\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\right] = \bar{f}\left[y\left(\overset{1}{\underset{0}{x}}\right)\right]$$

tale funzione si dirà un invariante.

Esprimiamo che il ds^2, posto nella forma α) è un invariante.

Dalle (6) si ha:

$$(8)\qquad \delta q(\xi_1) = \int_0^1 \frac{\delta q(\xi_1)}{\delta y(\varphi_1)}\,\delta y(\varphi_1)\,d\varphi_1 \qquad \delta q(\xi_2) = \int_0^1 \frac{\delta q(\xi_2)}{\delta y(\varphi_2)}\,\delta y(\varphi_2)\,d\varphi_2$$

(1) Cfr. V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 103.

e quindi sostituendo in α) sarà:

$$ds^2 = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\varphi_1 \varphi_2] + \delta(\varphi_1 \varphi_2) \} \delta y(\varphi_1) \delta y(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

dove:

$$(9)\quad \bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\varphi_1 \varphi_2] + \delta(\varphi_1 \varphi_2) = \int_0^1 \int_0^1 \{ a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \xi_2] + \delta(\xi_1 \xi_2) \} \frac{\delta q(\xi_1)}{\delta y(\varphi_1)} \frac{\delta q(\xi_2)}{\delta y(\varphi_2)} d\xi_1 d\xi_2 .$$

Si vede immediatamente che si ha inversamente:

$$(10)\quad a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \lambda_2] + \delta(\lambda_1 \lambda_2) = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\varphi_1 \varphi_2] + \delta[\varphi_1 \varphi_2] \} \frac{\delta y(\varphi_1)}{\delta q(\lambda_1)} \frac{\delta y(\varphi_2)}{\delta q(\lambda_2)} d\varphi_1 d\varphi_2 .$$

Basta infatti, con completa analogia, a quanto si fa nel caso delle varietà riemanniane, moltiplicare la (9) per:

$$\frac{\delta y(\varphi_1)}{\delta q(\xi_1)} \frac{\delta y(\varphi_2)}{\delta q(\xi_2)}$$

e integrare tra 0 e 1 rispetto a φ_1, φ_2 e tener conto della proprietà espressa da (7) e delle proprietà generali della funzione $\delta(xy)$ per cadere senz'altro nella (10).

Le (8) poi si invertono senz'altro dando luogo alle:

$$(11)\quad \delta y(\varphi_1) = \int_0^1 \frac{\delta y(\varphi_1)}{\delta q(\xi_1)} \delta q(\xi_1) d\xi_1 \qquad \delta y(\varphi_2) = \int_0^1 \frac{\delta y(\varphi_2)}{\delta q(\xi_2)} \delta q(\xi_2) d\xi_2$$

Tenendo allora presenti le coppie di formule (8), (11) e (9), (10) si scorge senz'altro la opportunità delle due seguenti definizioni:

Definizione I: Data la funzione di linea e di un numero finito di parametri $a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n]$ diremo che di fronte ad un cambiamento di variabili del tipo (1), (2) essa si trasforma per controvarianza, quando nel sistema trasformato l'ufficio geometrico di $a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n]$ viene assunto dalla funzione di linea e di un ugual numero di parametri $\bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n]$, la quale si deduce dalla primitiva con la formula:

$$\bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n] = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n] \frac{\delta y(\lambda_1)}{\delta q(\xi_1)} \frac{\delta y(\lambda_2)}{\delta q(\xi^1)} \cdots \frac{\delta y(\lambda_n)}{\delta q(\lambda_n)} d\xi_1 \cdots d\xi_n .$$

Da questa ultima formula si deduce moltiplicando per termini del tipo $\frac{\delta q(\varphi_i)}{\delta y(\lambda_i)}$ e integrando tra 0 e 1, tenute presenti la (7) e le proprietà della funzione $\delta(xy)$ l'altra:

$$a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\varphi_1 \cdots \varphi_n] = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} \bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n] \frac{\delta q(\varphi_1)}{\delta y(\lambda_1)} \frac{\delta q(\varphi_2)}{\delta y(\lambda_2)} \cdots \frac{\delta q(\varphi_n)}{\delta y(\lambda_n)} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n .$$

Definizione II: Data la funzione di linea e di un numero finito di parametri $a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n]$ diremo che di fronte ad un cambiamento di variabili essa si trasforma per covarianza, quando nel sistema trasformato, l'ufficio geometrico di $a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n]$ viene assunto dalla funzione di linea e di un ugual numero di parametri $\bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n]$, la quale si deduce dalla primitiva con la formula:

$$\bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n] = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n] \frac{\delta q(\xi_1)}{\delta y(\lambda_1)} \frac{\delta q(\xi_2)}{\delta y(\lambda_2)} \cdots \frac{\delta q(\xi_n)}{\delta y(\lambda_n)} d\xi_1 \cdots d\xi_n .$$

Da questa ultima formula, si deduce, moltiplicando per termini del tipo $\frac{\delta y(\lambda_i)}{\delta q(\varphi_i)}$ e integrando tra 0 e 1, tenute presenti la (7) e le proprietà della funzione $\delta(xy)$ l'altra:

$$a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\varphi_1 \cdots \varphi_n] = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} \bar{a}[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n] \frac{\delta y(\lambda_1)}{\delta q(\omega_1)} \frac{\delta y(\lambda_2)}{\delta q(\varphi_2)} \cdots \frac{\delta y(\lambda_n)}{\delta q(\varphi_n)} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n .$$

§ 5. Abbiamo così introdotto dei tensori covarianti e controvarianti. È ovvio che cosa si debba intendere per tensore misto.

Terminiamo, accennando alle operazioni di spostamento degli indici o dei parametri, che permettono di passare da tensori covarianti a controvarianti e viceversa. Chiamiamo $a'[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1\xi_2]$ il nucleo coniugato di $a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1\xi_2]$. Si dimostra facilmente che $a'[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1\xi_2] + \delta(\xi_1\xi_2)$ è un tensore controvariante, così come $a[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1\xi_2] + \delta(\xi_1\xi_2)$ è covariante.

Prendiamo ora un qualsiasi tensore covariante $b[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi_1 \cdots \xi_n]$ ed eseguiamo sopra questo l'operazione data dalla seguente formula, giungendo a $B[q(\overset{1}{\underset{0}{x}})\lambda_1 \cdots \lambda_n]$:

$$(12) \qquad B\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_1 \cdots \lambda_n\right] =$$

$$= \underbrace{\int_0^I \cdots \int_0^I}_{n} \prod_1^n{}_s \left\{ a'\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\xi_s\,\lambda_s\right] + \delta(\xi_s\,\lambda_s)\right\} b\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\xi_1 \cdots \xi_n\right] d\xi_1 \cdots d\xi_n .$$

Si dimostra ora facilmente che $B\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_1 \cdots \lambda_n\right]$ è un tensore controvariante. Basta poi a $B\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_1 \cdots \lambda_n\right]$ applicare la operazione data dalla formula seguente per ritornare a $b\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\varphi_1 \cdots \varphi_n\right]$:

$$(12') \qquad b\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\varphi_1 \cdots \varphi_n\right] =$$

$$= \underbrace{\int_0^I \cdots \int_0^I}_{n} \prod_1^n{}_s \left\{ a\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_s\,\varphi_s\right] + \delta(\lambda_s\,\varphi_s)\right\} B\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_1 \cdots \lambda_n\right] d\lambda_1 \cdots d\lambda_n .$$

Diremo che $B\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_1 \cdots \lambda_n\right]$ è la forma controvariante del tensore covariante $b\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\lambda_1 \cdots \lambda_n\right]$.

In modo del tutto analogo, con la (12') da un tensore controvariante si passa ad uno covariante e con la (12) si passa da questo nuovamente al primitivo.

È chiaro ora come con formule analoghe si possano fare tutte le operazioni corrispondenti alle operazioni di elevazione e di abbassamento degli indici del Calcolo Assoluto.

In particolare la forma covariante di $a'\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\xi_1\,\xi_2\right] + \delta(\xi_1\,\xi_2)$ è $a\left[q\left(\overset{I}{\underset{0}{x}}\right)\xi_1\,\xi_2\right] + \delta(\xi_1\,\xi_2)$ e viceversa.

Matematica (Analisi Matematica). — *Sopra un metodo di sommazione nel calcolo delle matrici infinite.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

È stato recentemente proposto da Fantappiè [2] un metodo per attribuire significato numerico, in caso di divergenza, a certi algoritmi infiniti: forme lineari di infinite variabili, traccia di una matrice infinita, prodotto di due matrici infinite. Espongo qui alcune osservazioni su questo metodo, intese a precisare i limiti entro cui può ritenersene legittima l'applicazione; mostro in particolare come le restrizioni che più naturalmente assicurano il verificarsi della *condizione di permanenza* (della condizione cioè, essenziale per ogni processo plausibile di *sommazione*, di restituire i risultati già acquisiti in caso di convergenza o divergenza ordinaria) portino ad escludere la *polidromia* dei prodotti e delle tracce di matrici infinite.

1. Consideriamo la serie

$$(1) \qquad \sum_0^\infty a_n b_n$$

(forma lineare, con i coefficienti a_n, nelle infinite variabili b_n).

Supponiamo le due serie di potenze

$$(2) \qquad \sum_0^\infty a_n z^n \quad , \quad \sum_0^\infty b_n z^n$$

convergenti in un intorno dell'origine, e diciamo $w(z)$ e $y(z)$ le funzioni analitiche da esse generate. Supposto ancora che queste funzioni non abbiano punti singolari reciproci, e detta C una curva chiusa che contenga nell'interno tutti i punti singolari della funzione $\frac{1}{z} w\left(\frac{1}{z}\right)$ e lasci all'esterno tutti quelli di $y(z)$, esisterà l'integrale

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_C w\left(\frac{1}{z}\right) y(z) \frac{dz}{z} .$$

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Questi «Rendiconti», 2 dicembre 1928 e 20 gennaio 1929.

Se il prodotto dei raggi di convergenza delle serie (2) risulta > 1, la (1) converge assolutamente ed ha per somma l'integrale (3), *supposto univocamente determinato.*

Questa considerazione conduce Fantappiè ad attribuire in ogni caso alla serie (1), come *somma generalizzata*, l'integrale (3), supposto esistente.

Alcuni esempî semplicissimi agevoleranno la discussione delle conseguenze di questa definizione.

Innanzi tutto l'integrale (3) può non esistere pur convergendo assolutamente la (1), come nel caso $a_n = b_n = \frac{1}{n+1}$.

Ma v'ha di più: poniamo $a_n = 1$, $b_n = 2^n$; l'integrale (3) diventa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - 1)(1 - 2\zeta)} = -1,$$

il contorno C racchiudendo il solo punto singolare 1. Si troverebbe così per la serie $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ la somma -1.

Poniamo ancora $a_n = 1$, e $b_n = \frac{1}{2^n n}$, $b_0 = 0$. La serie (1) converge allora (assolutamente) ed ha per somma $\log 2$. Ma la funzione $y(\zeta) = -\log\left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)$ è polidroma, e per l'integrale (3) si trovano le infinite determinazioni $\log 2 + 2n\pi i$, con n intero qualunque.

Basterebbe poi prendere come seconda serie (2) un elemento di una funzione integrale con tre moduli di periodicità indipendenti (e punti critici esterni al cerchio unità) per avere in (1) una serie *assolutamente convergente*, e come somma generalizzata (3) un'infinità di valori il cui insieme fosse *denso in tutto il piano complesso* [1].

2. Le stesse osservazioni possono farsi riguardo al prodotto di due matrici infinite $\| a_{rs} \|, \| b_{rs} \|$ effettuato sommando le serie che ne definiscono gli elementi col metodo precedente. Posto p. es.

$$a_{0s} = 1,\ a_{rs} = 0\ (r > 0)\quad ;\quad b_{r0} = \frac{i}{r}\left[\frac{1}{2^r} - \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^r\right],\ b_{00} = 0,\ b_{rs} = 0\ (s > 0),$$

con k reale positivo irrazionale, il prodotto (linee per colonne) delle due matrici, $\| c_{rs} \|$, è effettuabile con la regola ordinaria, ed ha tutti gli elementi (definiti da serie assolutamente convergenti) nulli; mentre che il me-

(1) Questi esempî particolari eludono peraltro la maggiore difficoltà che presenta la considerazione dell'integrale (3), quella cioè di dargli un senso generale e preciso quando si tratti con funzioni polidrome qualunque, non bastando in tal caso i punti del piano complesso semplice all'individuazione delle singolarità.

todo in quistione condurrebbe ad attribuire a c_{∞} (come « prodotto di composizione simmetrica » delle due funzioni

$$\frac{1}{1-z}, \quad -i\log\left(1-\frac{z}{2}\right)+\frac{i}{k}\log\left[1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)z\right]$$

di cui la seconda è polidroma) infiniti valori approssimanti arbitrariamente qualunque numero reale.

Per quanto concerne la *traccia* di una matrice infinita, limitiamoci ad un caso che riconduce ad un esempio precedente, considerando la matrice $\|a_{rs}\|$ dove $a_{rr}=2^r$, $a_{rs}=0\ (r\neq s)$. Moltiplicando l'elemento a_{rr} per t^r, con $|t|<\frac{1}{2}$ si ottiene una nuova matrice la cui traccia è definita da una serie assolutamente convergente di somma $\frac{1}{1-2t}$. Allora secondo la definizione *per prolungamento analitico* proposta da Fantappiè, alla traccia della matrice data dovrebbe attribuirsi il valore di questa funzione per $t=1$, cioè -1.

3. Quest'ultimo esempio mostra chiaramente come debbano spiegarsi simili risultati. I metodi in quistione non sono in sostanza che metodi di *sommazione* per prolungamento analitico; ne è modello la sommazione seguente [1]:

La serie di potenze $\Sigma u_n z^n$ abbia raggio di convergenza non nullo, e la funzione $f(z)$ da essa generata sia definita per $z=1$. Si porrà allora per definizione $\Sigma u_n = f(1)$.

In tal modo si può essere condotti ad attribuire infiniti valori alla somma di una serie convergente, il che è inammissibile, *almeno in caso di convergenza assoluta*; ed a trovare una somma finita per una serie a termini positivi divergente, p. es. -1 per $\Sigma 2^n$, risultato manifestamente inaccettabile.

Per evitare questi inconvenienti, il modo più naturale, per non dire l'unico, sembra quello di non consentire che un prolungamento analitico *rettilineo*, cioè lungo un segmento di retta, dell'elemento $\Sigma u_n z^n$. Infatti, se si vuole evitare ad una serie divergente a termini positivi una somma finita, occorre impedire che nel prolungamento dell'elemento $\Sigma u_n z^n$ possa raggiungersi il punto 1: ora in questo caso l'unico punto singolare per $f(z)$ di cui si possa in generale affermare l'esistenza è reale e compreso nell'intervallo $(0, 1)$. Per la serie precedente $\Sigma 2^n$ questo punto è $\frac{1}{2}$.

In tal modo viene automaticamente eliminata la polidromia della somma di una serie, essendo inibiti i giri intorno ai punti singolari. Se $f(z)$ è re-

(1) V. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, 2e éd., chap. IV.

golare per $|z| < 1$, si ha il metodo di sommazione di Poisson[1], altrimenti la sommazione avviene per prolungamento analitico, col procedimento di Mittag-Leffler, nella stella di $f(z)$ relativa all'origine.

Torniamo ora alla serie (1) del n. 1. Moltiplicando b_n per t^n si ottiene in luogo di $y(z)$ la funzione $y(tz)$; e se t è sufficientemente piccolo, la serie

$$\sum_0^\infty a_n b_n t^n$$

converge assolutamente, ed ha per somma l'integrale (3), in cui si sostituisca $y(tz)$ ad $y(z)$, e che indicheremo allora con $J(t)$. In casi praticamente abbastanza generali, il valore $J(1)$ di (3) si potrà ottenere prolungando analiticamente $J(t)$; in altri, occorrerà sostituire ai coefficienti b_n certe funzioni analitiche $b_n(t)$ opportunamente scelte. Ma i risultati precedenti consigliano di limitarsi ai primi, *ammettendo soltanto prolungamenti analitici rettilinei*. Si ricade così, per la sommazione della serie (1), sul metodo or ora esposto.

Altrettanto dicasi della definizione per prolungamento analitico della traccia di una matrice, che consiste nel coordinare alla matrice a_{rs} la funzione di due variabili complesse $f(z_1, z_2)$ rappresentata in prossimità dell'origine dello sviluppo $\Sigma a_{rs} z_1^r z_2^s$, e prolungare poi il funzionale definito inizialmente dalla serie Σa_{rr} in un campo di funzioni, per cui tale serie converge (quello p. es. delle funzioni per cui lo sviluppo precedente ha raggio di convergenza > 1), con l'introdurre in $f(z_1, z_2)$ un parametro t. Non può pensarsi a lasciare a questo procedimento tutta la sua generalità: e la restrizione più semplice e insieme meno artificiosa sembra ancora quella di introdurre il parametro moltiplicando a_{rr} per t^r, e far tendere poi t ad 1 esclusivamente per valori reali. Quando allora la traccia di una matrice risulterà definita, lo sarà sempre *univocamente*.

A conclusioni perfettamente analoghe conduce l'esame del prodotto di due matrici infinite. Anche qui un metodo caratterizzato essenzialmente dal passaggio da un caso di convergenza ordinaria ad uno di divergenza mediante prolungamento analitico non è ammissibile in generale, se si vuole salvaguardare la condizione di permanenza.

Un metodo coerente di sommazione, analogo a quello già considerato per la forma $\Sigma a_n b_n$, potrebbe essere il seguente: Se le due serie $\Sigma a_{rs} z_1^r z_2^s$ e $\Sigma b_{rs} z_1^r z_2^s$ convergono in un intorno dell'origine, posto $b'_{rs} = b_{rs} t^{r+s}$, si potrà sempre ottenere, prendendo $|t|$ sufficienteme piccolo, che il prodotto (linee per colonne) delle due matrici $|a_{rs}|$, $|b'_{rs}|$ sia effettuabile con la regola ordi-

(1) A rigore, il metodo di Poisson è più generale, in questo senso che riposando solo sopra un *prolungamento per continuità*, non richiede che f sia regolare nel punto 1.

naria, dando luogo ad una matrice $\| c'_{rs} \|$ cui si associerà una funzione $f(z_1, z_2, t)$, rappresentata in prossimità dell'origine dello sviluppo $\Sigma c'_{rs} z_1^r z_2^s$; supposta questa prolungabile per valori reali di t fino a $t = 1$, cioè regolare in un intorno (a sei dimensioni) del segmento $z_1 = z_2 = 0$, $0 \leq t \leq 1$, si definirà il prodotto $\| c_{rs} \|$ delle due matrici $\| a_{rs} \|, \| b_{rs} \|$ come la matrice di coefficienti dello sviluppo di $f(z_1, z_2, 1)$ nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = 0$.

Ognuna delle serie che definiscono gli elementi di $\| c_{rs} \|$ risulterà così sommata per prolungamento analitico rettilineo, e la matrice stessa, se definita, lo sarà *univocamente*.

D'altronde, e per riassumere, l'impiego del prolungamento analitico nella teoria delle sommazioni è affatto illusorio. Per poco che si voglia evitare che un algoritmo infinito dia un risultato arbitrario, o quasi, occorre limitare il prolungamento analitico in modo da ridurlo in sostanza ad un semplice *prolungamento per continuità*. Così p. es. il metodo di Mittag–Leffler si riduce ad una sommazione per fattori di convergenza di uno sviluppo tayloriano. E così pure il procedimento or ora esposto per moltiplicare le matrici $\| a_{rs} \|, \| b_{rs} \|$ è soltanto un caso particolare del seguente:

Si supponga il prodotto effettuabile con la regola ordinaria previa moltiplicare degli elementi b_{rs} per certi fattori $k_{rs}^{(n)}$, variabili con l'indice n; ed in questo prodotto si passi al limite per $n \to \infty$, il limite di tutti i fattori k essendo l'unità [1].

(1) Naturalmente, affinchè la condizione di permanenza sia sempre soddisfatta, andrà verificata ancora dalle k qualche condizione supplementare. Cfr. BOREL, loc. cit., n. 86.

Matematica (Geometria). — *Sulle singolarità della Jacobiana di $r + 1$ ipersuperficie dello spazio ad r dimensioni.* Nota di M. VILLA, presentata [1] dal Corrisp. L. BERZOLARI.

Date in uno spazio lineare S_r $(r > 1)$ $r + 1$ forme F_i di ordini n_i, aventi in un punto O le multiplicità s_i $(s_i \geqq 0)$ $(i = 0, 1, \cdots, r)$, la Jacobiana J delle F_i ha in generale in O la multiplicità

$$\sigma = \sum_0^r i\, s_i - r .$$

Si può chiedere quali condizioni debbano essere soddisfatte affinchè O abbia per J la multiplicità $\sigma + \tau, o$, come anche dirò, affinchè O sia di *specie* τ per J

$$\left(0 \leqq \tau \leqq \sum_0^r i\,(n_i - s_i) - 1\right).$$

Di questo problema si occuparono, in casi particolari, varî Autori [2], usando del metodo che si presenta più spontaneo, cioè ricorrendo a convenienti trasformazioni dei coefficienti dello sviluppo del determinante jacobiano delle forme date. Ma la complicazione dei calcoli che così s'incontrano dopo i primi valori di τ, rende quel metodo inadatto ad uno studio completo dell'argomento.

(1) Nella seduta del 26 aprile 1931.

(2) DEL PEZZO, *Sulla curva Hessiana*, « Rend. R. Accademia di Napoli », 22 (1883); ROHN, *Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche*, « Math. Annalen », 23 (1884); C. SEGRE, *Sulla forma Hessiana*, « Rend. R. Accademia dei Lincei », t. IV (1895); DOEHLEMANN, *Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche*, « Math. Annalen », 41 (1892); DE PAOLIS (vedi: C. SEGRE, *Nota sui lavori postumi di R. De Paolis*, « Rend. R. Accademia dei Lincei », t. III (1894)); GERBALDI, *Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. VIII (1894); A. LEVI, *Sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie*, « Giornale di Matematiche », t. XXXIV (1896); GERBALDI, *Un teorema sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie algebriche*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. X (1896); VANHOVE, *Sur la Jacobienne d'un réseau de courbes planes*, « Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége », t. XIV (1928).

Per queste, e per altre citazioni sulla curva Jacobiana e sulla curva Hessiana, vedi l'articolo di BERZOLARI nell' « Encyklopädie der math. Wiss. », III, c. 4, nn. 6 e 7.

Per via totalmente diversa, il problema trovasi risolto in tutta la sua estensione in un mio lavoro che, con lo stesso titolo di questa Nota, verrà prossimamente pubblicato nelle Memorie del R. Istituto Lombardo, e nel quale vengono anche ritrovati i risultati degli Autori precedenti.

Di questo mio lavoro, mi propongo di esporre qui, sommariamente, le linee essenziali.

In ogni caso il problema si riduce a quello che deriva dal supporre:

$$n_i = n_j (i = 0, 1, \cdots, r), \; s_j = s \; (j = 1, \cdots, r), \; s_0 = s + 1 \; (s > 0)^{(1)}.$$

Introdotta questa semplificazione, occorre ancora fare una premessa.

Si consideri in un S_r $(r > 1)$ un sistema lineare $\Delta \infty^r$, non composto con una congruenza lineare (o fascio), e un punto P non appartenente alla varietà base di Δ. Il punto P come punto base del sistema Δ_0, formato dalle forme di Δ passanti per P, abbia la multiplicità 1.

Affinchè P appartenga alla Jacobiana di Δ è necessario e sufficiente che fra le forme di Δ esista una forma Γ_0 avente in P punto doppio (almeno). Siccome poi P, come punto base di Δ_0, ha la multiplicità 1, in Δ esistono $r - 1$ forme Γ_α $(\alpha = 1, \cdots, r - 1)$ linearmente indipendenti fra loro, e dalla Γ_0, aventi in P la multiplicità 1 (esattamente); in Δ esiste infine una forma Γ_r avente in P la multiplicità zero (esattamente). Il punto P, come punto base del sistema lineare ∞^{r-1} individuato dalle r forme

$$\Gamma_0 \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_r^2, \; \Gamma_1 \cdot \Gamma_r \cdot \Gamma_\alpha^2 \; (\alpha = 1, \cdots, r - 1),$$

ha la multiplicità 3 (esattamente), e quindi in questo sistema esistono r forme $\Gamma s_j \; (j = 1, \cdots, r)$, linearmente indipendenti, aventi in P la multiplicità 3 (esattamente). Ebbene, ho dimostrato che *affinchè* P *abbia per la Jacobiana di* Δ *la multiplicità* $\mu \; (0 < \mu \leq (r + 1)(m - 1)$, *essendo* m *l'ordine delle forme di* Δ*) è necessario e sufficiente che fra le forme di* Δ *ne esista una avente in* P *punto doppio, e che* P *sia di specie* $\mu - 1$ *per la Jacobiana delle* $r + 1$ *forme*

$$\Gamma_1^4, \Gamma s_j \; (j = 1, \cdots, r),$$

che si diranno *forme spezzate di* Δ *relative al punto* P.

Queste forme hanno lo stesso ordine; la Γ_1^4 ha in P la multipticità 4, e le Γs_j hanno in P la multiplicità 3.

(1) Degno di rilievo è il caso della forma Hessiana, nell'ipotesi che il punto in esame sia almeno doppio per la forma fondamentale. Infatti se questa forma fondamentale F ha in O la multiplicità $s + 1$ $(s > 0)$, la prima polare di O rispetto ad F ha in O la multiplicità $s + 1$, e le prime polari rispetto ad F di r punti di S_r indipendenti fra loro, e da O (presi in modo affatto generico), hanno in O la multiplicità s, sicchè si è di già nel caso attuale.

Ciò posto, fra S_r e un altro spazio S'_r considero una trasformazione cremoniana quadratica di cui O sia il punto fondamentale in S_r. Sia a' l'iperpiano fondamentale in S'_r, e O' un punto generico di a'.

La trasformata F'_0 della F_0 si spezza in a' contato $s+1$ volte e in una forma residua non contenente a' come parte, e la trasformata F'_j della $F_j\,(j=1,\cdots,r)$ si spezza in a' contato s volte e in una forma residua non contenente a' come parte, sicchè si può porre:

$$F'_i \equiv (a')^s \cdot \overline{F}'_i \,(i=0,1,\cdots,r).$$

Fra la Jacobiana $J_{F'}$ delle F'_i e la Jacobiana $J_{\overline{F}'}$ delle $\overline{F}'_i$, sussiste la relazione:

$$J_{F'} \equiv (a')^{(r+1)s} J_{\overline{F}'}. \tag{1}$$

Affinchè O sia di specie τ per J (ossia, affinchè O abbia la multiplicità $(r+1)s+1-r+\tau$ per J), occorre e basta che la trasformata J' della J contenga come parte a' contato

$$(r+1)s+1-r+\tau \text{ volte}.$$

Ma siccome la $J_{F'}$ si compone della J' e della Jacobiana del sistema omaloidico di S'_r, la quale contiene come parte a' contato $r-1$ volte, si conclude che la nostra condizione si verifica quando e solo quando la $J_{F'}$ contiene come parte a' contato

$$(r+1)s+1-r+\tau+(r-1)=(r+1)s+\tau \text{ volte},$$

ovvero, per la (1), quando la $J_{\overline{F}'}$ contiene come parte a' contato

$$(r+1)s+\tau-(r+1)s=\tau \text{ volte},$$

o, con altre parole, quando O' ha la multiplicità τ per $J_{\overline{F}'}$.

Il punto O' non appartiene alla varietà base del sistema lineare $\Delta_{\overline{F}'}$ individuato dalle $\overline{F}'_i$ perchè le $\overline{F}'_j$ non passano per O', essendo O' un punto generico di a', e O', come punto base del sistema formato dalle forme di $\Delta_{\overline{F}'}$ passanti per O', ha la multiplicità 1, perchè la $\overline{F}'_0$ contiene come parte a' contato 1 volta (e una sola). Quindi applicando a $\Delta_{\overline{F}'}$ relativamente ad O' la proposizione stabilita per Δ relativamente a P, e raccogliendo, si ottiene:

Affinchè O *sia di specie* τ *per* J *è necessario e sufficiente che fra le forme di* $\Delta_{\overline{F}'}$ *ne esista una avente in* O' *punto doppio, e che* O' *sia di specie* $\tau-1$ *per la Jacobiana delle forme spezzate di* $\Delta_{\overline{F}'}$ *relative al punto* O'.

Si è in tal guisa ottenuto l'*abbassamento della specie*. Alle forme spezzate di $\Delta_{\overline{F}'}$ relative al punto O' si può applicare una seconda trasformazione quadratica, nel modo ora visto per le F_i, abbassando la specie di un'altra unità, e così continuare finchè, dopo τ trasformazioni quadratiche, la specie sarà ridotta a zero.

Matematica. — *Sur la sommation des séries trigonométriques.* Nota di N. Cioranescu, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. $F(x)$ étant une fonction continue, Riemann a introduit l'expression:

$$(1) \qquad \lim_{\alpha=0} \frac{F(x-\alpha)+F(x+\alpha)-2F(x)}{\alpha^2} = \lim_{\alpha=0} \frac{\Delta F}{\alpha^2}$$

qu'on appelle la dérivée seconde généralisée de $F(x)$, et qui joue un rôle fondamental dans sa théorie des séries trigonométriques. Si l'expression (1) est nulle pour x situé dans un intervalle (a, b) il en résulte, d'après une proposition de Schwarz, que $F(x)$ est une fonction linéaire dans (a, b).

On peut obtenir une méthode de sommation des séries trigonométriques analogue à celle de Riemann, en introduisant une expression qui peut jouer le même rôle que l'expression (1).

2. Soit $F(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Considérons l'expression:

$$(2) \qquad \lim_{\alpha=0} \frac{\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} F(t)\,dt - F(x)}{\alpha^2} = \lim_{\alpha=0} \frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2}$$

Montrons d'abord que si la limite précédente est nulle quelque soit x dans (a, b) alors $F(x)$ est une fonction linéaire dans cet intervalle. Pour cela remarquons tout d'abord que $\varphi(x)$ étant une fonction convexe, c'est-à-dire telle que

$$(3) \qquad \varphi(x) \leq \frac{\varphi(x+\alpha)+\varphi(x-\alpha)}{2}$$

pour α suffisament petit, on peut remplacer cette relation de définition par la suivante:

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi(t)\,dt$$

et réciproquement si cela a lieu on peut en conclure que $\varphi(x)$ satisfait à la condition (3).

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

Revenons à la proposition anoncée, et supposons que pour tout x de (a, b) on ait :

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2} = 0 .$$

Soient $F(a)$ et $F(b)$ les valeurs de $F(x)$ en a et b et $u(x)$ la fonction linéaire qui prend les mêmes valeurs aux extremités de l'intervalle.

Considérons la fonction :

$$\varphi(x) = \varepsilon[F(x) - u(x)] + \lambda^2 f(x) \tag{4}$$

où $= \varepsilon \pm 1$, λ une constante quelconque, $f(x)$ une fonction convexe en (a, b) et nulle aux extrémités.

On voit que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Formons l'expression :

$$\mathfrak{D}\varphi(x) = \varepsilon \mathfrak{D}F(x) + \lambda^2 \mathfrak{D}f(x) \qquad \text{car } \mathfrak{D}u(x) = 0 .$$

On a $\mathfrak{D}f(x) > 0$ car $f(x)$ est convexe, donc :

$\mathfrak{D}\varphi(x) \geqq 0$ pour des valeurs suffisament petites de α.

$\varphi(x)$ étant convexe dans (a, b) et nulle en a et b est négative dans cet intervalle, et cela quelque soit λ et pour $\varepsilon = \pm 1$. On en conclu que l'on doit avoir $F(x) \equiv u(x)$, car autrement on pourrait choisir ε et prendre λ suffisament petit pour que $\varphi(x) > 0$ en certains points de (a, b). Cette proposition est corrélative à celle de Schwarz. Elle est un peu indépendente de ce qui va suivre.

3. Considérons la série trigonométrique :

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \\ = A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots \end{cases} \tag{5}$$

On suppose que $\lim a_n = \lim b_n = 0$ pour $n \to \infty$.

Il en résulte que la série :

$$F(x) = A_0 \frac{x^2}{2} - \frac{A_1}{1^2} - \frac{A_2}{2^2} - \cdots - \frac{A_n}{n^2} - \cdots \tag{6}$$

converge pour tout x entre $0 - 2\pi$.

Considérons le rapport : $6 \dfrac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2}$ et montrons que si la série (5) converge en un certain point x de $0 - 2\pi$ vers une fonction $f(x)$, le rapport précédent $\to f(x)$ lorsque $\alpha \to 0$.

En effet, on a que:

$$\mathfrak{D}\cos nx = \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} - 1\right)\cos nx$$

$$\mathfrak{D}\sin nx = \left(\frac{\sin \alpha}{n\alpha} - 1\right)\sin nx.$$

Il s'ensuit que:

$$6\frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2} = A_0 + 6\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{n\alpha - \sin n\alpha}{n^3\alpha^3}\right) \tag{7}$$

Les facteurs de convergence sont par conséquent:

$$\varphi_n(\alpha) = 6\left(\frac{n\alpha - \sin n\alpha}{n^3\alpha^3}\right).$$

En appliquant la transformation d'Abel à la série (7) on obtient:

$$6\frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)\left[\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha)\right]$$

où $S_n(x) = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

Soit $S(x) = \lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x) - A_0$. On peut écrire:

$$6\frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2} = A_0 + 6S\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} + \sum_{1}^{\infty}(S_n - S)\left[\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha)\right].$$

Soit N le nombre tel que ε étant donné on ait pour $n \geqq N$

$$|S_n - S| < \varepsilon.$$

Décomposons $\sum_{1}^{\infty}(S_n - S)(\varphi_n - \varphi_{n+1})$ en deux parties: l'une de 1 à N et l'autre de N + 1 à l'infini.

Lorsque $\alpha \to 0$

$$6\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{1}^{N}(S_n - S)(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \to 0$$

car $\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha) \to 0$ lorsque $\alpha \to 0$ et n reste inférieur à un nombre fixe.

Pour la seconde partie on a:

$$\left|\sum_{N+1}^{\infty}(S_n - S)(\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1})\right| \leq \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty}\left|\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha)\right| \leq$$

$$\leq 6\varepsilon \sum_{1}^{\infty}\left|\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} d\,\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| \leq 6\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha}\left|\frac{d}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| d\alpha =$$

$$= 6\varepsilon \int_{0}^{\infty}\left|\frac{d}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| d\alpha .$$

En remarquant qu'on peut écrire:

$$\int_{0}^{\infty}\left|\frac{d}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| d\alpha = \int_{0}^{\theta}|\quad|\,d\alpha + \int_{\theta}^{\infty}|\quad|\,d\alpha .$$

$\theta \leq \theta_0$. θ_0 étant le nombre positif à partir duquel $\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}$ devient croissante, on peut montrer que l'intégrale précédente est convergente.

En effet:

$$\left|\frac{d}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| < 3\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4}\right)$$

donc

$$\int_{0}^{\infty}\left|\frac{d}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| d\alpha$$

est convergente. Entre o et θ

$$\frac{d}{d\alpha}\,\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} < 0$$

car elle est décroissante, donc:

$$\int_{0}^{\theta}\left|\frac{d}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}\right| d\alpha = -\int_{0}^{\theta} d\,\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} = \frac{1}{6} - \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^2} = a .$$

Par conséquent

$$\sum_{N+1}^{\infty}(S - S_n)(\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha)) < \lambda\varepsilon,$$

λ étant un nombre fixe, qui ne dépend pas le N.

Il s'ensuit qu'aux points x de convergence de $f(x)$ on a que:

$$\lim_{\alpha=0} 6 \cdot \frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2} = f(x).$$

4. En employant l'operateur

$$\frac{\Delta F}{\alpha^2} = \frac{F(x-\alpha) + F(x+\alpha) - 2F(x)}{\alpha^2}$$

sur la fonction (6) $F(x)$, les facteurs de convergence qui entrent dans la méthode de Riemann sont les suivants:

$$2\frac{1-\cos nx}{n^2\alpha^2} = \left(\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{n\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

Dans la méthode de sommation de plus haut ces facteurs sont

$$6\frac{n\alpha - \sin n\alpha}{n^3\alpha^3}.$$

La corrélation qui existe entre les deux méthodes de sommation est évidente.

En faisant une combinaison linéaire à coefficients constants entre les deux opérateurs $\frac{\Delta F(x)}{\alpha^2}$ et $\frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2}$ on peut obtenir une méthode de sommation des séries trigonométriques avec des facteurs de convergence de la forme suivante:

$$\Phi_n(\alpha) = \lambda\frac{1-\cos n\alpha}{n^2\alpha^2} + \mu\frac{n\alpha - \sin n\alpha}{n^3\alpha^3} \qquad \text{avec: } 3\lambda + \mu = 6.$$

Il est facile de conclure qu'aux points de convergence de (5) la limite de l'expression $\sum A_n \Phi_n(\alpha)$ pour $\alpha = 0$ est $f(x)$. D'ailleurs ces facteurs de convergence satisfont aux conditions de M. O. Perron [1] comme on peut s'en assurer.

Il peut se faire que la limite de certains de ces expressions pour $\alpha \to 0$, existe en des points où les deux limites:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\Delta F(x)}{\alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\alpha=0}\frac{\mathfrak{D}F(x)}{\alpha^2}$$

(1) « Mathematische Zeitschrift », Bd. VI, p. 286.

n'existe pas séparément. Considérons l'exemple très simple:

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{pour } x \leq 0 \\ x & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

qui a un saut angulaire à l'origine.

Il est facile de voir que

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta F(0)}{\alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\alpha=0} \frac{\mathfrak{D} F(0)}{\alpha^2}$$

n'existe pas, tandisque

$$\lim_{\alpha=0} \frac{2\mathfrak{D} F(0) - \Delta F(0)}{\alpha^2} = 0.$$

Plus général soit:

$$F(x) = \begin{cases} -\Psi(x) & \text{pour } x \leq 0 \\ \Psi(x) & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

$\Psi(x)$ étant une fonction continue impaire, $\Psi(0) = 0$.

Pour ne pas trop allonger cet exposé, supposons que $\Psi(x)$ ait des dérivées de deux premiess ordres finies et continues. On peut alors montrer facilement que:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{2\mathfrak{D} F(0) - \Delta F(0)}{\alpha^2}$$

existe et a une valeur bien détérminée, tandisque il n'au est pas de même de

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta F(0)}{\alpha^2} \qquad \text{en} \qquad \lim_{\alpha=0} \frac{\mathfrak{D} F(0)}{\alpha^2},$$

si $\Psi'(0) \neq 0$.

D'où je crois l'intérêt que peut présenter la méthode de sommation exposée plus haut.

Matematica (Geometria). — *Sur les formes différentielles d'un complexe de droites.* Nota di P. Mentré, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

1. Considérons dans un complexe non spécial le morceau formé par les droites qui avoisinent une génératrice non singulière p de paramètres u_1, u_2, u_3.

Rappelons d'abord les résultats classiques. Désignons par π l'un quelconque des ∞^1 complexes linéaires tangents relatifs à la génératrice p. Les autres complexes linéaires tangents π' constituent donc le faisceau spécial $\pi' = \pi + \alpha p$.

Nous aurons:

$$Sp^2 = 0 \quad ; \quad S\pi p = 0 \quad , \quad S\pi' p = 0 \quad , \quad S\pi' dp = 0$$

$$Sp\,dp = 0 \quad ; \quad Sp\,d\pi = 0 \quad , \quad Sp\,d\pi' = 0.$$

Donnons à p un déplacement élémentaire de façon à décrire un morceau de surface réglée à laquelle tous les complexes linéaires π' sont tangents. La condition pour que le morceau de surface soit développable est que l'on ait:

$$\varphi = Sdp^2 = 0$$

La condition pour que l'un π' des complexes linéaires tangents soit osculateur à la surface réglée est que l'on ait:

$$\chi' = Sdp\,d\pi' = 0$$

Mais on a:

$$\chi' = Sdp\,d\pi + \alpha S\,dp^2 = \chi + \alpha\varphi$$

Les formes différentielles χ' sont quadratiques et constituent un faisceau dans lequel l'une des formes φ est privilégiée [2].

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) G. Fubini et E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale*, Nicola Zanichelli, editore, Bologna, pp. 348-552.

2. Je me propose dans cette Note de montrer l'intérêt que présentent les ∞^1 formes différentielles quadratiques

$$\Phi' = S d\pi'^2$$

quand on a choisi les six coordonnées homogènes de π' de manière à satisfaire à la condition $S\pi'^2 = 1$.

Les formes Φ' font partie d'un réseau puisque

$$\Phi' = S d\pi^2 + 2\alpha S\, dp\, d\pi + \alpha^2 S dp^2 = \Phi + 2\alpha\chi + \alpha^2\varphi .$$

Remarquons que *la congruence linéaire qui est la caractéristique du complexe linéaire tangent π' devient spéciale dans les déplacements dp qui annulent la forme Φ'.*

En effet, si la forme Φ' est nulle, on a $S d\pi'^2 = 0$; par suite le complexe linéaire $d\pi'$ est spécial; d'ailleurs la directrice de $d\pi'$ appartient au complexe linéaire π' car l'équation $S\pi'^2 = 1$ entraîne $S\pi' d\pi' = 0$. La congruence linéaire caractéristique de π' est constituée par les droites communes aux deux complexes linéaires π' et $d\pi'$; elle est spéciale puisqu'elle contient les droites de π' qui rencontrent une génératrice de π'.

La directrice de la congruence linéaire spéciale rencontre la génératrice p et elle est par suite située dans tous les complexes linéaires tangents car on a : $Spd\pi' = 0$, $S\pi d\pi' = 0$.

La directrice vient même se confondre avec la génératrice p quand l'un quelconque des trois complexes linéaires stationnaires prend son déplacement de stationnement [1].

On peut dire aussi que *les deux foyers inflexionnels doubles de Koenigs* [2], *situés sur chacune des droites du complexe singulier (circonscrit au complexe donné) enveloppé par le complexe linéaire π', viennent se confondre en un foyer inflexionnel quadruple, quand la forme Φ' est nulle* [3].

3. Il existe un lien simple et remarquable entre les formes φ, χ' et Φ'. Pour le voir, nous emploierons la méthode du calcul extérieur de *M. Cartan.*

Etant donné le repère projectif formé par les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 et associé à la génératrice p, posons comme d'habitude:

$$da_i = \omega_{i1} a_1 + \omega_{i2} a_2 + \omega_{i3} a_3 + \omega_{i4} a_4$$

On peut choisir le repère de manière à avoir

$$p = [a_1 a_2] \quad ; \quad \pi = [a_1 a_3] + [a_4 a_2] \quad ; \quad [a_1 a_2 a_3 a_4] = 1$$

(1) P. Mentré, « Comptes-rendus, Académie des Sciences de Paris », t. 188, 1929, p. 846.

(2) G. Koenigs, « Annales de l'Ecole Normale Supérieure », 2e série, t. 11, 1882, p. 331 à 335.

(3) P. Mentré, « Comptes-rendus », t. 178, 1924, p. 290.

On a alors les équations de Pfaff:

$$\omega_{14} + \omega_{23} = 0 \quad ; \quad \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0$$

En écrivant pour abréger $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ au lieu de $\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{24}$ et $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ au lieu de $\omega_{34} - \omega_{21}, \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}, \omega_{43} - \omega_{12}$, nous avons l'équation quadratique extérieure:

$$(1) \qquad [\omega_1 \tilde{\omega}_1] + [\omega_2 \tilde{\omega}_2] + [\omega_3 \tilde{\omega}_3] = 0$$

Dans ces conditions les différentielles dp et $d\pi$ sont données par:

$$dp = (\omega_{11} + \omega_{22})[a_1 a_2] + \omega_2 [a_1 a_3] + \omega_3 [a_1 a_4] - \omega_2 [a_4 a_2] - \omega_1 [a_2 a_3] \ (1).$$

$$d\pi = (\omega_{32} + \omega_{41})[a_1 a_2] + \frac{\tilde{\omega}_2}{2}[a_1 a_3] + \tilde{\omega}_1 [a_1 a_4] - \frac{\tilde{\omega}_2}{2}[a_4 a_2] - \tilde{\omega}_3 [a_2 a_3]$$

Par suite, les formes φ, χ et Φ ont pour expression:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi = -2(\omega_2^2 + \omega_1 \omega_3) \\ \chi = -(\omega_1 \tilde{\omega}_1 + \omega_2 \tilde{\omega}_2 + \omega_3 \tilde{\omega}_3) \\ \Phi = -2\left(\dfrac{\tilde{\omega}_2^2}{4} + \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_3\right) \end{cases}$$

D'ailleurs, à cause de l'équation (1) on a:

$$(3) \quad \tilde{\omega}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \omega_1} \quad , \quad \tilde{\omega}_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \omega_2} \quad , \quad \tilde{\omega}_3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \omega_3} .$$

Pour interpréter cela, considérons pour un instant les différentielles du_1, du_2, du_3 comme étant les coordonnées homogènes d'un point dans un plan γ. Comme les expressions $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont linéaires et homogènes en du_1, du_2, du_3 nous pourrons, après un changement convenable de coordonnées trilinéaires, considérer $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ comme étant les coordonnées homogènes d'un point du plan γ. A tout point du plan correspond ainsi un morceau de surface réglée, compris entre les deux droites infiniment voisines p et $p + dp$.

Considérons 1° la conique $\varphi = 0$; 2° le faisceau de coniques $\chi' = \chi + \alpha\varphi = 0$; 3°, la famille des ∞^1 coniques $\Phi' = \Phi + 2\alpha\chi + \alpha^2\varphi = 0$.

(1) P. MENTRÉ, *Les Variétés de l'Espace réglé*, Les Presses universitaires de France, 1923, pp. 86 et 87.

Il résulte des formules (2) et (3) que la conique $\Phi = 0$ est polaire réciproque de la conique $\varphi = 0$ par rapport à la conique $\chi = 0$ et, plus généralement, que la conique $\Phi' = 0$ est polaire réciproque de la conique fixe $\varphi = 0$ par rapport à la conique $\chi' = 0$ décrivant un faisceau.

4. Il est possible d'interpréter géométriquement le lien entre les déplacements réglés qui satisfont à $\chi' = 0$ et à $\varphi' = 0$. Il suffit de remarquer que:

1° toute droite Δ du plan γ représente un morceau de congruence dont les deux déplacements développables ont pour images les deux points d'intersection de la droite Δ avec la conique φ.

2° le rapport anharmonique de quatre points d'une droite est égal au rapport anharmonique constant des quatre plans tangents menés en un point variable de p aux quatre morceaux de surfaces réglées qui ont pour images les quatre points de Δ.

Nous pouvons alors exprimer que le pôle d'une droite tangente à la conique φ, par rapport à la conique est situé sur la conique Φ.

Une tangente à φ est l'image d'un morceau de congruence, à nappes focales confondues, dont le déplacement développable a pour image le point de contact.

Considérons un déplacement réglé Σ pour lequel le complexe linéaire tangent π' a une caractéristique spéciale. Ce déplacement fait partie de ∞^1 morceaux de congruences (qui ont pour images un faisceau de droites Δ). Dans l'un quelconque C de ces morceaux de congruences il y a deux morceaux Σ' et Σ'' de surfaces osculatrices à π' (qui ont pour images deux points situés sur la conique χ'). Traçons alors en chaque point P de la génératrice p un plan qui soit conjugué harmonique par rapport aux trois plans tangents menés par P aux trois morceaux $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$; nous obtiendrons ainsi les plans tangents d'un morceau Σ''' de surface réglée appartenant à C. *En faisant varier le morceau de congruence* C *qui contient le morceau fixe* Σ, *les* ∞^1 *morceaux* Σ''' *de surfaces réglées constituent un morceau de congruence à nappes focales confondues* (ce qui signifie que deux morceaux ont leur deux plans tangents communs confondus).

5. Lorsque le complexe tangent est stationnaire la conique correspondante χ' se décompose en deux droites qui concourent en un sommet du triangle autopolaire par rapport au faisceau des coniques φ, χ'. La conique Φ' se décompose donc aussi en deux droites qui concourent au même point et sont tangentes à φ.

Les déplacements élémentaires de la génératrice p pour lesquels un complexe tangent, qui commence par être stationnaire, admet une caractéristique spéciale constituent deux morceaux de congruences à nappes focales confondues; ces deux morceaux ont en commun le déplacement pour lequel le complexe linéaire tangent reste stationnaire.

6. Par un point du plan γ passent en général deux coniques de la famille Φ'; autrement dit *un déplacement élémentaire de la génératrice p peut–*

être accompagné de deux manières différentes par un complexe linéaire tangent à caractéristique spéciale.

Les points de γ par lesquels il ne passe qu'une conique double de la famille Φ' sont situés sur la courbe enveloppe de la famille Φ'. Mais chaque conique Φ' est la polaire réciproque (par rapport à la conique χ') de la conique φ. Il en résulte immédiatement que 1° les 4 points caractéristiques de la conique variable Φ' sont confondus avec les 4 points d'intersection de la conique Φ' et de la conique χ'; 2° les droites polaires de chaque point caractéristique par rapport à toutes les coniques du faisceau χ, φ concourent en un point situé sur la coniques φ.

L'enveloppe de la famille Φ' est donc la quartique à trois points doubles d'inflexion (qui sont les images des trois déplacements de stationnement, situés respectivement sur les trois surfaces principales) qui est l'*inverse quadratique* de la conique φ par rapport au faisceau χ, φ. D'ailleurs cette enveloppe vient toucher la conique φ aux quatre points communs aux coniques du faisceau (points qui sont les images des quatre déplacements inflexionnels); son équation est:

$$\psi = \chi^2 - \varphi\Phi = 0.$$

Matematica. — *Direzioni concorrenti.* Nota di A. de Mira Fernandes, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

Per analogia col concetto del trasporto parallelo di Levi-Civita, Miller[2] definì nel modo seguente il trasporto *concorrente*:

Se L è una linea della varietà riemanniana $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e D una direzione definita in ognuno dei punti M della linea L, si dirà che D subisce un trasporto concorrente quando è possibile determinare, sopra D, un punto M' (variabile, in generale) in modo tale che la tangente in M' alla sua traiettoria sia normale all'iperpiano E_n tangente in M alla varietà.

La designazione di trasporto *concorrente* è giustificata perchè, se la varietà è una superficie V_2 dello spazio ordinario, sviluppando nel piano tangente E_2, in M, la superficie sviluppabile circoscritta a V_2 lungo la L, le trasformate delle direzioni D sono rette concorrenti del piano E_2.

Com'è noto è sopra una concezione analoga che si fonda la nozione di trasporto parallelo.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) « Bulletin de la Société Mathématique de France », tome 56e, année 1928, p. 1.

Se (ξ^i) designa il vettore $M' - M$, s la lunghezza d'arco della linea L, e $ds^2 = a_{ik}\,dx^i\,dx^k$ la forma fondamentale, Myller dimostrò [1] che il trasporto è concorrente quando si verificano le condizioni

$$(1) \qquad \frac{d\xi^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} \xi^h \frac{dx^k}{ds} = -\frac{dx^i}{ds} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Ne vengono alcune interessanti conseguenze:

Siccome i primi membri delle equazioni (1) sono le componenti del *derivato* di (ξ^i), possiamo scrivere

$$(1') \qquad (D\xi)^i = -\frac{dx^i}{ds}.$$

Da cui risulta:

a) *Il derivato del vettore* $(\xi)^i$ *è un vettore unitario.* Infatti da (1') si ha

$$(D\xi)^2 = a_{ik}(D\xi)^i(D\xi)^k = \frac{a_{ik}\,dx^i\,dx^k}{ds^2} = 1.$$

b) *Il vettore derivato* $(D\xi)^i$ *è tangente alla linea di trasporto* L, *ed ha senso opposto allo spostamento.*

È una conseguenza immediata dell'equazione (1').

c) Indichiamo con ξ la grandezza del vettore (ξ^i), con $\frac{1}{R}$ la curvatura associata alla sua direzione, con (α^i) i parametri del versore di (ξ^i) e con (α'^i) i parametri della direzione spettante al vettore derivato.

Dalla (1) essendo $\xi^i = \xi\alpha^i$ e

$$\frac{d\alpha^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} \alpha^h \frac{dx^k}{ds} = \frac{\alpha'^i}{R},$$

risulta

$$(2) \qquad \xi\alpha'^i + R\frac{d\xi}{ds}\alpha^i = -R\frac{dx^i}{ds}.$$

E da qui risulta anche (visto che sono ortogonali le direzioni (α^i) e (α'^i))

$$(3) \qquad \frac{\xi^2}{R^2} + \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = 1.$$

(1) Loc. cit.

d) Chiamiamo T il versore della tangente ed N quello della normale principale (associata con T). Essendo (β^i) i parametri direttori di N, moltiplicando (2) per $a_{ik}\beta^k$ e sommando, si ha

$$\xi \cos(D', N) + R\frac{d\xi}{ds}\cos(D, N) = 0. \tag{4}$$

Moltiplicando (2) per $a_{ik}\frac{dx^k}{ds}$ e sommando, si ottiene

$$\xi \cos(D', T) + R\frac{d\xi}{ds}\cos(D, T) = -R. \tag{5}$$

Moltiplicando (2) per $a_{ik}\alpha'^k$ e sommando, si ha

$$\xi = -R\cos(D', T). \tag{6}$$

Finalmente moltiplicando (2) per $a_{ik}\alpha^k$ e sommando, si ha

$$\frac{d\xi}{ds} = -\cos(D, T). \tag{7}$$

e) D'altra parte, essendo $\frac{1}{R'}$ la curvatura associata alla direzione della tangente (flessione di L), abbiamo

$$\frac{d\cos(D, T)}{ds} = \frac{\cos(D, N)}{R'} + \frac{\cos(D', T)}{R}\,(1). \tag{8}$$

Supponiamo che la curva L *sia una geodetica.* Sarà $\frac{1}{R'} = 0$. Dalle (6), (7) e (8) risulta

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = \frac{\xi}{R^2}. \tag{9}$$

Dalle (5) e (8), ponendo $(D, T) = \varphi$, si ha

$$\frac{d\cos\varphi}{ds} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{ds}\cos\varphi. \tag{10}$$

Ossia

$$\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{ds}{\xi\cos\varphi} - \frac{d\xi}{\xi}.$$

(1) Cfr. la Nota dell'autore in «Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei», VII, 1928, p. 468, nota 5.

Cioè:

$$d \log (\xi \cos \varphi) = - \frac{d \cdot}{\xi \cos \varphi}.$$

Facendo

$$\xi \cos \varphi = p$$

sarà

$$dp = - ds. \tag{11}$$

Il differenziale della proiezione di ξ *sulla tangente è uguale e di segno contrario al differenziale dell'arco.*

f) Supponiamo che la varietà V_n sia una superficie V_2. In tal caso, $(D, N) = \frac{\pi}{2} - (D, T)$.

Dalla (5) e (8) risulta

$$\frac{d \cos \varphi}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{R'} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{ds} \cos \varphi,$$

ossia

$$\frac{d \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{ds \operatorname{tg} \varphi}{R'} - \frac{ds}{\xi \cos \varphi} - \frac{d\xi}{\xi},$$

cioè, ponendo

$$\xi \cos \varphi = p \qquad \text{e} \qquad \xi \operatorname{sen} \varphi = p_1,$$

$$d \log p = - \frac{ds}{p} + \frac{\operatorname{tg} \varphi \, ds}{R'};$$

od ancora

$$\frac{dp}{ds} = \frac{p_1}{R'} - 1. \tag{12}$$

p_1 è la proiezione di ξ sulla normale principale, e l'equazione (12) si riduce alla (11) se la curva di trasporto è una geodetica.

Matematica (Teoria delle funzioni). — *Sur les zéros de la dérivée d'une fonction holomorphe.* Nota di LUCA TEODORIU, presentata[1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans (D), ayant n zéros à distance finie et soit (C) un contour intérieur à (D) qui renferme tous les zéros de $f(z)$. Je me propose de déterminer un domaine circulaire avec le centre dans un zéro simple de $f(z)$, dans l'intérieur duquel il n'existe pas des zéros de la dérivée.

Sans restreindre la généralité, considérons l'origine comme un zéro simple de $f(z)$. Soit encore 1, le zéro du module minimum et $a_1, a_2, \cdots a_s$, les autres zéros $f(z)$, tels que $|a_k| > 1$; $k = 1, 2, \cdots, S$.

On a donc:

$$(1) \qquad f(z) = z(z-1)^{\alpha}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}, \cdots, (z-a_s)^{\alpha_s} e^{g(z)}$$

où $g(z)$ est holomorphe dans (D), et

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n - 1 .$$

Il s'ensuit de (1):

$$(3) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\alpha_1}{z-a_1} + \frac{\alpha_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\alpha_s}{z-a_s} + g'(z).$$

Soit M, le maximum de $|g'(z)|$ sur le contour (C).

Je dis qu'il existe un nombre $\varphi(n, M)$ inférieur à $\frac{1}{n}$, quelque soit M, tel que la dérivée $f'(z)$ ne peut s'annuler à l'intérieur d'un cercle de centre o, et de rayon $\varphi(n, M)$.

Soit ξ un zéro de $f'(z)$ de module $|\xi| < 1$: il suffit évidemment de démontrer la proposition pour de tels zéros.

Il vient de (3):

$$(4) \qquad \frac{1}{|\xi|} \leq \frac{\alpha}{|\xi - 1|} + \frac{\alpha_1}{|\xi - a_1|} + \frac{\alpha_1}{|\xi - a_2|} + \cdots + \frac{\alpha_s}{|\xi - a_s|} + M$$

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

mais parce que $|a_k| > 1$ on a:

$$(5) \qquad |\xi - a_k| \geqq |a_k| - |\xi| > 1 - |\xi|$$

et l'inégalité (4) conduit à:

$$(6) \qquad \frac{1}{|\xi|} < \frac{n-1}{1-|\xi|} + M.$$

Par consèquent $|\xi|$ vérifie l'inégalité:

$$M|\xi|^2 - (n+M)|\xi| + 1 < 0.$$

Le trinome ainsi obtenu en $|\xi|$, a les racines réelles; parce que le discriminant:

$$(1-M)^2 + (n-1)(n+1+2M)$$

est toujours positif, n étant un entier positif.

Donc on a:

$$(8) \qquad |\xi| > \varphi(n, M) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{M} + 1 - \sqrt{\left(\frac{n}{M}+1\right)^2 - \frac{4}{M}}\right).$$

On vérifie aisement que le nombre $\varphi(n, M)$ est inférieur à $\frac{1}{n}$ quelque soit M, car autrement on aurà successivement:

$$\frac{n}{M} + 1 - \frac{2}{n} > \sqrt{\left(\frac{n}{M}+1\right)^2 - \frac{4}{M}}$$

$$n < 1$$

inégalité evidemment impossible.

2. Si $f(z)$ se réduit à un polynome $F(z)$, nous aurons:

$$g(z) = 0 \quad ; \quad M = 0$$

et on déduit de (6) ou de (8):

$$|\xi| > \frac{1}{n}.$$

On ne peut pas espérer à une limitation meilleure, car la nôtre, est atteinte pour le polynome:

$$z(z-1)^{n-1}.$$

3. De plus, le polynome $F(z)$ est nécessairement univalent dans le cercle $|z| < \frac{1}{n}$. Ceci résulte immédiatement d'un théorème de M. Biernacki (1).

Matematica. — *Dell'associabilità di m congruenze di curve nello spazio di n dimensioni.* Nota di G. Corbellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann.* Nota di P. Nalli, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Trasporti rigidi di vettori sulle superficie.* Nota di P. Nalli, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Centri di gravità delle sezioni piane di un corpo omogeneo.* Nota di A. de Mira Fernandes, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Biernacki, Thèse présentée à la Fac. des Sciences de Paris, 1928, p. 87. L'énonce se trouve aussi, sous forme différente, dans le travail de M. Alexander, « Annals of Mathematics », 2ª série, t. 17 (1915).

Meccanica. — *Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici.* Nota II di D. Bonvicini, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

L'analogia che fu oggetto della Nota di ugual titolo pubblicata in questi « Rendiconti », vol. XI, serie 6ª, 1° sem., fasc. 11, rende ovvia l'enunciazione di alcuni teoremi di elettrodinamica, corrispondenti ad altri noti teoremi della statica dei solidi elastici.

Al duplice *teorema di Castigliano* corrisponde il seguente: *La derivata del calore di Joule totale rispetto alla carica concentrata immessa nell'unità di tempo in un punto qualunque è uguale al potenziale del punto medesimo. La derivata rispetto al potenziale di un punto qualunque è uguale alla carica concentrata immessa nell'unità di tempo nel punto medesimo.*

Corrispondente al *teorema di reciprocità del Volterra*, esteso alle distorsioni più generali del Somigliana, è il teorema: *Se si considerano due diversi sistemi di correnti,* $\mathbf{I}^{(1)}$, $\mathbf{I}^{(2)}$, *determinati da assegnate discontinuità del potenziale, rispettivamente* $[U^{(1)}]$, $[U^{(2)}]$, *su un sistema qualunque di superficie* (Σ'), *essendo in entrambi i casi il conduttore del tutto isolato, si ha la relazione*

$$\int_{(\Sigma')} [U^{(1)}]\, \mathbf{I}^{(2)} \times \boldsymbol{n}\, dA = \int_{(\Sigma')} [U^{(2)}\, \mathbf{I}^{(1)} \times \boldsymbol{n}\, dA .$$

Al *secondo principio di reciprocità del Colonnetti*, parimenti esteso, corrisponde il teorema: *Se si considera un sistema di correnti* $\mathbf{I}^{(1)}$ *determinato da assegnate discontinuità* $[U^{(1)}]$ *del potenziale su un sistema qualunque di superficie* (Σ'), *essendo il conduttore del tutto isolato, ed un secondo sistema* $\mathbf{I}^{(2)}$ *dovuto invece esclusivamente a scambi di cariche coll'esterno, si ha la relazione*

$$\int_{(\Sigma')} [U^{(1)}]\, \mathbf{I}^{(2)} \times \boldsymbol{n}\, dA = \int_{(S)} U^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{I}^{(2)}\, dV + \int_{(\Sigma)} U^{(1)}\, \mathbf{I}^{(2)} \times \boldsymbol{n}\, dA .$$

(1) Nella seduta del 26 aprile 1931.

Fisica. — *Ricerche sperimentali sulla scarica a bagliore* [1]. Nota di G. VALLE, presentata [2] dal Corrisp. A. POCHETTINO.

Comunico brevemente in questa Nota una parte dei risultati ottenuti e delle osservazioni fatte in una ricerca sperimentale sul passaggio dell'elettricità nei gas rarefatti, nella fase a bagliore.

1. *Andamento delle caratteristiche statiche nei vari tipi di regime stazionario della scarica a bagliore.* – Ho usato in gran parte tubi da scarica ad aria (pressione variabile fra 0.1 e 10 mm.) con elettrodi cilindrici coassiali, l'interno dei quali, filiforme, fungeva da catodo. Per tutti i tubi ho determinato, alle varie pressioni, le caratteristiche statiche, $V = f(i)$, della fase a bagliore, avendo cura particolare di comprendervi i minimi valori di i, per bene individuare il tratto iniziale discendente della caratteristica (*regime subnormale*). Per ciascun tubo potei così trovare delle formule empiriche, atte a rappresentare con sufficiente approssimazione la funzione $V = f(i, p)$, cioè la dipendenza della caratteristica statica dalla pressione.

Si tratta in realtà, per ciascun tubo, di due funzioni diverse: $V_s = f_s(i, p)$, per il *regime subnormale* (densità di corrente al catodo j minore della densità normale j_n; $dV/di < 0$) e $V_a = f_a(i, p)$ per il *regime anomalo* ($j > j_n$; $dV/di > 0$), valevole la prima per $i < i_{sn}(p)$, la seconda per $i > i_{na}(p)$. Il valore limite $i_{na}(p)$ è eguale ad $s \cdot j_n$ (s area totale del catodo). Il valore $V_n(p)$, che per questo limite assume V_a, permette, posto in luogo di V_s, di ricavare dalla funzione f_s l'altro limite dell'intensità $i_{sn}(p)$. I due rami della caratteristica statica vanno cioè congiunti con un tratto intermedio rettilineo $V = V_n(p)$, che costituisce la caratteristica statica per il *regime normale* ($j = j_n$, legge di Hehl–Wilson; caduta catodica costante; $dV/di = 0$).

La rappresentazione di $V = f(i, p)$, che così si ottiene, corrisponde bene, anche quantitativamente ed entro un ampio intervallo di variazione dell'intensità i e della pressione p, ai risultati sperimentali. La coincidenza è manchevole, com'è ovvio, soltanto in vicinanza dei punti di passaggio da un tipo di regime all'altro. Le funzioni sono, per elettrodi cilindrici, della forma

$$V_s = m + n \sqrt{q} \qquad V_a = g(p) + r \cdot q$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 26 aprile 1931.

con m, n, r costanti e $q = \sqrt{i}/p$. Per un tubo con anodo cilindrico di Fe del diam. int. di 36 mm. e un catodo cilindrico di Al del diam. di 3 mm. ($s = 4.71$ cm^2) era p. e.

$$m = 229 \ , \ n = 10.5 \ , \ r = 2100 \ , \ g(p) = 127 + 72\sqrt{p} - 19/p \, .$$

Interessa però specialmente il fatto che, in tutti i casi, per il regime subnormale, V_s si mostra dipendente soltanto da $q = \sqrt{i}/p$. Avviene cioè, in regime subnormale, per l'intero potenziale elettrodico, quello che avviene per la sola caduta catodica in regime anomalo ($V_{ca} = V_{cn} + K \cdot q$; legge di Aston).

Caratteristico del regime subnormale è ancora il fatto che lo spazio oscuro catodico si allarga diminuendo l'intensità della corrente, come ne fa fede l'esempio seguente:

ELETTRODI: *dischetti di* Al, *diam. 20 mm., dist. 120 mm.*
GAS: *Aria*, $p = 0{,}313$ *mm.*

i $10-5$ Amp.	14.8	15.8	19.8	27.3	34.0	49.5
V Volta	421	420	418	417	417	417
d mm.	15	—	12	10	8	8

Ciò sta certamente in relazione con la diminuzione della densità di corrente sotto il valore normale constatata da A. von Muralt [1] e in questo vi è stretta analogia con quanto avviene in regime anomalo. L'aumento simultaneo del potenziale elettrodico è invece fenomeno opposto, connesso indubbiamente alla incipiente riduzione delle cariche spaziali e della deformazione del campo, per cui la fase a bagliore della scarica elettrica tende, in regime subnormale, a ridursi alla fase di Townsend.

Del resto anche in regime normale, la regione del contorno del bagliore, che è stata oggetto di osservazioni di R. Seeliger ed M. Reger [2], presenta analoghe proprietà, perchè si verifica ivi il passaggio graduale del campo interno deformato dalle cariche spaziali al campo regolare circostante. Si deve anzi ritenere che questa regione di contorno, in cui il bagliore degenera ed assume densità subnormale, mentre lo spazio oscuro

(1) A. von MURALT, « Ann. d. Phys. », *85*, 1139, 1928.
(2) R. SEELINGER e M. REGER, « Ann. d. Phys. », *83*, 535, 1927.

si allarga, concorra anche ad elevare corrispondentemente il potenziale elettrodico. Ho osservato infatti che la sua scomparsa quando il bagliore, dilatandosi, raggiunge un ostacolo, è accompagnata sempre da un brusco abbassamento del potenziale (di parecchi Volta), mentre al suo ricomparire, diminuendo la i, avviene il contrario. In regime normale la regione di contorno rimane poi inalterata e la contrazione del bagliore avviene, per i decrescente, soltanto a spese della parte interna normale. Quando questa si riduce a zero, il bagliore risulta costituito dalla sola regione di contorno; e così si accede al regime subnormale.

2. *Massimo valore raggiunto dall'intensità della corrente all'inizio della scarica.* – Se si alimenta un tubo da scarica non ancora adescato con una corrente costante i_s (corrente di saturazione di un diodo), l'accensione avviene quando il potenziale elettrodico, che cresce con la velocità i_s/C (C, capacità del tubo o del condensatore eventualmente derivato), raggiunge il valore A del potenziale iniziale di scarica. Il processo transitorio, che succede all'accensione, conduce infine o allo stabilizzarsi della scarica a bagliore nello stato stazionario, che corrisponde sulla caratteristica statica al valore $i = i_s$, o nuovamente all'estinzione. Quale dei due stati finali si raggiunga, dipende esclusivamente dai valori di i_s e di C; il processo transitorio di accensione si svolge nei due casi allo stesso modo. E cioè, d'ordinario, la corrente di scarica cresce rapidissimamente da 0, oltre il valore i_s, fino a un massimo i_μ per poi ridiscendere e stabilizzarsi al valore i_s o annullarsi, come hanno dimostrato le osservazioni con l'oscillografo catodico [1]. Delle relazioni che consentirebbero di determinare col calcolo i_μ se ne conosce però una sola:

$$dV/dt = (i_s - i)/C;$$

si ignora il modo in cui la corrente cresce col tempo quando la scarica incomincia. Per questo interessa la determinazione sperimentale di i_μ e della sua dipendenza da i_s e da C.

Ciò è stato fatto, per alcuni valori fissi della C, con i_s variabile, da E. Haak [2] usando una lampadina al neon (Pintsch) e determinando i_μ con un compensatore a diodo. Per trarne delle conseguenze utili al fine di chiarire il processo di accensione della scarica, si rendeva però necessario uno studio più completo e sistematico del fenomeno e l'estensione dei limiti di variazione delle quantità considerate. Ho usato a questo scopo ancora tubi ad aria con elettrodi cilindrici, sostituendo però l'esterno (anodo) con una rete metallica, che permettesse di osservare sempre agevolmente

(1) G. Valle, *Dati e Memorie sulle Radiocomunicazioni*, Consiglio nazionale delle ricerche (Comitato radiotelegrafico), *2*, 317, 1930.

(2) E. Haak, «Ann. d. Phys.», *84*, 119, 1927.

il bagliore e di misurarne l'estensione, e inoltre altri tubi con elettrodi filiformi. Le misure di i_μ dovevano farsi necessariamente con scarica intermittente e per esse mi sono servito di due metodi diversi. La i_μ risultava o dallo spostamento massimo del punto fluorescente sullo schermo dell'oscillografo catodico o dal potenziale massimo (determinato elettrometricamente) raggiunto da un condensatore derivato attraverso a un diodo ai capi di una resistenza nota percorsa dalla corrente di scarica.

Riassumo i risultati: Fissa restando la corrente di alimentazione i_s, la i_μ ha, per grandi capacità C, un valore massimo praticamente costante; essa diminuisce invece, a capacità minore, col diminuire di questa, sempre più rapidamente, fino a ridursi quasi bruscamente al valore i_s. Ciò avviene per un valore C_s della capacità, che cresce a sua volta col crescere della i_s. Il limite massimo di i_μ è esso pure funzione crescente di i_s. Per piccole capacità la scarica, una volta adescata, non può dunque più estinguersi e il limite della capacità sotto il quale questo si verifica cresce con la i_s. Se si considera il rapporto di amplificazione i_μ/i_s, esso cresce del pari, naturalmente, con la capacità e tende a un limite massimo m; ma questo diminuisce fortemente col crescere della i_s. Esso aumenta invece con la pressione ed, entro certi limiti, anche con la distanza d degli elettrodi. Serva da esempio la tabella seguente, che si riferisce a un tubo con elettrodi filiformi di Al.

p mm.	d mm.	i_s 10^{-5} A.	i_μ 10^{-3} Amp.								m
			C = 0.25	0.50	0.75	1	2	4	6	$8 \cdot 10^{-3}$ μF.	
1.32	4	22.8	4	4.5	5	5.5	6	6	6.5	6.5	24
1.32	20	24.4	13	22	26	30	38	46	51	56	205
1.32	4	22.8	4	4.5	5	5.5	6	6	6.5	6.5	24
2.05	4	18.2	10.5	13	14.5	16	18	20	21	22	124
5.30	4	26.7	42.5	49	52.5	54	57	58	57	57	213

Simultaneamente all'intensità massima i_μ, ho determinato pure l'area σ della porzione del catodo ricoperta dal bagliore, che presenta, variando la i_s e la C, e quando il catodo non risulti ancora ricoperto del tutto, un andamento analogo. Dal quoziente $i_\mu/\sigma = j$ risulta la densità massima raggiunta dalla corrente al catodo durante l'accensione della scarica. Orbene, questa densità si dimostra, per quanto lo può consentire l'imprecisione delle misure di σ, eguale alla densità normale j_n e non varia perciò nè

con la i_s nè con la C. Essa dipende soltanto dalla pressione. Valga a dimostrarlo l'esempio seguente, in cui sono messe a raffronto, per tre pressioni diverse, le medie delle numerose misure fatte a catodo non interamente ricoperto per vari valori di i_s e pC, con le rispettive densità normali, determinate in regime stazionario (Tubo con anodo a rete diam. 58 mm.; catodo di Al diam. 3 mm.).

p	mm.	1.66	2.47	3.58
j	10^{-3} Amp./cm^2	2.56	4.77	9.37
j_n	10^{-3} Amp./cm^2	2.74	5.30	9.28

Quando il catodo è interamente ricoperto, la j aumenta invece oltre il valore normale e dipende dalla i_s e dalla C. Si può concludere dunque che durante il processo transitorio, con cui la scarica a bagliore si inizia, si raggiunge la densità di corrente normale e questa non può essere superata se non quando il catodo risulti interamente ricoperto.

Nulla ci dice invece l'esperienza sul momento in cui durante il processo la j_n viene raggiunta. Ad ogni modo il processo non può avere inizio se non nella fase di Townsend e comunque in condizioni subnormali e dunque con densità di corrente molto minore di j_n. Si tratta dunque indubbiamente di un processo in cui, mentre la i cresce da 0, oltre i_s, fino ad i_μ, la densità di corrente sale da un minimo fino a j_n e conserva poi questo valore, come in regime stazionario normale.

Ora, così stando le cose, si possono distinguere due casi: o la densità normale viene raggiunta dopo che l'intensità i ha sorpassato il valore di regime i_s, o essa viene raggiunta già prima che ciò avvenga. Nel primo caso (*accensione indiretta*) la corrente attraversa per la prima volta il gas con l'intensità i_s, mentre il processo che conduce alla fase a bagliore è ancora in atto e procede spontaneo a dare incremento alla ionizzazione del gas e alle cariche spaziali. Questo processo non può arrestarsi e perciò l'intensità della corrente che attraversa il gas dovrà crescere oltre i_s e tendere a un massimo. Essa tornerà al valore di regime appena più tardi. Nel secondo caso (*accensione diretta*), quando la corrente nel gas non sarà ancora cresciuta fino al valore i_s, il processo di sviluppo del bagliore sarà già terminato; mancherà cioè la causa del rapido aumento della i oltre questo valore i_s, che una volta raggiunto sarà superato soltanto dalla quantità necessaria per permettere che la corrente i_s si stabilizzi al più basso potenziale di regime.

L'esistenza dei due modi d'accensione diversi risulta anche dall'osservazione diretta. Se $C > C_s$ (accensione indiretta) l'inizio della scarica è sempre accompagnato da uno sprazzo luminoso alla superficie del catodo che supera di molto l'estensione che assumerà successivamente il bagliore.

Col diminuire della capacità l'estensione di questo sprazzo si riduce e lo sprazzo scompare quando si raggiungono le condizioni per l'accensione diretta ($C \geqslant C_s$). Inoltre l'esistenza dei due modi diversi d'accensione, dà ragione dello strano e sinora inspiegato andamento della curva che separa, per i_s crescente, nel piano (i_s, C) la regione della scarica intermittente e di quella continua [1]. Col crescere di i_s si ha infatti, lungo questa curva, dapprima un aumento di i_s, poi una diminuzione fino a un limite minimo. Ora si vede subito che il ramo ascendente della curva riproduce senz'altro la condizione per l'accensione diretta, perchè tale accensione può condurre soltanto alla scarica continua. Infatti C_s è, come si è detto, funzione crescente di i_s. Il ramo discendente corrisponde invece all'accensione indiretta, che può condurre tanto alla scarica intermittente quanto alla continua. Il secondo caso si verifica se i_μ è grande ed essendo questa quantità funzione crescente tanto di i_s quanto di C, l'andamento del ramo discendente della curva resta del pari, almeno qualitativamente chiarito.

Fisica. — *Assorbimento e diffusione della radiazione corpuscolare penetrante nel piombo e nel ferro* [2]. Nota di B. Rossi, presentata [3] dal Socio A. Garbasso.

1. – Le curve di assorbimento della radiazione penetrante nel passaggio da un mezzo assorbente ad un altro presentano delle caratteristiche anomalie (*Uebergangseffekte*), che sono state anche recentemente studiate da Steinke [4]. Mentre cioè l'assorbimento operato da strati equivalenti [5] di materiali diversi non presenta differenze sensibili, quando lo si misuri dopo che la radiazione ha attraversato uno strato sufficientemente esteso del materiale stesso, nei primi centimetri si ha un assorbimento superiore al normale, quando la radiazione passa da un mezzo di basso numero atomico ad un mezzo di numero atomico elevato, ed inferiore al normale nel caso opposto.

L'interpretazione di questi fenomeni non è ancora chiara. Steinke (seguendo un'ipotesi proposta da Hoffmann [6]) ritiene che la radiazione pene-

(1) H. Geffcken, «Physik. Zeitschr.», *26*, 241, 1925; G. Valle, «Physik. Zeitschr.», *26*, 495, 1925; 27, 473 (§ 13), 1926.

(2) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Fisica in Arcetri.

(3) Nella seduta del 12 aprile 1931.

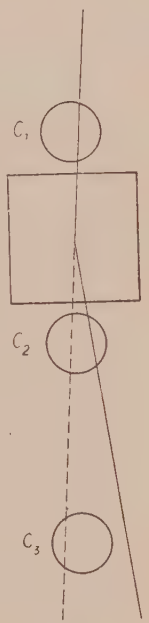
(4) E. Steinke, «Phys. ZS.», *31*, 1019, 1930.

(5) Steinke assume come unità di misura per gli spessori la quantità $\rho \frac{Z}{A}$ (ρ = densità, Z = numero atomico, A = peso atomico); considera cioè come equivalenti due strati, che contengano egual numero di elettroni per cm^2.

(6) G. Hoffmann, «Ann. d. Phys.», *82*, 413, 1927.

trante primaria generi nella materia una radiazione secondaria e che l'intensità di questa, in equilibrio con una determinata intensità della radiazione primaria, sia tanto più grande quanto più basso è il numero atomico del mezzo. L'*Uebergangseffekt* starebbe ad indicare il passaggio dalla condizione di equilibrio, relativa al mezzo da cui la radiazione proviene, alla nuova condizione di equilibrio, relativa al mezzo in cui la radiazione penetra. Le anomalie dovrebbero quindi manifestarsi in uno strato di spessore comparabile col potere di penetrazione della radiazione secondaria.

Con questa interpretazione però non sembrano accordarsi le esperienze di Bothe e Kolhörster [1] e dell'A. [2], almeno quando si voglia identificare la radiazione secondaria in questione colla radiazione corpuscolare, che si osserva col metodo delle coincidenze. Le anomalie di transizione si esauriscono infatti praticamente in pochi cm. di piombo, mentre risulta dalle citate esperienze che la radiazione corpuscolare ha un potere di penetrazione assai maggiore. Parrebbe quindi che la causa di queste anomalie fosse piuttosto da ricercarsi nelle proprietà della radiazione corpuscolare stessa o nei fenomeni che ne accompagnano il passaggio attraverso la materia; ed è comunque certo che la base indispensabile per la spiegazione di questo, come di molti altri problemi relativi alla radiazione penetrante, può essere fornita solo da una più esatta conoscenza del comportamento della radiazione corpuscolare.



2. – Le ricerche, che formano l'oggetto della presente Nota, riguardano l'assorbimento e la diffusione della radiazione corpuscolare nel piombo e nel ferro; sostanze in cui, secondo i risultati di Steinke, le curve di assorbimento presentano caratteri notevolmente diversi.

Il dispositivo sperimentale è schematicamente rappresentato nella figura. C_1, C_2, C_3 sono tre contatori a tubo di Geiger e Müller (diametro interno: 5 cm.; lunghezza: 15 cm.). Essi sono disposti orizzontalmente l'uno al di sopra dell'altro, la distanza fra il primo e il secondo (misurata da asse ad asse) essendo di 17 cm., quella fra il secondo e il terzo di 16 cm. Una corazza di piombo dello spessore di 8 cm., aperta superiormente, li protegge dalla radioattività dell'ambiente. La radiazione penetrante, prima di giungere sui contatori, deve attraversare soltanto la copertura del tetto ed un soffitto a stuoia, di uno spessore complessivo di circa 12 g/cm².

(1) W. Bothe e W. Kolhörster, «ZS. f. Phys.», *56*, 751, 1929.
(2) B. Rossi, «ZS. f. Phys.», *68*, 64, 1931 e «Nuovo Cimento», *8*, 49, 1931.

Mediante un sistema di due circuiti, analoghi a quelli usati dall'A. in precedenti ricerche [1], vengono registrate contemporaneamente le coincidenze doppie fra gli impulsi di C_1 e C_2 (che segnalano il passaggio di un corpuscolo attraverso questi due contatori) e le coincidenze triple fra gli impulsi di C_1, C_2, C_3 (che segnalano il passaggio di un corpuscolo attraverso tutti tre i contatori).

Quando fra C_1 e C_2 si interpone uno schermo assorbente A, diminuisce sia la frequenza delle coincidenze doppie, che la frequenza delle coincidenze triple. Se lo schermo assorbe senza diffondere, il rapporto fra il numero delle coincidenze triple e il numero delle coincidenze doppie deve tuttavia rimanere immutato [2]; se invece vi è anche una diffusione, l'interposizione dello schermo deve ridurre il numero delle coincidenze triple in misura maggiore che non il numero delle coincidenze doppie (cfr. figura) e deve quindi far diminuire il rapporto suddetto.

3. – Vennero eseguite tre serie di esperienze, confrontando le frequenze delle coincidenze che si producono rispettivamente:

1. senza schermo e con 9 cm. di piombo fra C_1 e C_2;
2. » » » 11 » di ferro fra C_1 e C_2;
3. con 11 cm. di ferro e con 9 cm. di piombo fra C_1 e C_2.

I due schermi assorbenti adoperati sono equivalenti nel senso chiarito dalla nota 5, p. 600; ossia contengono egual numero di elettroni per cm^2.

In ciascuna serie di esperienze le misure da paragonarsi vennero opportunamente alternate per evitare gli errori dipendenti da fluttuazioni di intensità della radiazione penetrante.

I risultati complessivi sono riassunti nella seguente tabella:

(1) Cfr. p. es. B. Rossi, «Nature», *125*, 636, 1930.

(2) Qualora si prescinda dalla piccola differenza dipendente dal fatto che il percorso medio nello strato assorbente dei raggi, che danno le coincidenze doppie, è alquanto superiore (circa del 5 %) a quello dei raggi, che danno le coincidenze triple (per la diversa apertura angolare dei fasci corrispondenti).

	Durata della esperienza	Coincidenze doppie			Coincidenze triple		
		Osservate	Casuali	Sistematiche	Osservate	Casuali	Sistematiche
Senza schermo . .	$27^h.17^m$	5375	412	4963	941	72	869
Con 9 cm. di Pb. .	» »	4114	314	3800	813	56	757
Senza schermo . .	$28^h.40^m$	5171	433	4738	974	70	904
Con 11 cm. di Fe .	» »	4088	370	3718	787	56	731
Con 11 cm. di Fe .	$27^h.56^m$	4196	360	3836	826	57	769
Con 9 cm. di Pb. ,	» »	4089	321	3768	760	56	704

La correzione relativa alle coincidenze doppie casuali venne determinata misurando il potere risolutivo (che risultò eguale a 10^{-3} sec.) ed applicando quindi la nota formula: $\nu = 2\tau N_1 N_2$, dove ν indica la frequenza delle coincidenze casuali, τ il potere risolutivo, N_1 ed N_2 la frequenza degli impulsi indipendenti nei singoli contatori. In modo analogo fu calcolato il numero delle coincidenze triple casuali, ossia più precisamente, il numero delle coincidenze casuali fra gli impulsi di un contatore e le coincidenze sistematiche indipendenti degli altri due[1] (dove naturalmente per ciascuna combinazione va misurato separatamente il potere risolutivo).

Poichè le fluttuazioni d'intensità della radiazione penetrante possono influire soltanto sul numero totale delle coincidenze osservate, ma non sul rapporto fra il numero delle coincidenze triple e quello delle coincidenze doppie (contate *simultaneamente*), i valori ρ_o, ρ_{Pb}, ρ_{Fe} di questo rapporto, misurati rispettivamente senza schermo, collo schermo di piombo e collo schermo di ferro, possono paragonarsi anche se le relative esperienze siano state eseguite a distanza di tempo l'una dall'altra.

Riunendo perciò i risultati delle tre serie di misure, otteniamo:

$$\rho_o = \frac{(869 + 904) \pm \sqrt{941 + 974}}{4963 + 4738} = 0.183 \pm 0.005$$

$$\rho_{Pb} = \frac{(757 + 704) \pm \sqrt{813 + 760}}{3800 + 3768} = 0.193 \pm 0.005$$

$$\rho_{Fe} = \frac{731 + 769 \pm \sqrt{787 + 826}}{3718 + 3836} = 0.199 \pm 0.005 .$$

(1) Cfr. B. Rossi, questi « Rendiconti », *11*, 834, 1930 (nota a pie' di pagina).

La considerazione del diverso spessore effettivo dello strato assorbente per i raggi, che danno le coincidenze doppie e le coincidenze triple (cfr. nota 2, pag. 602) porta ad alzare leggermente (di circa 0.002) il valore sperimentale di ρ_0 in confronto a quello di ρ_{Pb} e di ρ_{Fe}. Le differenze che rimangono fra ρ_0, ρ_{Pb} e ρ_{Fe} non superano sostanzialmente quelle spiegabili con le fluttuazioni statistiche; in ogni caso, ρ_{Pb} e ρ_{Fe} non risultano più piccoli di ρ_0, come sarebbe da attendersi se il piombo o il ferro diffondessero sensibilmente i raggi corpuscolari.

Concludiamo da ciò che nel passaggio dei corpuscoli della radiazione penetrante attraverso la materia, la diffusione, se pure esiste, non esercita che un'azione di secondaria importanza; in particolare essa non può avere un'influenza sensibile sulla forma della curva di assorbimento, come invece accade pei comuni raggi β [1].

Questa esperienza elimina poi un dubbio già espresso dall'A., che cioè la diffusione potesse aver in qualche modo falsato i risultati delle sue ricerche sull'origine della radiazione corpuscolare penetrante [2].

Per quel che riguarda l'assorbimento, notiamo anzitutto che, dovendo confrontare in questo caso misure non contemporanee, converrà, per evitare possibili errori, considerare separatamente i risultati delle tre serie di esperienze.

Chiamando I_0 l'intensità della radiazione corpuscolare al di sopra dello schermo, I_{Pb} la porzione di questa, che attraversa lo schermo di piombo e I_{Fe} la porzione che, attraversa lo schermo di ferro, si calcola:

per l'assorbimento nel piombo:

$$A = \frac{I_0 - I_{Pb}}{I_0} = \frac{(4963 - 3800) \pm \sqrt{5375 + 4114}}{4963} = 0.234 \pm 0.020$$

per l'assorbimento nel ferro:

$$B = \frac{I_0 - I_{Fe}}{I_0} = \frac{(4738 - 3718) \pm \sqrt{5171 + 4088}}{4738} = 0.215 \pm 0.020$$

per l'effetto differenziale:

$$C = \frac{I_{Fe} - I_{Pb}}{I_{Fe}} = \frac{(3836 - 3768) \pm \sqrt{4196 + 4089}}{3836} = 0.018 \pm 0.024 .$$

Questi tre risultati si controllano a vicenda, perchè tra i valori esatti A_0, B_0, C_0 delle grandezze A, B, C deve evidentemente sussistere la relazione:

$$\frac{A_0 - B_0}{1 - B_0} = C_0 .$$

(1) Cfr. W. Bothe, «ZS. f. Phys.», *54*, 161, 1929.
(2) B. Rossi, «ZS. f. Phys., *68*, 64, 1931.

Tenendo conto di questa ed applicando il metodo dei minimi quadrati, si ottengono per i valori più probabili di A, B, C e per gli errori medi delle rispettive determinazioni:

$$A = 0.232 \pm 0.016$$
$$B = 0.217 \pm 0.016$$
$$C = 0.020 \pm 0.019 .$$

4. – Confrontiamo questi risultati con le misure eseguite in condizioni analoghe da altri Autori.

Il valore del 23.2 %, ora ottenuto per l'assorbimento in 9 cm. di piombo, può considerarsi (entro i limiti degli errori sperimentali e tenuto conto dell'indurimento progressivo della radiazione) in buon accordo col valore del 24.6 %, ottenuto da Bothe e Kolhörster per l'assorbimento in 4.1 cm. d'oro [1].

Sia l'assorbimento nel piombo, che l'assorbimento nel ferro risultano invece nelle nostre esperienze nettamente *inferiori* a quelli misurati da Steinke [2], il quale trova in 9 cm. di piombo un assorbimento del 43 % e in 11 cm. di ferro un assorbimento del 30 %. E la divergenza appare ancora più notevole quando si consideri che l'*assorbimento della radiazione penetrante*, misurato da Steinke, dovrebbe invece risultare *più piccolo* dell'*assorbimento della radiazione corpuscolare*, misurato dall'A. [3].

Inoltre le nostre misure non rivelano quella differenza di comportamento tra il ferro e il piombo, che appare così notevole dalle curve di Steinke. Si ricava infatti da queste, confrontando le intensità misurate sotto 9 cm. di piombo e sotto uno strato equivalente di ferro: $\frac{I_{Fe} - I_{Pb}}{I_{Fe}} = 0.18$. La differenza del 2 %, che risulta dalle nostre esperienze, non esce invece dai limiti degli errori sperimentali, mentre si discosta da quella trovata da Steinke per una quantità 8 volte superiore all'errore medio. Parrebbe quindi di dover concludere che la camera di ionizzazione, usata da Steinke, registra, oltre alla radiazione corpuscolare segnalata col metodo delle coincidenze, anche una radiazione γ *più molle*, alla quale sarebbero dovute, almeno nella massima parte, le anomalie osservate.

Risulta d'altra parte, da un confronto colle precedenti esperienze dell'A. [4], che l'assorbimento della radiazione corpuscolare nei primi centimetri di piombo supera notevolmente quello che si misura quando la radiazione abbia preventivamente attraversato un certo strato del materiale stesso.

(1) Loc. cit.
(2) Loc. cit.
(3) Cfr. a questo proposito B. Rossi, « ZS. f. Phys. », *68*, 64, 1931.
(4) Loc. cit.

(Dal valore di A, ora ottenuto, si deduce infatti come coefficiente formale di assorbimento $2.93 \cdot 10^{-3}$ cm²/g, mentre per la radiazione filtrata attraverso 5 cm. di piombo più 10 cm. di muratura e calcestruzzo, si era trovato $1.6 \cdot 10^{-3}$ cm²/g).

Resta però ancora aperta la questione se tale fenomeno sia legato al passaggio della radiazione corpuscolare dell'aria nel piombo, o non sia invece da interpretarsi come un semplice effetto di filtraggio, per cui i primi centimetri di piombo arrestano le componenti più molli della radiazione corpuscolare, analogamente a quanto farebbe uno strato equivalente di qualsiasi altro materiale.

Ulteriori ricerche sono in corso.

Fisica (Elettrotecnica). — *Condizioni di equilibrio in un ponte di Wheastone nelle misure ad audio e radio frequenza.* Nota di Algeri Marino, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

È noto come le misure ad audio e radio frequenza con il ponte di Wheastone risultino spesso molto difficoltose a causa delle capacità dei lati del ponte verso terra o verso lo schermo metallico che spesso racchiude il ponte stesso.

Per eliminare tali difficolta è stato indicato da K. W. Wagner un dispositivo di correzione che non risulta però di applicazione generale.

Nelle presente Nota esporrò un procedimento molto semplice che consente di mettere rapidamente in evidenza quali sono le condizioni da soddisfare per l'equilibio di un ponte di Wheastone nel caso che le capacità dei lati del ponte verso terra non siano trascurabili.

Ammetterò, con approssimazione largamente sufficiente per i casi pratici, che le capacità dei lati del ponte verso terra possano considerarsi come concentrate e come applicate tra i vertici del ponte e la terra; lo schema del ponte si riduce allora alla rete della fig. 1, nella quale i valori indicati sono le conduttanze immaginarie dei lati della rete stessa.

Applicando il teorema di Campbell [2], possiamo sopprimere nella rete della fig. 1 il nodo T, e in tal modo la rete della fig. 1 si ridurrà a quella di un normale ponte di Wheastone (fig. 2), nel quale le conduttanze immaginarie dei quattro lati del ponte avranno i valori Y'_1, Y'_2, Y'_3, Y'_4, legati

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Vedi A. Marino, *Teorema sulle reti elettriche passive*, «Rendiconti Accademia Lincei», gennaio 1931.

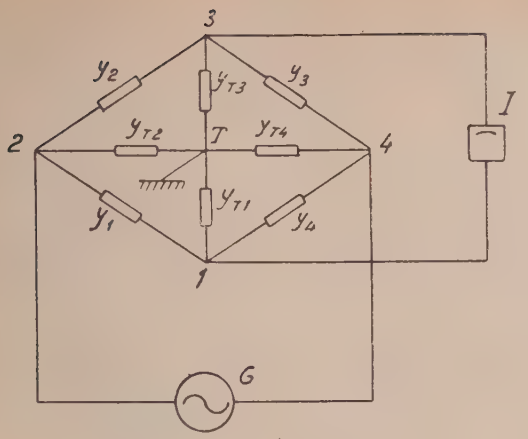


Fig. 1.

a quelli delle conduttanze immaginarie primitive Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, dalle seguenti relazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} Y'_1 = Y_1 + \dfrac{Y_{T1} \cdot Y_{T2}}{M} \\ Y'_2 = Y_2 + \dfrac{Y_{T2} \cdot Y_{T3}}{M} \\ Y'_3 = Y_3 + \dfrac{Y_{T3} \cdot Y_{T4}}{M} \\ Y'_4 = Y_4 + \dfrac{Y_{T4} \cdot Y_{T1}}{M} \end{cases}$$

dove $M = Y_{T1} + Y_{T2} + Y_{T3} + Y_{T4}$.

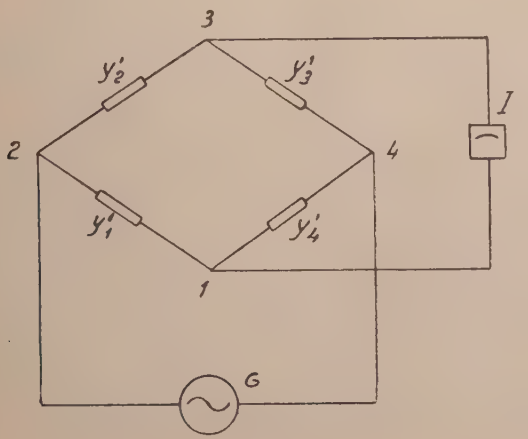


Fig. 2.

Per l'equilibrio del ponte della fig. 2 occorre, come è noto, che sia soddisfatta la relazione:

$$(2) \qquad Y'_1 Y'_3 = Y'_2 Y'_4$$

ossia

$$\left(Y_1 + \frac{Y_{T1} Y_{T2}}{M}\right)\left(Y_3 + \frac{Y_{T3} Y_{T4}}{M}\right) = \left(Y_2 + \frac{Y_{T2} Y_{T3}}{M}\right)\left(Y_4 + \frac{Y_{T4} Y_{T1}}{M}\right)$$

e sviluppando:

$$(3) \qquad Y_1 Y_3 - Y_2 Y_4 = Y_2 \frac{Y_{T1} Y_{T4}}{M} + Y_4 \frac{Y_{T2} Y_{T3}}{M} - Y_1 \frac{Y_{T3} Y_{T4}}{M} - Y_3 \frac{Y_{T1} Y_{T2}}{M}.$$

La relazione (3) può essere scritta nelle due forme seguenti (3 *a*) e (3 *b*):

$$(3\,a) \quad Y_1 Y_3 - Y_2 Y_4 = \frac{Y_{T1}}{M}(Y_2 Y_{T4} - Y_3 Y_{T2}) + \frac{Y_{T3}}{M}(Y_4 Y_{T2} - Y_1 Y_{T4})$$

$$(3\,b) \quad Y_1 Y_3 - Y_2 Y_4 = \frac{Y_{T2}}{M}(Y_4 Y_{T3} - Y_3 Y_{T1}) + \frac{Y_{T4}}{M}(Y_2 Y_{T1} - Y_1 Y_{T3}).$$

Riferendoci alla relazione (3 *a*), osserviamo che essa risulta soddisfatta ed in conseguenza risulta realizzata la condizione di equilibrio del ponte, se sono soddisfatte le seguenti relazioni:

$$(4) \qquad Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4$$

$$(4\,a) \qquad Y_2 Y_{T4} = Y_3 Y_{T2}$$

$$(4\,b) \qquad Y_4 Y_{T2} = Y_1 Y_{T4}.$$

Osserviamo che, quando siano soddisfatte due delle tre relazioni (4), (4 *a*), (4 *b*), la terza risulta anch'essa soddisfatta; dette relazioni conducono senz'altro al dispositivo di correzione ideato da Wagner che, come è noto, consiste (fig. 3) nel disporre tra i vertici 2 e 4 e la terra T, in parallelo rispettivamente con i lati di valore fisso Y_{T2} e Y_{T4} due lati variabili Y'_{T2} e Y'_{T4} e nel regolare tali lati e quelli del ponte in modo da ottenere l'azzeramento contemporaneo dei due strumenti rivelatori I e I' inseriti rispettivamente nella diagonale 1, 3 del ponte principale e tra i punti 3 e T o tra i punti 1 e T del ponte ausiliario; l'azzeramento contemporaneo dei due strumenti suddetti indica che i punti 1, 3 e T hanno lo stesso potenziale e in conseguenza che risultano soddisfatte le relazioni:

$$i_{12}\,Y_1 = i_{23}\,Y_2$$
$$i_{14}\,Y_4 = i_{34}\,Y_3$$
$$i_{2T}(Y_{T2} + Y'_{T2}) = i_{23}\,Y_2$$
$$i_{4T}(Y_{T4} + Y'_{T4}) = i_{34}\,Y_3$$
$$i_{2T}(Y_{T2} + Y'_{T2}) = i_{12}\,Y_1$$
$$i_{4T}(Y_{T4} + Y'_{T4}) = i_{41}\,Y_4.$$

Dividendo la prima relazione per la seconda, la terza per la quarta, la quinta per la sesta, ed osservando che $i_{12} = i_{14}$, $i_{23} = i_{34}$, $i_{2T} = i^{4T}$,

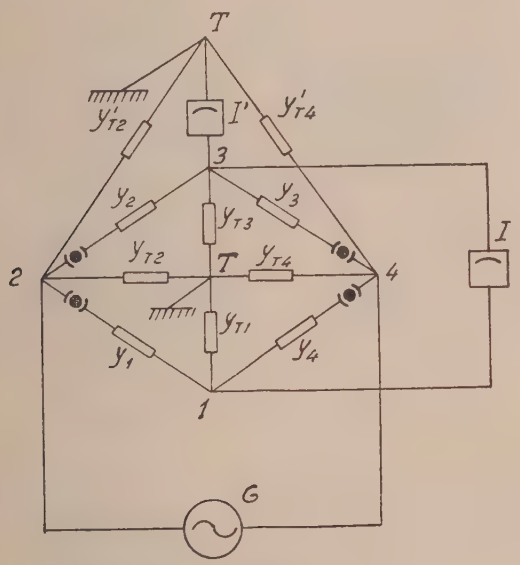


Fig. 3.

si ricavano senz'altro le relazioni (4), (4 *a*), (4 *b*) con la sola differenza che alle conduttanze immaginarie Y_{T2} e Y_{T4} sono sostituite quelle

$$(Y_{T2} + Y'_{T2}) \text{ e } (Y_{T4} + Y'_{T4}).$$

Se invece di riferirci alla relazione (3) messa sotto la forma (3 *a*), ci riferiamo alla relazione (3) messa sotto la forma (3 *b*), con procedimento analogo a quello precedente, si deduce che l'equilibrio del ponte può realizzarsi quando siano soddisfatte due delle tre seguenti relazioni:

(5) $$Y_1\,Y_3 = Y_2\,Y_4$$

(5 *a*) $$Y_1\,Y_{T3} = Y_2\,Y_{T1}$$

(5 *b*) $$Y_3\,Y_{T1} = Y_4\,Y_{T3}$$

Dette condizioni conducono ad un secondo dispositivo di correzioni differente da quello di Wagner, dispositivo rappresentato in fig. 4 e che consiste nel disporre in parallelo con lati di valore fisso Y_{T_1} e Y_{T_3} due lati variabili rispettivamente Y'_{T_1} e Y'_{T_3} e nel regolare tali lati e quelli del ponte in modo da ottenere l'azzeramento contemporaneo dei due indicatori I e I' inseriti rispettivamente nella diagonale 2, T o 4, T del ponte ausiliario. L'azzeramento contemporaneo dei due strumenti suddetti indica che i punti 2, 4 e T hanno lo stesso potenziale e che pertanto sono soddisfatte le rela-

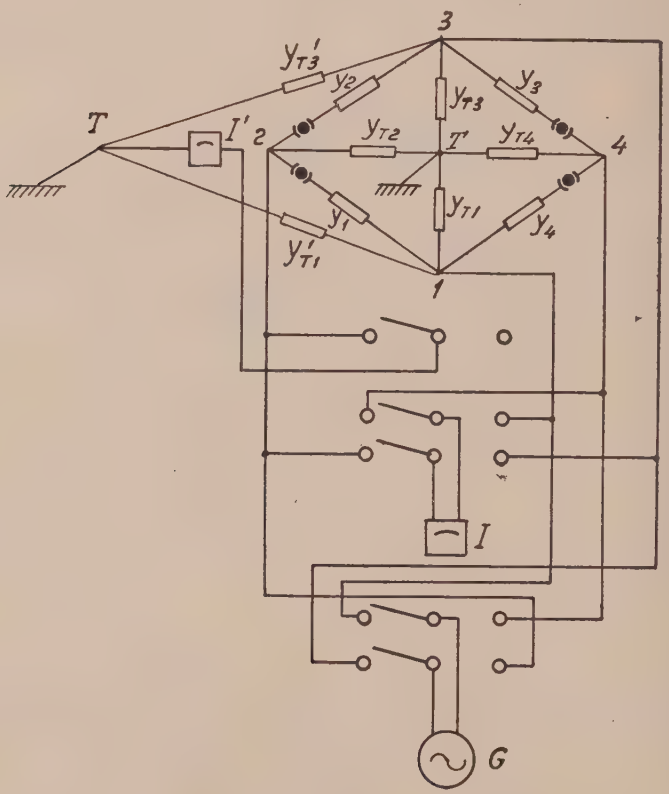


Fig. 4.

zioni (5), (5 *a*) e (5 *b*), nelle quali alle conduttanze immaginarie Y_{T_1} e Y_{T_3} sono sostituiti i nuovi valori $(Y_{T_1} + Y'_{T_1})$ e $(Y_{T_3} + Y'_{T_3})$.

Questo secondo dispositivo di correzione risulta meno comodo del primo, in quanto che per controllare l'equilibrio del ponte è necessario disporre di un commutatore che consenta di scambiare la diagonale di alimentazione del ponte principale con quella di rivelazione: tuttavia il

secondo dispositivo di correzione è anche molto utile, poichè vi sono dei casi in cui esso è applicabile, mentre non lo è quello di Wagner.

I due dispositivi di correzione, quello di Wagner e quello indicato nella presente Nota richiedono l'impiego di due strumenti rivelatori; è possibile però realizzare l'equilibrio del ponte con tutti e due i dispositivi di correzione suddetti, utilizzando un solo strumento rivelatore mediante il procedimento seguente:

Riferendoci al dispositivo di correzione della fig. 3, s'interrompa, mediante due chiavi, il collegamento dei lati Y_1 e Y_4 del ponte con il vertice 1 disposto allora lo strumento indicatore nella diagonale 3 , T del ponte costituito dai lati $(Y_{T_2} + Y'_{T_2})$, $(Y_{T_4} + Y'_{T_4})$, Y_2 e Y_3, si varino i valori delle conduttanze Y'_{T_2} e Y'_{T_4} fino ad ottenere l'azzeramento dello strumento indicatore; risulta allora soddisfatta la relazione [1]:

$$(Y_{T_2} + Y'_{T_2})\, Y_3 = (Y_{T_4} + Y'_{T_4})\, Y_2 .$$

Successivamente, ristabilito il collegamento di Y_1 e Y_4 con il vertice 1, ed interrotto il collegamento di Y_2 e Y_3 con il vertice 3, si dispone lo strumento indicatore nella diagonale 1 , T del ponte costituito ai lati $(Y_{T_2} + Y'_{T_2})$, $(Y_{T_4} + Y'_{T_4})$, Y_1 e Y_4 , e lasciando fissi i lati di correzione Y'_{T_2} e Y'_{T_4}, si varino i lati Y_1 e Y_4 fino ad ottenere l'azzeramento dello strumento indicatore: risulta allora soddisfatta la relazione [1]:

$$(Y_{T_2} + Y'_{T_2})\, Y_4 = (Y_{T_4} + Y'_{T_4})\, Y_1 .$$

Essendo così soddisfatte due delle relazioni (4), sarà senz'altro realizzato l'equilibrio del ponte, come può controllarsi ristabilizzando i collegamenti dei lati Y_2 e Y_3 con il vertice 3 e disponendo lo strumento indicatore nella diagonale 1 , 3 .

In modo perfettamente analogo si procede nel caso del secondo dispositivo di correzione, realizzando successivamente l'equilibrio dei due ponti costituiti dai lati $(Y_{T_1} + Y'_{T_1})$ e $(Y_{T_3} + Y'_{T_3})$ e da quelli Y_1 e Y_2 e dai lati $(Y_{T_1} + Y'_{T_1})$ e $(Y_{T_3} + Y'_{T_3})$ e da quelli Y_3 e Y_4.

Il procedimento del controllo dell'equilibrio del ponte con l'impiego di un solo strumento indicatore è molto utile specialmente nei casi in cui uno dei vertici del ponte è collegato a terra; in tal caso non è applicabile al metodo di controllo con due strumenti, mentre risulta applicabile invece quello del controllo con un solo strumento.

(1) È da rilevare che, interrompendo il collegamento dei lati Y_1 e Y_4 con il vertice 1 del ponte od anche il collegamento dei lati Y_2 e Y_3 con il vertice 3 , i valori di Y_{T_2} e Y_{T_4} risultano alquanto variati, ma le variazioni di detti valori possono essere trascurate nei casi pratici.

Nel caso infatti che sia collegato a terra uno dei vertici disposti nella diagonale di rivelazione, ad esempio quello 1, la relazione per l'equilibrio del ponte si riduce alla seguente:

$$(6) \qquad Y_2 (Y_4 + Y_{T4}) = Y_3 (Y_1 + Y_{T2}) .$$

In tal caso quindi il dispositivo di correzione dovrà essere quello di Wagner e per l'equilibrio del ponte occorrerà procedere come segue.

Dopo aver interrotto (fig. 3) il collegamento dei lati Y_1 e Y_4 con il vertice 1, ed aver disposto lo strumento indicatore nella diagonale 3 T, si varino Y'_{T2} e Y'_{T4} fino all'azzeramento dello strumento; risulterà soddisfatta allora la relazione:

$$(7) \qquad (Y_{T2} + Y'_{T2}) Y_3 = (Y_{T4} + Y'_{T4}) Y_2 .$$

Successivamente, ristabilito il collegamento di Y_1 e Y_4 con il vertice 1, si inserisca lo strumento nella diagonale 1, 3 fino ad ottenere l'azzeramento dello strumento indicatore; risulterà allora soddisfatta la relazione (6) dove al posto di Y_{T2} e Y_{T4} figureranno $(Y_{T2} + Y'_{T2})$ e $(Y_{T4} + Y'_{T4})$, e poichè è soddisfatta anche quella (7), si deduce che risulta soddisfatta anche la relazione di equilibrio tra i lati del ponte e cioè la relazione

$$Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4 .$$

Nel caso di messa a terra di un vertice del ponte collegato alla diagonale di alimentazione, occorre ricorrere al secondo dispositivo di correzione ed il procedimento per l'equilibrio del ponte risulta analogo.

Chimica. — *Acqua di mare irradiata con raggi U. V., e sua azione sulla velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio* [1]. Nota di L. Sanzo e F. Pirrone, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

In una nostra precedente Nota [3] esponevamo delle esperienze preliminari ad una serie di ricerche atte a saggiare « se ed in quali proporzioni l'acqua marina, che costituisce l'ambiente naturale di gran parte del mondo organico, acquisti, per effetto delle radiazioni solari o delle radiazioni emesse da una lampada di quarzo a vapori di mercurio, proprietà differenti dell'acqua marina conservata a lungo e che abbia con ogni probabilità perdute le proprietà suddette »; serie di ricerche che, limitate all'azione delle radiazioni di una lampada in quarzo a vapori di mercurio, esponiamo in questa Nota.

L'influenza che l'acqua marina irradiata ha sulla velocità della fermentazione alcoolica è stata valutata sia in confronto a quella dell'acqua marina non irradiata, che a quella dell'acqua distillata irradiata. È noto [4] per le ricerche compiute da Remo de Fazi che l'acqua distillata e sterile, irradiata, anche per un'ora, acquista la proprietà di attivare la velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio; è noto altresì [3] per le ricerche da noi compiute, che l'acqua marina, per se stessa e fuori dall'influenza solare, ha la proprietà di attivare la fermentazione alcoolica se è addizionata alle soluzioni di glucosio in proporzione inferiore al 20 % del liquido fermentante e di ritardarla, invece, se è presente in percentuale superiore.

Nell'azione dell'acqua marina irradiata era necessario pertanto di tener presente:

l'azione attivatrice od inibitrice dovuta ai sali soluti (a seconda che la concentrazione dell'acqua marina presente nel mosto fosse inferiore o superiore al 20 %);

l'azione attivatrice od inibitrice dovuta ai sali soluti irradiati;

l'azione attivatrice dovuta all'acqua solvente irradiata.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico dell'Istituto Centrale di Biologia marina in Messina.

(2) Nella seduta del 26 aprile 1931.

(3) « Rend. Accad. dei Lincei », vol. XIII, 1931, p. 140.

(4) « Rend. Accad. dei Lincei », vol. V, 1927, p. 901.

A tener conto di tali tre diverse azioni abbiamo contemporaneamente istituito, per ogni esperimento, tre soluzioni fermentanti: due come soluzioni testimoni, la prima in acqua distillata irradiata e la seconda in acqua marina non irradiata; la terza, come soluzione di esperienza propriamente detta, in acqua marina irradiata. Le fermentazioni avvenivano contemporaneamente in eguali condizioni di concentrazione pel glucosio (10 %), pel lievito di birra (10 %) e, per la prima e terza soluzione, con esposizione della stessa durata (15–30–45–60–120–180 minuti) ed alla stessa distanza (5 cm.) dalla lampada di quarzo.

La velocità di fermentazione fu determinata misurando, secca e nelle stesse condizioni di pressione barometrica e di temperatura, l'anidride carbonica svolta da ciascuna delle tre fermentazioni. L'irradiazione per la 1ª e la 3ª soluzione venne eseguita con una lampada in quarzo a vapori di mercurio della casa Gallois (120 volts, 3.5 ampères).

Dalle esperienze eseguite nelle surriferite condizioni risulta:

1° che l'acqua marina irradiata ha un'attività acceleratrice sulla fermentazione, di fronte all'acqua marina non irradiata;

2° che tale attivazione è maggiore dopo due ore di irradiazione;

3° che tre ore di irradiazione, e più ancora, conducono la fermentazione con acqua marina irradiata, alla stessa velocità di quella eseguita con l'acqua marina non irradiata.

Ciò si rileva facilmente dalla tabella che segue, ove nelle colonne verticali, in corrispondenza alle ore in cui è stata fatta la lettura, è segnata la quantità di CO_2 totale in cc., che si sarebbe svolta dalla fermentazione con acqua marina irradiata, se la fermentazione con acqua marina non irradiata ne avesse svolto 100 cc.:

Tabella N. 1.

Durata della fermentazione	Durata della esposizione ai raggi ultra-violetti						
	15′	30′	45′	60′	120′	180′	240′
1h	cc. 100.60	101.50	102.10	102.61	108.28	101.15	101.08
2h	» 100.95	101.73	102.25	102.85	107.54	100.85	100.93
3h	» 101.10	102.40	102.80	103.49	106.12	100.00	100.03
4h	» 100.90	100.70	102.60	103.85	104.93	99.80	99.95
5h	» 100.10	99.73	102.45	102.73	103.01	99.91	99.90
6h	» 99.10	98.95	101.90	100.75	101.18	100.03	99.96

Il confronto poi, tra la fermentazione con acqua di mare irradiata e quella con acqua di mare distillata fa rilevare:

1° che la fermentazione con acqua di mare irradiata è meno veloce di quella con acqua distillata irradiata;

2° che l'acqua di mare irradiata riceve per irradiazione di 15, 30, 45, 60 minuti, un'attivazione crescente rispetto la velocità stessa di fermentazione;

3° che irradiazioni di 120, 180 minuti conferiscono all'acqua di mare proprietà tali per le quali la velocità di fermentazione riesce, nello insieme, decrescente in confronto a quella della fermentazione eseguita con acqua distillata, sterile, irradiata.

Nella tabella 2ª si riportano i valori che assume per irradiazione di 15, 30, 45, 60, 120, 180 minuti la produzione totale di CO_2 dopo 1-2-3-4-5-6 ore della fermentazione con acqua marina irradiata, calcolando uguale a 100 lo sviluppo totale di CO_2 da parte della fermentazione con acqua distillata, sterile, irradiata.

Tabella N. 2.

Durata della fermentazione	Durata dell'esposizione ai raggi ultra-violetti					
	15′	30′	45′	60′	120′	180′
1h	cc. 73.34	77.50	78.30	80.15	73.50	72.95
2h	» 75.80	78.15	79.50	81 20	74.15	74.00
3h	» 78.15	79.30	80.75	83.10	75.30	75.40
4h	» 80.40	81.17	82 70	84.70	76.20	75.98
5h	» 81.20	82.06	83.30	85.15	77.70	77.10
6h	» 83.45	83.51	84.47	85.90	78.30	78.80

I risultati ottenuti, e secondo i quali l'acqua marina riceve, nelle condizioni sperimentali attuate, un massimo di attivazione con un'esposizione ai raggi U. V. intorno a due ore, mentre, con un'esposizione più prolungata viene a perdere una tale proprietà ed a comportarsi come l'acqua marina non irradiata, pongono in rilievo il quesito « quali nuove condizioni si siano, con una più prolungata irradiazione, determinate nell'acqua marina perchè essa non abbia a rispondere più come prima relativamente all'azione sulla fermentazione alcoolica ».

In vista di un tale interessante quesito noi abbiamo, per il momento, studiato l'attivazione che ha l'acqua marina irradiata sulla fermentazione alcoolica, mettendoci in nuove condizioni sperimentali e cioè facendo avvenire la fermentazione:

1° con acqua marina irradiata in pallone di quarzo chiuso e completamente pieno;

2° con acqua marina privata dei gas disciolti per ebollizione, a riflusso, di 20 minuti;

3° con acqua ottenuta portando a 500 cc. con acqua distillata la soluzione dei sali ottenuti con quelli provenienti dall'evaporazione ed essiccamento a 100–105 gradi di 500 cc. di acqua marina [1].

I risultati ottenuti per fermentazioni dei diversi liquidi irradiati per 120 minuti a 5 cc. di distanza dalla lampada, di confronto con la fermentazione di acqua marina non irradiata ci dicono (tabella 3):

Tabella N. 3.

Liquido irradiato	Durata della fermentazione					
	1h	2h	3h	4h	5h	6h
Acqua marina in presenza d'aria	cc. 108.28	107.54	106.12	104.93	103.02	100.80
» » » assenza »	» 107.90	106.84	106.07	104.18	102.65	100.98
» » bollita per 20′	» 105.30	104.38	103.94	102.01	100.70	100.02
Soluzione in H_2O distillata e sterile dei sali ottenuti per evaporazione di acqua marina	» 105.00	103.97	103.80	101.90	100.50	100.01

1° che l'irradiazione dell'acqua marina in pallone di quarzo chiuso e ben tappato non altera sensibilmente i valori ottenuti nella fermentazione con acqua marina irradiata in presenza di aria;

2° che l'acqua marina per ebollizione di 20′ perde parte della sua proprietà attivante;

3° che l'acqua ottenuta per ridissoluzione in 500 cc. di acqua distillata e sterile, dei sali ottenuti per evaporazione di 500 cc. di acqua marina, ha perduto parte della sua proprietà attivante, sensibilmente nelle stesse proporzioni dell'acqua marina bollita per 20′.

Da tutto quanto precede riteniamo poter dedurre:

(1) Non ci siamo serviti di acqua marina artificiale, ottenuta, come operò Richet («C. R.», 1929, vol. 189, p. 219), con prodotti puri per analisi, data l'impossibilità di ottenere una soluzione perfettamente uguale a quella marina in genere ed a quella usata in ispecie, per la presenza in essa di numerosissime sostanze in tracce appena sensibili come SiO, Fe, NH_3, Fl, P, Li, I, B, As, Cu, Ag, Au, Zn, riconosciuti e dosati, oltre Mn, Sr, Ce, Ru, Al, riconosciuti e non dosati secondo le analisi di numerosi autori.

1° che l'acqua marina irradiata acquista la proprietà di attivare la fermentazione alcoolica se l'esposizione è inferiore ad un dato tempo: a tre ore nelle nostre condizioni sperimentali;

2° che tale attività è dovuta in parte all'acqua del mare considerata come una soluzione di una data qualità e quantità di sali, ed in parte ad un « quid » indeterminato;

3° che l'attività di un tale « quid » scompare sia per ebollizione dell'acqua marina per 20′, sia per evaporazione di essa e ridissoluzione dei sali ottenuti in acqua distillata e sterile, nel volume primitivo.

Geologia. — *Il monte La Queglia in Abruzzo.* Nota di S. Sorrentino, presentata [1] dal Socio A. Martelli.

Il monte denominato La Queglia si estende per circa cinque chilometri, tra gli abitati di Corvara e Pescosansonesco in provincia di Pescara, secondo una direzione Nord–Sud ed una larghezza massima che non supera i m. 500 costituendo così una caratteristica cresta arcuata lungo il suo asse maggiore e delimitata lateralmente da pareti abrupte. Quella del lato occidentale del rilievo, pur essendo ripida e scoscesa non può considerarsi una vera parete verticale, come può ritenersi invece il fianco orientale, perchè il complesso calcareo che forma il rilievo, salvo arricciamenti locali, è costituito da strati inclinati ad occidente, talora superando anche i 70° di pendenza e con direzione coincidente con l'asse longitudinale del monte. La massima quota, che è di m. 988, si trova ad un terzo circa della sua lunghezza al sud di Corvara, di dove la cresta si abbassa lentamente per un altro terzo ancora fino al Pizzo della Croce (m. 864), per presentare in seguito una notevole diminuzione dell'altimetria fino ad arrivare a Pescosansonesco (m. 517).

Questo rilievo calcareo, tutto circondato all'intorno dai sedimenti marnoso–arenacei del miocene superiore e costituenti la fascia pedemontana di questo versante dell'Appennino, è stato riferito, dai diversi autori, ora al cretaceo, ora all'eocene ed anche al miocene medio. Non entro in merito alla questione cronologica del calcare de La Queglia, avendo la Nota il solo scopo di stabilire l'interpretazione del suo profilo e della sua tettonica, essendo anche su questa discordi i pareri dei geologi.

Il Lotti [2] ritenendo il calcare del monte di età cretacea, ne spiega l'affioramento a mezzo di due faglie, l'una orientale all'asse della cresta ed

(1) Nella seduta del 26 aprile 1931.

(2) Lotti B., *Geologia e tettonica della valle del Pescara.* « Mem. desc. Carta Geol. d'Italia », Roma 1926, vol. XX.

effettivamente anche da me constatata, ed un'altra occidentale, da escludersi secondo i miei studi.

Il Principi [1] invece, ritiene La Queglia come un « facoide » eocenico poggiato sulle rocce argillose arenacee del sarmaziano.

Secondo i rilievi da me intrapresi nel territorio, risulterebbe trattarsi di un affioramento di nucleo d'anticlinale, sporgente sul rigetto di una faglia che interessa la testa dell'anticlinale stessa, secondo il profilo qui sotto tracciato. In questa Nota espongo le ragioni ed i fatti che mi hanno portato a tale conclusione.

L'asse longitudinale de La Queglia, che come si è accennato corrisponde alla direzione degli strati, costituisce il prolungamento di quello di una anticlinale a strati molto raddrizzati, che scende dai pressi dell'abitato di Brittoli. Questa anticlinale man mano che si spinge verso sud, si innalza e tende ad allargare le sue ali, tanto che gli strati omologhi, nel distanziarsi sempre più verso sud permettono l'affioramento degli strati sempre più profondi. Infatti, sotto Brittoli, che può considerarsi l'inizio di questa anticlinale, lo strato più profondo affiorante è costituito da un conglomerato pugdingoide calcareo, tenacemente cementato, che presenta le due gambe della piega molto avvicinate fra loro, mentre già nel torrente Cigno esse sono distanziate e fanno affiorare, vicino al molino di Brittoli, le marne sottostanti al conglomerato. Lo stesso si ripete sopra il *tratturo*, dove il conglomerato dell'ala orientale si dirige nel vallone della Rota (ovest di Pietranico), mentre quello occidentale si spinge tra la regione Tuolfo ed il colle Tobino, passante pel colle S. Lucia e favorendo l'affioramento da nord a sud delle marne a lenti di gesso: nei « I Colli », sud di colle Rotondo, nella regione Le Case sul versante occidentale. Sotto il cimitero di Corvara, a ovest di colle Pizzuto e nei pressi di colle Rotta, nel versante orientale.

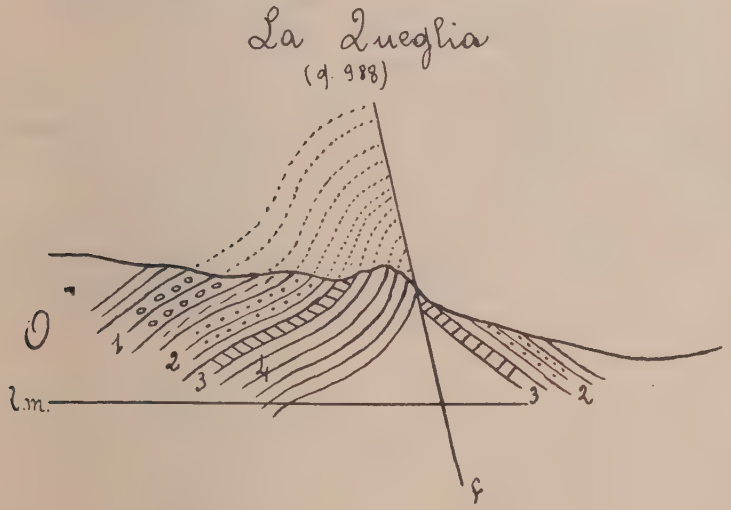
Al sud di Pescosansonesco il gesso non affiora più perchè la cresta dell'anticlinale si abbassa e questa tende a chiudersi subendo uno spostamento di inclinazione nei suoi strati secondo sud-ovest e sud–est, come può rilevarsi tra la carrozzabile, il *tratturo* ed il fosso che scende da colle Soda.

L'anticlinale ora esaminata, figura, nel profilo dato dal Principi, come una piega a vòlta chiusa ed ampia, allargata ad occidente, sulla cui testa poggerebbe il facoide eocenico. A tale interpretazione non posso associarmi perchè ho constatato, presso la cima, una netta faglia. Sul versante occidentale del monte, oltre alle forti pendenze ad ovest riscontrate a Brittoli, Colle Erto, Colle Selva e S. Lucia, anche gli affioramenti delle marne a lenti di gesso che tra colle Rotondo e la regione Tuolfo costituiscono la

(1) Principi P., *Osservazioni geologiche e morfologiche sulla valle del Pescara.* « L'Universo », 1930, anno XI, n. 5.

gamba occidentale della piega, hanno inclinazioni ad ovest. Dette inclinazioni aumentano sempre fino alla cresta del monte dimostrando la coincidenza dell'asse della cresta stessa con quella dell'anticlinale, i cui strati avvicinandosi al nucleo, tendendo sempre più a raddrizzarsi e stiparsi. Non si può neppure ammettere un ginocchio laterale o comunque una flessione tale da spostare l'apice dell'anticlinale fino a farlo sporgere sul lato orientale de La Queglia, giacchè fino alla sommità del monte non si notano inversioni di pendenza o sub-orizzontalità degli strati da favorire questa ipotesi. Escluderei quindi ogni traccia di fenomeni di carreggiamento.

Se poi a quanto sopra detto aggiungiamo la constatazione di fatto che al nord di Pescosansonesco, ossia quando l'anticlinale incomincia ad abbassarsi nuovamente, la stessa cresta de La Queglia mostra strati ad inclina-



zione opposta, cioè a dire che quelli ad occidente dello spartiacque sono inclinati ad ovest mentre quelli ad oriente di questo sono pendenti ad est, abbiamo non solo la conferma che l'asse longitudinale della piega coincide con quello della cresta del monte, ma anche che La Queglia è dovuta ad una formazione in posto e quindi radicata. Che poi l'anticlinale al sud di Pescosansonesco tende ad abbassarsi e quindi a chiudersi, lo si ricava dal fatto che i corrispondenti strati degli opposti versanti si distanziano sempre meno dalla sommità della piega fino a ricoprire man mano i sedimenti più profondi; e cioè in modo inverso a quanto si riscontra al nord di Corvara dove l'anticlinale si innalza al sud e con esso si accentuano le pendenze degli strati. Inoltre, come è stato già detto, al sud di Pescosansonesco, le inclinazioni degli strati subiscono una deviazione da ovest a sud-ovest e da est a sud-est.

Un fattore di grande importanza che comprova la interpretazione da me data, è la presenza delle marne calcaree (miocene medio) sottostante ai gessi. Questo miocene medio, riconosciuto sulle falde orientali de La Queglia per il contatto anormale che ha con un tipo litologico più antico (calcare talvolta sub-cristallino), non presenta, sul versante occidentale, netta distinzione con questo calcare sottostante giacchè tra i due tipi litologici si ha un graduale passaggio.

Concorrono poi alla interpretazione dell'andamento dell'anticlinale così delineata anche fattori morfologici che si rilevano nel territorio.

I tipi litologici esaminati, seguono nei loro affioramenti l'altimetria de La Queglia. Infatti mentre sul versante orientale di questa, ossia su quello interessato dalla faglia, gli affioramenti delle stesse formazioni sono quasi alle stesse quote, nel versante occidentale, si innalzano invece a costituire le massime quote, per poi abbassarsi invece ancora al sud con l'altimetria del rilievo.

In conclusione, La Queglia è dovuta ad un ellissoide in posto con nucleo affiorante nella sua parte più elevata e interessato da una faglia sulla testa dell'anticlinale stessa. Faglia che sussiste anche nel caso della miocenicità di tutto il calcare del monte, inquanto ciò porterebbe solo ad una diminuzione del valore del rigetto [1]. Questa struttura de La Queglia non è un esempio isolato nella regione pedemontana adriatica, poichè analoghi ellissoidi a nucleo affiorante e anche più evidenti, si ripetono nelle pieghe mioceniche di questo versante dell'Appennino, come esporrò in una prossima Nota.

(1) Non entro nella questione dell'età di questi calcari, non avendo fatte ricerche speciali di fossili, ma credo opportuno accennare alla loro possibile miocenicità, giacchè anche altri affioramenti della regione ritenuti eocenici sono da ascriversi al miocene medio, come ho potuto tra l'altro verificare in alcuni punti della regione Toffarelli, monte Pietra Rossa e regione Buffaretta.

Botanica (Patologia vegetale). — *Fattori eccitativi dell'accrescimento di neoplasmi vegetali da B. tumefaciens* [1]. Nota di V. Rivera, presentata [2] dal Corrisp. L. Petri.

Facilmente può essere verificato, da chiunque si dedichi alla produzione di neoplasie sperimentali da *B. tumefaciens*, che piante giovani dànno sviluppo, molto più che quelle vecchie, a neoplasmi di notevoli dimensioni e di rapida crescita e che organi a vivace accrescimento, quali, ad esempio, le zone apicali, sono capaci di generare tumori molto più rapidamente di quello che possano fare organi che siano già molto avanti nello sviluppo e specialmente ad avanzata lignificazione, quali ad esempio le zone basali della stessa pianta; così come piante, che si trovino in ottime condizioni di sviluppo, possono dar vita a neoplasie notevolmente più vistose di quello che possano fare piante che si sviluppino stentamente per condizioni difficili di terreno o di ambiente aereo; in complesso ben si comprende che la capacità di accrescimento di questi tessuti meristemali patologici è in diretta relazione con le possibilità della nutrizione di essi e con le capacità accrescitive della zona dell'organo su cui si vengano a sviluppare, cioè con la giovanilità dei tessuti che la costituiscono e, tra essi, soprattutto con le capacità del tessuto formatore o *cambio*.

A questo primo gruppo di fattori, che si riferiscono alle condizioni di vegetazione ed alle capacità accrescitive dei tessuti dell'ospite, se ne può aggiungere un secondo, da riportare alla varietà del parassita ed alle proprietà biologiche di esso, che hanno talora un'azione tutta caratteristica e molto spiccata.

Riker [3] ad es. ha potuto isolare un microrganismo, che è capace di determinare, sul punto della inoculazione, la formazione di radici aeree.

La capacità di eccitare la formazione di radici sarebbe dunque, secondo questi rilievi, un carattere della specie e della varietà del microrganismo adoperato, più che la manifestazione di una necessità fisiologica della pianta ospite sotto l'azione di altri stimoli.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia vegetale del Regio Istituto Superiore agrario di Perugia.

(2) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(3) Riker A. Z., *Studies on infections Hairy-root on nursery apple trees* « Journ. of Agricultural Research. », vol. 41, n. 7, Wash. D. C., 1930.

Non vogliamo discutere sul significato delle esperienze del Riker, ma questa capacità di dar luogo alla formazione di radici aeree da parte di neoplasmi è sempre connessa con caratteristiche della specie o della varietà del microrganismo adoperato, o invece può dipendere, in qualche caso, da particolari condizioni ambientali?

Può cioè uno stesso microrganismo dar luogo a neoplasmi semplici ed a neoplasmi portanti appendici radiciformi, a seconda delle condizioni sperimentali provocate?

Gli esperimenti che riportiamo tendono a far rispondere affermativamente a quest'ultimo quesito.

Le inoculazioni sopra *Pelargonium* si facevano con un ceppo di *Bacterium tumefaciens*, isolato da un neoplasma sperimentale, a sua volta prodotto con un ceppo originariamente ottenuto dal prof. Magrou.

Venivano rinchiusi, dentro casse–schermo di legno o di metallo, allevamenti di *Pelargonio*, tutti provenienti per propagazione da un unico individuo; sopra ciascuna pianta erano state praticate una o più inoculazioni di *B. tumefaciens*, al momento della chiusura della pianta nello schermo, sicchè lo sviluppo del neoplasma s'iniziava e proseguiva sempre nelle condizioni di schermatura prodotte.

Queste consistevano in una semplice e doppia schermatura di piombo, ottenuta, rispettivamente, mediante una cassa, ad ermetica chiusura, di piombo e mediante due casse di piombo, una, la più grande, capace di contenere la prima; inoltre una terza cassa–schermo era, come la prima, di piombo, ma tappezzata per intero, sulla superfice interna di carta nera. Si disponevano poi opportuni controlli–schermi in legno, di dimensioni identiche a quelle delle casse di Pb e completamente tappezzati di carta nera nell'interno.

I valori numerici particolari dello sviluppo dei neoplasmi dagl'innesti freschi sperimentali prodotti saranno pubblicati in un'altra memoria: qui riferiamo sui risultati definitivi delle prove fatte.

Si noti che la prova è stata riprodotta quattro volte, in periodi dell'anno diversi e lontani, sempre sopra pelargoni, e si è sempre avuto un risultato uniforme, che può sintetizzarsi come appresso:

1° Mentre al termine del periodo [1] della schermatura (durata da 10 a 30 giorni nei vari esperimenti a seconda della temperatura dell'ambiente) nessuna delle piante in schermo di legno (4 colture) era portatrice della minima formazione neoplastica visibile sulla zona della inoculazione, tutte le piante rinchiuse in schermo di Pb invece (4 od 8 colture), non solo portavano al punto dell'innesto sviluppatissime formazioni neoplastiche, ma queste inoltre portavano, *in ogni caso della schermatura con piombo* (semplice o doppio) radici aeree più o meno numerose e più o meno lunghe, a seconda

(1) Dopo le piante, venivano dalle casse-schermo portate in piena luce in serra.

dei casi, tutte con sviluppo geotropicamente positivo. Queste formazioni avevano tutte la struttura anatomica della radice, l'apice di esse era munita di cuffia e numerosi peli radicali erano sviluppati sopra la loro superficie.

La schermatura con Pb induceva cioè la formazione rapidissima di voluminose masse neoplastiche sempre fornite anche di numerose radici, mentre la schermatura con legno non dava luogo, nel giro di giorni nei quali l'esperimento si svolgeva, a visibili formazioni tumorali nella zona inoculata.

2° Negli stessi schermi di piombo si poteva rilevare qualche volta una certa differenza di sviluppo delle formazioni neoplastiche, a seconda che si trattava dello schermo di piombo doppio o semplice oppure dello schermo tappezzato di carta e cioè lo sviluppo della massa neoplastica era un po' maggiore nel primo caso, un po' minore nell'ultimo; inoltre le appendici radiciformi portate dai neoplasmi erano più importanti nel primo caso, che nel secondo, ed apparivano appena formate nel terzo caso.

In esperimenti successivi si volle prolungare la esposizione nelle casse-schermo fino ad ottenere formazioni tumorali anche sopra le piante schermate con legno (che negli esperimenti precedenti davano tumori solo dopo il trasporto e la esposizione in serra): si ebbero così, per schermi costituiti di *vari metalli*, *vetro* e *legno*, in 50 giorni di esposizione (marzo-aprile), apprezzabili masse neoplastiche ed anche successiva formazione di radici aeree su esse nei casi che si riportano:

a) Sollecite e straordinarie formazioni di radici aeree in schermo duplice e semplice di Pb;

b) più tardive e meno sviluppate radici aeree in schermo di Pb, *tappezzate di carta*, in schermo di *ferro* ed in schermo di *vetro* (contenuto in casse di legno);

c) nessuna formazione di radici aeree in schermo di *zinco* ed in schermo di *legno*.

Quanto sopra ci fa pensare che la formazione delle radici aeree sopra neoplasmi vegetali da innesti freschi in piante rinchiuse possano ottenersi a causa della umidità che si accumula nella cassa, ma che la parete di Pb esalta notevolmente tali possibilità.

Queste prove permettono poi qualche altro rilievo:

Lo Smith (1) ricordando il fatto che i tumori vegetali possono portare radici, come aveva dimostrato la sig.na Brown, avanza l'ipotesi che questo possa dipendere dalla natura del tessuto inoculato, che cioè alcuni tessuti inoculati si dimostrino adatti a produrre tumori portanti foglie o fiori, altri tumori portanti radici: tale scoperta, secondo Smith, è importante per la conoscenza della natura dei tumori e getta un raggio di luce sulla natura dei teratomi animali.

(1) Smith E., *An Introd. to Bact. Diseases of Plants*, Saunders, 1920, p. 421.

È opinione invece di chi scrive questa Nota, data la uniformità e la costanza dell'esito delle prove sperimentali provocate, che la formazione di radici aeree si debba, nel caso della specie e varietà di microrganismo patogeno adoperato, al mezzo ambientale sperimentalmente prodotto, per la eccitazione alla crescenza, che, con tale artificio sperimentale, si determina. La schermatura con Pb si dimostra indubbiamente capace in sè e per sè di indurre costantemente più di qualunque altra delle schermature sperimentate, la produzione di radici dal tessuto neoplastico, così come potrebbe supporsi che altre condizioni ambientali possano indurre invece lo stesso tessuto neoplastico a dare foglie o fiori.

Potrebbesi anche aggiungere che in qualche caso, non solo dal tessuto neoplastico si sono venute formando radici, ma anche dal tessuto normale

Fig. 1. – Una serie di tumori portanti radici ottenuti schermando con Pb le piante appena ricevuto l'innesto di *Bact. tumefaciens*.

del fusto: questo fatto ci conferma nella spiegazione data, che cioè la emissione di radici, mentre rappresenta l'indizio di un'esuberante energia di crescenza dei tumori, è indotta esclusivamente da particolari condizioni del mezzo, nel quale la parte aerea si sviluppa.

Quali possono essere le cause che hanno determinato così accentuato sviluppo delle masse neoplastiche in schermi di piombo ed anche la formazione su di esse di più o meno numerose e sviluppate radici aeree?

Riportiamo la spiegazione del fatto a differenti gruppi di cause, che crediamo si completino:

1° La differente umidità dell'aria, esistente nell'interno dei vari schermi (legno e piombo), è indubbiamente il primo fattore da considerare in prove culminate con la formazione di radici aeree da tessuti neoplastici, patologici e normali.

Infatti, sebbene abbiamo con ogni cura cercato di elevare la umidità dell'aria chiusa nell'interno delle casse-schermo di legno, includendovi bacinelle di acqua, abbiamo tuttavia sempre constatato, mediante igrometri posti nelle casse stesse, che l'umidità dell'ambiente era notevolmente diversa

Fig. 2. - Uno dei tumori portanti radici riprodotto a $^2/_3$ della grandezza naturale.

nei due casi di schermi di legno e di schermi di Pb e cioè, mentre si manteneva attorno a $\frac{81-83}{100}$ nelle casse di Pb era di circa $\frac{65-70}{100}$ in quelle di legno (ciò oltrechè per la porosità del legno, anche per altre cause, cui più appresso accenneremo).

La differenza di umidità non spiega tuttavia da sè sola i fatti rilevati, perchè le differenze di sviluppo nei neoplasmi osservate nelle varie casse di Pb, e cioè in Pb doppio, semplice e Pb tappezzato di carta, nonchè quelle rilevate in colture schermate con ferro, zinco e vetro, si verificano in condizioni di umidità quasi eguale dell'ambiente e perciò altri fattori devono esercitare la loro influenza in questa caratteristica e così spiccata eccitazione allo sviluppo dei tessuti neoplastici, e cioè:

2° Indubbiamente la sottrazione completa della radiazione luminosa, capace d'indurre, con l'*eziolamento* dei tessuti normali, un loro rapidissimo accrescimento, deve esercitare la sua influenza anche sopra i tessuti patologici da *Bact. tumefaciens*, inducendo una più affrettata moltiplicazione cellulare: la luce è infatti in alcuni casi un noto limitatore dell'accrescimento dei tessuti vegetali in genere per le piante a clorofilla.

Vogliamo però far rilevare che nel nostro caso la schermatura della radiazione ambientale non riguarda soltanto le radiazioni componenti lo spettro luminoso, perchè la schermatura con casse chiuse di piombo non lascia passare, della radiazione ambientale, sia una parte di quella a più corta λ di quella luminosa, sia tutta la radiazione a più lunga λ (meno quella calorifica) di quella componente la luce.

Della radiazione cioè, che è presente nel comune ambiente di coltura, gli schermi di piombo schermerebbero una parte maggiore di quella che sarebbe schermata dal legno: ciò potrebbe spiegarci in parte il maggior ritmo di accrescimento dei tessuti neoplastici delle piante allevate in Pb: questa interpretazione ci porterebbe ad ammettere che si determini, nei tessuti in accrescimento rinchiusi entro le casse, *una eziolatura in differente grado*, a seconda della natura del mezzo schermante adoperato.

3° Un terzo fattore, che pensiamo possa anche equivalere agli altri, è costituito dalla *ionizzazione dell'aria*, che si verifica entro recipienti ermeticamente chiusi.

La ionizzazione dell'aria in schermi chiusi è dovuta direttamente alla radiazione penetrante o ultra–γ. Come è noto, con determinazioni del potere di assorbimento si sono constatati degli effetti di diffusione per i diversi metalli [1] (per esempio zinco e piombo).

Si aggiunga inoltre che la ionizzazione dell'aria può contribuire ed elevare la umidità presente nelle casse–schermo di metallo ed a stimolare l'accrescimento [2].

(1) v. Hoffmann und Lindholn, «Gerlands Beiträge zur Geophysik», Bd. XX, S. 12–54, Leipzig, 1928.

(2) v. Petri L., *La ionizzazione dell'aria e l'accrescimento delle piante* in «Ann. di tecnica agricola», vol. I, p. 111, 1928 e «Boll. della R. Staz. di Patol. Vegetale di Roma», 1928, p. 118.

Devesi infine tenere anche presente che la parte della radiazione cosmica, che è assorbita dal metallo (sia pure in piccola proporzione) potrà dar luogo, allo stesso modo di quello che si verifica per i raggi gamma ed i raggi X [1], ad una *radiazione secondaria*, la cui azione sopra i tessuti normali e patologici delle piante vegetanti negli schermi chiusi può contribuire a determinare gli effetti biologici rilevati.

Botanica (Patologia vegetale). — *Le mico-batteriosi* [2]. Nota di R. Perotti, presentata [3] dal Socio P. R. Pirotta.

È noto quanta incertezza regni nella conoscenza delle batteriosi che colpiscono i vegetali, in ispecie per quel che ne riguarda il determinismo estrinseco ed intrinseco; e, come, a partire dall'antica ipotesi negativa di De Bary, per giungere ai più recenti studi in argomento, non sia stato possibile di fare sulla eziologia dei numerosi casi constatati che illazioni più o meno arbitrarie e comunque tutt'altro che soddisfacenti.

Una forma batterica, si è visto, a volte colpire una determinata specie vegetale superiore ed a volte non; in alcuni casi, si è constatato, attaccare specie diverse di piante, anche sistematicamente non affini, ed in altri si è creduto di rilevare in essa una evidente specificità infettiva.

Il complesso giuoco dello stato di virulentazione del parassita, di fronte a quello di recettività degli ospiti; la mutabilità delle svariate influenze ambientali, nei riguardi sia dell'attività dell'uno come di quella dei secondi, sono stati chiamati in causa per spiegare come a volte l'infezione abbia luogo, altre volte non, ed anche, nel primo caso, con manifestazioni più o meno varie e gravi, trovandosi in ciò valido sostegno nella odierna teoria che nega, in genere, la fissità del parassitismo delle forme, del quale si afferma anzi la contingenza.

Questo ora qui non si discute ed anzi può venire più o meno ragionevolmente ammesso; ma, in base ad alcune osservazioni e ad alcuni reperti sperimentali, di cui si rende conto nella presente Nota, è d'uopo riconoscere come una circostanza, fino al presente, sia sfuggita all'esame eziologico di taluni casi di batteriosi, la quale permette di affermare in essa la causa principale e indubbia della patogenicità.

(1) Vedi Graez L. e Rossi C., *Le nuove teorie atomiche e la costituzione della materia*. Hoepli, Milano, 1925, p. 101; v. pure M. De Broglie, *Les Rayons X*, 1922, p. 140; vedi pure De Broglie M. e L., *Introdution à la physique des rayons X et gamma*, Paris Gantier, 1928; v. pure Cluzet 9, *Precis de Physique médicale*, Doin, Paris, 1926, p. 656.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia Vegetale del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa.

(3) Nella seduta del 12 aprile 1931.

In un diffuso morbo del *Nerium Oleander* L., in tutte le sue varietà coltivate nella regione Pisana, da me constatato in questi ultimi anni, manifestantesi con caratteristiche deformazioni ed ipertrofie delle infiorescenze e dei frutti [1], l'esame microscopico ha permesso di accertare nei tessuti alterati la presenza costante di *Alternaria tenuis*, Nees e di un *Bacterium* sp., fra i quali si è potuta accertare la esistenza di mutui rapporti funzionali.

Coltivati i due microrganismi in coltura pura su piastre di agar–fagiuoli neutro colorato con azzurro bromo timolo al 0.04 %, per modo che distinte anse del materiale fossero disposte a varia distanza l'una dall'altra sullo stesso piatto, fu osservato che il fungo assumeva uno sviluppo maggiore là dove esso veniva a trovarsi più ravvicinato al batterio che, per la produzione di acidi, ingialliva il substrato, mentre questo restava inalterato in corrispondenza delle colonie fungine.

Era quindi necessario di ammettere che lo sviluppo dei due microrganismi venisse ad essere correlazionato per il fatto della emissione da parte del batterio di sostanze di natura tale, quanto meno acide, sì da contribuire allo sviluppo del parassita fungino.

In altri casi delle stesse manifestazioni patologiche dell'Oleandro la simbiosi parassitaria è risultata costituita, anzichè dall'*Alternaria tenuis*, dal *Fusarium Martii* App. e Wr. e da due forme affini di *Bacterium* sp. fortemente acidificanti il substrato neutro di agar–fagiuoli, mentre il *Fusarium* come l'*Alternaria* non l'acidificavano [2].

Il fatto fondamentale è pertanto il medesimo, con conseguenze per il *Fusarium* forse più gravi e profonde che non per l'altro micete [3].

Se non che non si limitano a queste le indagini da me fatte sul simultaneo, correlazionato – sinergetico - attacco di due parassiti, l'uno batteriaceo, l'altro fungino.

Già, fino dal 1926, era stata constatata la sinergesi parassitaria della *Tubercularia vulgaris*, Tode e di un *Bacterium* sp. su rami di Tiglio.

L'acidità che lo sviluppo del fungo richiede in quantità rilevante e si trova molto debole in questi, il batterio fornisce con notevole abbondanza al fungo; in pari tempo che alcuni fenomeni chemiotattici accertati lasciano supporre la eliminazione da parte del primo di sostanze atte al nutrimento del secondo [4].

(1) R. Perotti e G. Bonaventura, *Mico-batteriosi dei frutti di « Nerium Oleander »* L., « Boll. R. Istituto Superiore Agrario di Pisa », vol. IV, 1928.

(2) R. Perotti e G. Pontecorvo, *Ulteriori ricerche sulla mico-batteriosi fiorale e dei frutti dell'Oleandro.* « Boll. R. Istituto Superiore Agrario di Pisa », vol. V, 1929.

(3) O. Verona e R. Franchini, *Il « Fusarium Martii » App. e Wr. nella Mico-batteriosi dell'Oleandro.* « Boll. R. Istituto Sup. Agrario di Pisa », vol. VI, 1930.

(4) R. Perotti e G. Bonaventura, *Ricerche ed osservazioni sulla biologia ed in ispecie sul parassitismo della « Tubercularia vulgaris » Tode.* « Boll. R. Istituto Superiore Agrario di Pisa », vol. II, 1926.

Fatti simili sono stati rilevati in alcuni casi di attacco da *Exoascus* a foglie di Pesco e Susino.

Jamieson C. O.[1] nella « carie » di frutti di Pomodoro da *Phoma destructiva*, Plowright, trovava presenti numerose specie batteriche, fra cui Ciferri[2] accertò prevalere il *Bac. mesenthericus vulgatus*.

Sansone[3] descriveva una « cancrena umida » dei tuberi di Patata, ben definita e prodotta da *Fusarium Solani* (Mont.) Sacc., unitamente a organismi schizomicetici, i quali vivono nell'interno dei conidi e nelle ife del fungo, dando anche luogo a speciale formazione di sclerozi batteriferi.

La casistica comincia adunque ad essere abbastanza numerosa per escludere che la presenza di batteri, negli attacchi fungini delle piante superiori, spesso forse trascurata, sia, come ritenevasi fin qui, semplicemente un epifenomeno; e per affermare, invece, che essa rappresenti una singolare, più o meno, definita sinergesi tra forme micetiche e schizomicetiche.

Resterà a determinare se sia necessaria o contingente, il che non risulta dai dati di cui si è fin qui in possesso: quel che apparisce tuttavia fuori discussione è il fatto sinergetico, sperimentalmente dimostrato, che potrà influire sull'insorgere della patogenicità di una qualsiasi forma saprofitaria, come anche potrà aggravare e modificare il quadro morboso determinato da altre, di per se stesse, parassitarie.

All'entità patologica delle « batteriosi » come delle « micosi », a mio avviso, dovrebbe pertanto aggiungersi quella delle *mico–batteriosi*.

(1) Clara O. Jamieson, *Phoma destructiva, the cause of a fruit rot of the Tomato.* « Journ. of Agric. », Res, IV, pp. 1–20, 1915.

(2) R. Ciferri, *Ulteriori note sulla « carie » del Pomodoro.* « Riv. di Patologia vegetale », XIII, nn. 3–4, 1923.

(3) F. Sansone, *Il « Fusarium solani » (Mont.) Sacc. in simbiosi mutualistica con batteri nella determinazione di cancrena umida dei tuberi di patata.* « Boll. R. Stazione di Patologia Vegetale », Roma, IX, n. 2, 1929.

Zoologia (Embriologia sperimentale). — *L'otocisti degli Anfibi Urodeli è un sistema a mosaico. (Dimostrazione sperimentale)*[1]. Nota di C. Guareschi, presentata[2] dal Socio F. Silvestri.

In una Nota pubblicata lo scorso anno riferivo come alcune esperienze condotte sul *Triton taeniatus* e sul *Triton cristatus*[3] mi facessero pensare che, a somiglianza di quanto ho potuto dimostrare negli Anfibi Anuri, anche l'otocisti degli Anfibi Urodeli dovesse considerarsi come un sistema a mosaico. La parte originale delle mie ricerche, che mi aveva permesso, negli Anuri, la dimostrazione sperimentale è consistita essenzialmente nell'aver controllato i risultati così nel datore come nell'ospite. Non è inopportuno questo ricordo per far risaltare ciò che spetta a me e ciò che si era tentato prima delle mie ricerche.

Riferivo anche come, per la grande delicatezza degli embrioni di Tritone non fossi riuscito a darne negli Urodeli una dimostrazione altrettanto sicura; terminavo augurandomi che, usando un materiale più resistente, o un diverso tipo di operazione, si potesse presto dimostrare senza possibilità di dubbio tale fenomeno.

Avendo avuto quest'anno a disposizione una notevole quantità di embrioni di *Axolotl* (forma neotenica dell'*Amblystoma*) ho pensato di ripetere su di essi le esperienze già tentate sul Tritone, confidando che, per la ben nota resistenza di tale materiale, queste esperienze potessero essere coronate da felice successo, il che, in effetti, è avvenuto.

Passo quindi a dare un breve cenno di tali probative esperienze.

Divido come già ho fatto nel mio lavoro sugli Anuri, i casi ottenuti in quattro gruppi: nel primo (asportazioni) è stata asportata all'embrione una parte di coppa o di vescicola otica; nel secondo (trapianti) è stata trapiantata una porzione di otocisti, senza potere, in questi primi gruppi, eseguire i controlli con i rispettivi datori o ospiti per non essere questi sopravvissuti; nel terzo (fusioni) si è avuta la fusione tra la vescicola trapiantata e quella normale (ambedue previamente lese); e nel quarto infine (coppie) sono descritti i casi in cui essendo vissuti sia l'embrione datore che quello ospite, si può istituire il confronto tra l'otocisti sviluppatasi dalla porzione rimasta « in situ » e quella sviluppatasi dalla parte trapiantata.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 26 aprile 1931.
(3) Questi « Rendiconti », vol. XI, Ser. 6ª, 1° sem. 1930, p. 1024.

Il numero degli embrioni operati è stato di 56; di questi 14 sono quelli risultati utili per il nostro scopo.

1° *Asportazioni:*

Su tre casi riusciti, due sono stati operati allo stadio di vescicola, e uno a quello di coppa otica. Tutte e tre le otocisti mostrano la mancanza di qualche formazione.

2° *Trapianti*:

Sei casi: due operati allo stadio di vescicola e quattro a quello di coppa otica. Tanto nei primi che nei secondi si sono ottenute vescicole provviste di solo alcune formazioni, che possono essere ridotte all'epitelio di senso [1].

3° *Fusioni* (operazioni riuscite per la prima volta quest'anno sugli Urodeli):

Due casi: in un primo caso, in cui l'operazione è stata eseguita allo stadio di vescicola otica, le due otocisti sono comunicanti solo in una ristretta zona, e complessivamente presentano quattro canali semicircolari, due epiteli di senso e un *Ductus endolymphaticus*.

Nel secondo caso, invece, la fusione è molto meglio riuscita. L'operazione era stata eseguita allo stadio di coppa otica, e solo cranialmente le due otocisti sono, per breve tratto, distinguibili. In seguito esse formano una vescicola unica, provvista di sei canali semicircolari (di cui tre a fondo cieco), di un epitelio di senso, e di un *Ductus endolymphaticus*. Per avere tutte le formazioni di due otocisti complete mancherebbero dunque solamente un *Ductus* e un epitelio di senso. La mancanza della prima formazione si spiega col fatto che la coppa trapiantata à stata lesa nella sua parte dorsale per rendere possibile la fusione, ed in tal modo è stata, evidentemente, asportata la zona destinata a dare il *Ductus endolymphaticus*; la mancanza della seconda formazione si può spiegare nella stessa maniera, tenendo anche conto di possibili necrosi susseguenti all'operazione; dato però che l'epitelio di senso presente nell'oticisti fusa è molto grande, si può anche pensare che le due zone sensitive si siano pur esse fuse a formarne una sola.

4° *Coppie* (anche queste operazioni sono riuscite, per la prima volta quest'anno, sugli Urodeli):

Due casi: tanto nell'uno che nell'altro caso, operati l'uno allo stadio di vescicola e l'altro a quello di coppa otica, la somma delle formazioni sviluppatesi nel datore, e, di quelle sviluppatesi nell'ospite dalle due parti dell'abbozzo otico, l'una rimasta « in situ » e l'altra trapiantata, corrisponde esattamente alle formazioni di una sola vescicola normale (vedi figg.).

(1) Per la terminologia da me usata, e per le formazioni da me prese in considerazione, vedi il mio precedente lavoro sugli Anuri: « Arch. f. entw. mech. », Bd. *122*, H. 1, 1930, p. 179.

Come ben si può vedere, da queste operazioni, nonostante che il loro numero non sia eccessivamente rilevante, si possono trarre con evidenza le seguenti conclusioni:

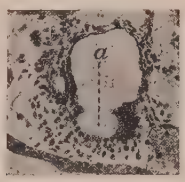


Fig. 1.

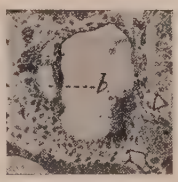


Fig. 2.

Figg. 1 e 2: Microfotografie di due sezioni dell'otocisti sviluppatasi nel datore; mostrano due canali semicircolari (*a* e *b*).

1° Una parte di coppa o di vescicola otica, tanto se rimasta « in situ » che trapiantata, nonostante le ottime condizioni spaziali in cui viene a trovarsi nel primo caso, non è capace di dare luogo ad una otocisti completa (1° e 2° gruppo di esperienze).

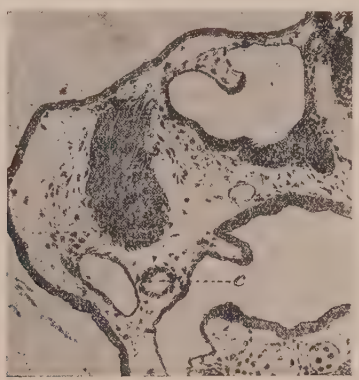


Fig. 3.

Fig. 3: Microfotografia di una sezione dell'otocisti sviluppata nell'ospite: mostra il 3° canale semicircolare (*c*).

2° A estensione della conclusione precedente il confronto fra la otocisti sviluppatasi dalla porzione di coppa o di vescicola rimasta « in situ » e quella avutasi dalla porzione trapiantata dimostra che le formazioni dell'una, più le formazioni dell'altra, sono esattamente quelle di una otocisti

completa (4° gruppo di esperienze). Si cade in tal modo nella formula caratteristica dei sistemi a mosaico

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

3° Due otocisti o due parti di otocisti, fatte fondere insieme, sviluppano, nonostante le deficienti condizioni spaziali in cui vengono a trovarsi, tutte le formazioni che in esse parti erano potenzialmente contenute (3° gruppo di esperienze). Anche in tal caso si trova verificata la formula del sistema a mosaico

$$1 + 1 = 2$$

Per tutte queste ragioni *anche l'otocisti degli Anfibi Urodeli deve essere considerata come un organo che nel suo sviluppo rappresenta un sistema a mosaico*, così come ho già dimostrato per gli Anfibi Anuri.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 maggio 1931 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. Garbasso

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Il diametro orizzontale del Sole nel 1929 e nel 1930.* Nota [1] del Socio G. Armellini.

1. Abbiamo già parlato altre volte [2] del metodo con cui si eseguiscono le misure del diametro orizzontale del sole all'Osservatorio del Campidoglio. Ed abbiamo ricordato come queste misure furono istituite, nel 1876, dall'allora direttore prof. L. Respighi e come sono state sempre proseguite, senza nessuna interruzione, dai due successivi direttori: il prof. A. Di Legge e lo scrivente [3].

Non solo; ma si deve anche aggiungere che, per maggiore uniformità e per poter meglio confrontare i risultati, abbiamo sempre lasciato inalterato, in tutti i suoi dettagli, il metodo adoperato dal Respighi. Vale a dire, al mezzodì di ogni giorno sereno, esaminiamo il Sole col meridiano di Ertel proiettandone sopra uno schermo bianco l'immagine assai ingrandita (circa un metro di diametro) e determinando gli istanti di appulso dei due bordi del disco sopra i sette fili orari centrali del micrometro.

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) Cfr. «Rend. della R. Accad. dei Lincei», 1924, sem. I; 1925, sem. II; 1927, sem. I; 1928, sem. II; 1929, sem. I.

(3) Siamo lieti di poter constatare che l'interesse di queste osservazioni sistematiche va sempre più crescendo tra gli studiosi. È noto come il compianto prof. Angelitti le abbia introdotte, pochi anni or sono, nella Specola di Palermo ed oggi il prof. Commendantoff, dell'Osservatorio di Poulkovo, ci scrive: *pour exprimer le grand interêt que j'ai envers les observations systématiques du diamètre solaire faites á l'observatoire du Campidoglio*; e ci fa insieme sapere di averle iniziate, fin dall'anno scorso, alla Specola di Poulkovo. Sembra che anche l'Osservatorio di Strasburgo abbia eseguito qualche misura in proposito, ma non ne conosciamo ancora i risultati. In ogni modo la serie del Campidoglio, che abbraccia quasi sessanta anni, è senza contrasto, la più completa e la più vasta che l'astronomia oggi possieda.

L'osservazione viene eseguita simultaneamente da quattro osservatori (Armellini Giuseppe, Conti Gabriella, Squillace Nino, Mignucci Pietro) i quali si pongono presso lo schermo e determinano gli istanti del contatto ad *occhio ed orecchio*, con l'aiuto di un cronometro Dent a tempo siderale.

2. Ciò posto, il numero delle misure eseguite da ciascun osservatore è dato dalla seguente tabella, dove le lettere A, C, S ed M indicano rispettivamente Armellini, Conti, Squillace e Mignucci.

Tabella I

Data	A	C	S	M
1929				
Gennaio	9	11	13	13
Febbraio	11	13	12	14
Marzo	15	16	19	21
Aprile	9	14	12	15
Maggio	8	18	18	20
Giugno	12	13	17	17
Luglio	13	20	25	26
Agosto	—	—	7	8
Settembre	6	9	—	9
Ottobre	5	7	5	10
Novembre	8	10	8	9
Dicembre	15	17	18	14
1930				
Gennaio	7	10	11	10
Febbraio	11	11	12	12
Marzo	12	14	16	14
Aprile	7	10	7	11
Maggio	13	14	15	15
Giugno	11	18	16	18
Luglio	10	14	14	7
Agosto	—	—	14	13
Settembre	17	17	—	21
Ottobre	—	5	8	17
Novembre	17	16	17	18
Dicembre	10	12	12	12
Totale generale 1929	111	148	154	176
» » 1930	115	141	142	168

3. I valori ottenuti da ciascun osservatore per il raggio R del Sole, espressi in secondi di arco, ridotti [1] sempre alla distanza media della Terra e corretti dell'andamento del cronometro, sono dati dalla seguente:

Tabella II

Data	A	C	S	M
1929				
Gennaio	961.59	961.59	961.76	961.52
Febbraio	1.45	1.09	1.63	1.56
Marzo	1.93	1.97	1.74	1.82
Aprile	1.82	1.52	1.67	1.74
Maggio	1.91	0.69	1.62	1.52
Giugno	2.29	0.93	1.94	1.45
Luglio	2.58	1.84	1.88	1.62
Agosto	—	—	1.67	1.19
Settembre	2.65	2.38	—	1.93
Ottobre	2.19	3.03	1.30	1.56
Novembre	0.96	1.01	1.66	1.62
Dicembre	1.86	1.52	1.96	1.32
1930				
Gennaio	961.40	961.78	962.14	961.68
Febbraio	1.68	1.04	1.40	1.83
Marzo	1.43	1.28	1.99	1.28
Aprile	1.76	1.28	1.21	1.47
Maggio	2.08	1.72	1.54	2.01
Giugno	1.79	1.26	2.18	1.61
Luglio	2.25	1.29	1.75	1.54
Agosto	—	—	1.65	1.58
Settembre	1.62	1.35	—	1.65
Ottobre	—	1.17	1.61	1.76
Novembre	1.89	1.72	2.07	1.78
Dicembre	1.78	1.57	2.05	1.61
Media 1929.5	961.93	961.60	961.71	961.57
» 1930.5	961.77	961.40	961.78	961.65

(1) Le riduzioni sono state eseguite dal dott. N. Squillace, assistente nel R. Osservatorio del Campidoglio, e controllate dalla dott.ª G. Conti astronomo aggiunto nell'Osservatorio stesso.

4. Come è facile ricavare da questa tabella, gli *errori probabili* dei risultati medi ottenuti dai singoli osservatorî per il 1929.5 sono eguali rispettivamente a:

$$\pm\ 0'',09 \quad ; \quad \pm\ 0'',12 \quad ; \quad \pm\ 0'',03 \quad ; \quad \pm\ 0'',04$$

E per il 1930,5 sono eguali a:

$$\pm\ 0'',05 \quad ; \quad \pm\ 0'',05 \quad ; \quad \pm\ 0'',06 \quad ; \quad \pm\ 0'',03$$

ciò che mostra il grado di attendibilità delle misure.

Ciò posto, ricordando quanto fu ottenuto negli anni passati [1], assumendo come valore del raggio R del sole per il 1930,0 la media dei valori corrispondenti al 1929,5 e al 1930,5 e operando analogamente per gli altri anni, abbiamo il seguente specchietto:

1924,0	R = 961″,03	1928,0	R = 961″,58
1925,0	R = 960 ,63	1929,0	R = 961 ,63
1926,0	R = 961 ,02	1930,0	R = 961 ,68
1927,0	R = 961 ,54		

Questo specchietto mostra chiaramente che, al principio del 1925, si verificò un forte minimo e che, da allora, il raggio del Sole è aumentato gradatamente di circa 1″, superando dopo il 1927 il valore medio di 961″,50 assegnato da Auwers; probabilmente l'anno prossimo s'inizierà il decremento.

Quanto alle cause di queste fluttuazioni, più o meno periodiche, del raggio solare esse vanno ricercate nel fatto che *l'energia prodotta dall'astro non è sempre perfettamente uguale all'energia irradiata*; come del resto insegnano le moderne teorie sopra la costituzione delle stelle. Ed anzi, per meglio mettere in luce questi fenomeni, il Regio Osservatorio del Campidoglio ha iniziato – fin dal giugno 1929 – una serie di misure *piroeliometriche* del Sole, che si eseguono ogni giorno con un piroeliometro Kipp a pila termoelettrica e milliamperometro di precisione. E in una prossima Nota ne esporremo i risultati.

(1) Cfr. «Rend. Lincei», loc. cit., 1929, sem. I.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della Cromosfera nel 1930.* Nota [1] del Corrisp. G. Abetti.

I risultati delle osservazioni eseguite ad Acetri ed a Madrid durante il 1930 per l'altezza della cromosfera solare, misurando l'altezza della riga Hα invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo, sono i seguenti. Nella Tabella si dànno nuovamente i valori di Madrid per il 1929, perchè quelli dati nello scorso anno [2] debbono essere così corretti secondo una comunicazione del prof. Jimènez.

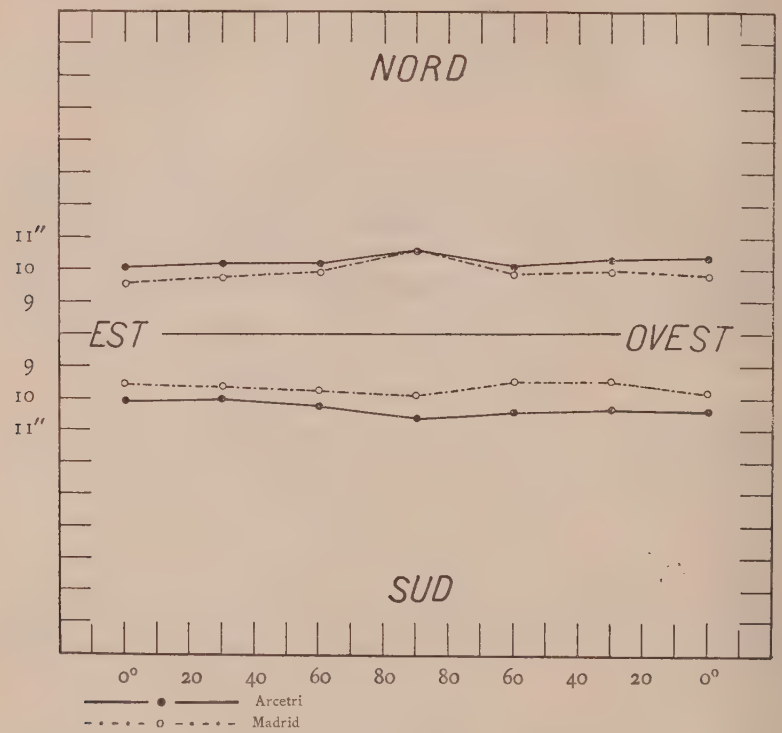
Altezza media della cromosfera

+ 90° N	+ 60° E	+ 30° E	0° E	− 30° E	− 60° E	− 90° S	− 60° W	− 30° W	0° W	+ 30° W	+ 60° W	Media
Arcetri 1930												
10″.58	10″.17	10″.23	10″.08	10″.02	10″.25	10″.63	10″.35	10″.27	10″.37	10″.34	10″.10	**10″.28**
Madrid 1929												
10″.44	10″.10	10″.07	9″.92	10″.12	10″.13	10″.43	10″.03	10″.08	10″.06	10″.21	10″.00	**10″.13**
Madrid 1930												
10″.59	9″.93	9″.75	9″.59	9″.65	9″.78	9″.87	9″.44	9″.49	9″.83	9″.97	9″.84	**9″.81**

Le osservazioni di Arcetri si basano su 67 giorni di osservazioni, quelle di Madrid rispettivamente su 42 e 49 giorni. Le osservazioni di Arcetri dànno una lieve diminuzione generale della cromosfera, da 10″.38 per il 1929 a 10″.28 per il 1930; quelle di Madrid una diminuzione un poco maggiore di 0″.32. Anche le osservazioni di Catania dànno una diminuzione di 0″.3 dal 1929 al 1930. L'altezza, come si vede nella figura, dove sono tracciate

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.
(2) Questi « Rendiconti », vol. XI, ser. 6°, p. 921, 1930.

le altezze ottenute ad Arcetri e a Madrid nel 1930, è presso che costante a tutte le latitudini, ma se mai ha una tendenza ad essere leggermente più elevata ai poli.



Altezza della cromosfera nel 1930.

L'area totale delle protuberanze, misurata in unità di protuberanza, che dal 1928 al 1929 era diminuita di 156 unità è ulteriormente diminuita di 291 unità [1].

I numeri relativi delle macchie secondo le osservazioni internazionali raccolte e ridotte a Zurigo sono scesi da 65.0 (1929) a 35.7 (1930) [2]. Si può quindi considerare che siamo ora non lontani dal minimo di attività solare del presente ciclo iniziatosi nel 1923.

Meccanica. — *A proposito delle Note dei Sig.ri Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. « Pubblicazioni Osservatorio di Arcetri », fasc. 48, 1931.
(2) « Astronomische Mitteilungen », Zürich, n. CXXV, 1931.

Meccanica. — *Sui corpi aerodinamici a resistenza negativa.* Nota del Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul nuovo effetto fotoelettrico nelle cellule a metalli alcalini.* Nota [1] del Socio Q. Majorana.

In due Note presentate nelle ultime sedute ho descritto particolari ricerche tendenti a chiarire alcuni fenomeni fotoelettrici da me constatati servendomi di valvole termojoniche o di cellule. Nel corso di tali ricerche, è stato da me rilevato il fatto della reciproca influenza di radiazioni di aria λ, quando esse agiscono promiscuamente, su di una cellula al sodio od al potassio. Più propriamente, ho riferito sulla circostanza che radiazioni di grande lunghezza d'onda abbassano il potenziale limite raggiunto dal metallo fotoelettrico, quando su esso cadono radiazioni di breve lunghezza d'onda e viceversa. Le curve da me tracciate nella seconda Nota, e gli esperimenti con filtri di vetro vari, dimostrano ciò.

Scopo della presente breve Nota è quello di rilevare, che dopo la presentazione da me fatta delle precedenti, sono venuto a conoscenza che già l'anno scorso E. Marx [2] aveva constatato un effetto, simile all'ultimo da me descritto. Nelle sue pubblicazioni è nettamente messa in rilievo l'influenza più sopra accennata. Le curve del Marx differiscono peraltro dalle mie sia perchè esse non si estendono al di là di 5790 Å (mentre le mie arrivano all'ultrarosso); sia ancora, (per quanto concerne il potassio), perchè in esse non si rileva il massimo dovuto all'effetto selettivo di questo metallo. Ma, a parte tali particolarità, il fenomeno da me descritto coincide, nelle sue linee generali con quello precedentemente constatato da Marx. Obbiettivamente, perciò, rilevo tale circostanza, che certamente serve a dare maggior valore alle constatazioni fatte sia dal Marx che da me.

Nella mia precedente Nota, non ho di proposito fatto cenno alcuno ad una possibile teoria del fenomeno in parola. Ma poichè, le esperienze di Marx portano ad escludere un'influenza della luce sull'anodo (fatto contradetto da Olpin [3]); la quale esclusione verrebbe confermata da una teoria che in epoca ancora più recente Marx e Meyer hanno svolta [4]; ritengo

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) E. Marx, *Über einen neuen lichtelektrischen Effekt an Alkalizellen.* « Naturwissenschaften », *17*, p. 806, 1929; *On a new photoelectric effect.* « Phys. Rev. », *35*, p. 1059, 1930.

(3) « Phys. Rev. », *35*, p. 112, 1900.

(4) « Phys. Zeits. » *32*, p. 153, 1931.

potersi, con una certa probabilità affermare senz'altro, che realmente debba trattarsi di un fenomeno nuovo, che merita di richiamare l'attenzione dei fisici.

L'idea di una perturbazione dovuta all'illuminazione dell'anodo sembra dunque da escludersi; d'altro canto, la teoria di Marx e Meyer si riferisce al caso di vuoto assoluto nella cellula, mentre io ho anche constatato i fatti in presenza di gas. Per cui occorre integrare tali fatti con altre ricerche sperimentali prima di pronunziarsi definitivamente sulla loro rigorosa interpretazione. Su ciò mi riservo di riferire prossimamente.

Fisica (Chimico-fisica). — *Valenza e simmetria.* Nota [1] del Corrisp. P. Vinassa.

In alcuni miei precedenti lavori ho dimostrato:

1° che l'aggruppamento degli elettroni periferici negli atomi attivi (elettronili) corrisponde al ritmo 2, 3, 4, 6, identico a quello cristallografico [2];

2° che gli ioni semplici sono pure simmetrici ed anzi in prevalenza nobili (a chiusura 4);

che gli ioni binari sono costituiti da componenti simmetrici, di cui uno almeno a simmetria nobile o inerte;

che gli ioni terziari sono costituiti da componenti simmetrici di cui due almeno a simmetria nobile o inerte [3];

3° che la stabilità di un corpo cresce in ragione diretta col crescere di grado di simmetria [4].

Da quanto sopra si può dedurre questo corollario. Non è esatto dire che anche i corpi solidi sono ionizzati. I corpi cristallini, come lo dimostrano le ricerche strutturali, sono invece *elettronilici*, costituiti cioè da elettronili distinti.

Applicando ora le regole sopracitate si può generalizzare nel modo seguente: *Ogni composto chimico non può mai avere più di un componente che sia fuori della simmetria nobile o inerte.*

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) *La simmetria negli elettroni.* Questi «Rendiconti», VI, 2° sem., 11 dicembre 1927; *Elettronili simmetrici e molecole monoatomiche.* Ibid. VII, 1° sem., 11 giugno 1928.

(3) *Joni, numero elettronico e simmetria.* Questi «Rendiconti», IX, 1° sem. 10 maggio 1929.

(4) *Su talune leggi geochimiche.* «Boll. Soc. geol. it.», XLVII, 2.

*
* *

Stabilita così l' importanza della simmetria nella costituzione chimica, ho voluto vedere se essa ha importanza anche nel fenomeno della valenza.

Mi baso, per la parte generale, su di un recentissimo e molto accurato trattato di chimica, quello dell'Ephraim [1], di cui si sta facendo, sembra, la traduzione italiana. In esso torna, non ostante che da molto tempo G. Oddo [2] ne abbia mostrato la inconsistenza, la ben nota regola degli ottetti dell'Abegg.

L'Ephraim riporta, a p. 40, una tabella degli elementi dal Li al F, dalla quale ad esempio apparirebbe la possibilità di un eptalitiuro.

Taluni si sono accorti dell'eccessiva teoricità di questa cosidetta regola dell'Abegg e l'Ephraim stesso dice che *spesso* non si raggiungono le più alte valenze positive, perchè vi si oppone la forza elettrostatica. E che altrettanto *spesso* non si raggiunge la massima valenza negativa, perchè il *notevole* (?) aumento di elettroni non è possibile a causa delle mutue repulsioni. Mentre la perdita *è più facile* (?), e così accade che la massima valenza teorica nei metalli si raggiunge *regolarmente*. Dice pure, continuando, l'Ephraim, che i corpi con pochi elettroni esterni non sono mai negativi, perchè non è possibile un così forte aumento di elettroni, come sarebbe ad esempio per il Ca, che dovrebbe aggiungersene ben sei.

Queste appaiono affermazioni gratuite, e contrastanti all'evidenza dei fatti.

I fatti dimostrano questo: che di tutti i corpi noti *solamente dodici* obbediscono (ed anche questi non compiutamente) alla così detta regola degli ottetti. La pseudoregola dell'Abegg quindi non ha nemmeno un valore statistico. L'espressione spesso (*oft*), usata dall'Ephraim, dovrebbe invece esser sostituita dall'altra: quasi mai (*fast nimmer*).

Ed i fatti dimostrano altresì che nei corpi metallici la massima valenza teorica si raggiunge non gradualmente (*regelmässig*), come dice l'Ephraim, ma a salti (*sprungweise*).

Difatti basta dare uno sguardo alle valenze metalliche, elettropositive. È comunemente accettato che esse dipendano dalla carica del nucleo. Ma in tal caso dovrebbero esser tutte presenti, mentre ho già dimostrato che *valenze corrispondenti ad aggruppamenti asimmetrici degli elettroni non sussistono*. Quindi possiamo concludere che, se la valenza positiva è un fenomeno elettrico dovuto alla carica del nucleo, questa forza elettrica *è però subordinata alla simmetria*. Poichè difatti solo dalla simmetria dipende il numero degli elettroni periferici, la valenza elettrica nucleare si manifesta dipendente da questa distribuzione.

(1) Ephraim F., *Anorganische Chemie*, Dresden, Steinkopff, 1929.
(2) Oddo G., *Trattato di chimica inorganica*. Palermo, Sandro, 1925, p. 109 (*cum bibl.*).

Da ciò deriva che l'aumento della valenza non è affatto regolare e continuo, ma è saltuario, secondo le leggi della simmetria.

Questo può bastare per quanto ha riguardo alla valenze positive, derivate dalla carica nucleare. Ma esistono anche quelle negative.

Sembra per lo meno degno di considerazione il fatto che esistono elettronili con numero di elettroni superiore alla carica del nucleo. Ora, mentre pareva logico che il nucleo attraesse elettroni negativi in forza della sua carica positiva, sia pure subordinatamente alla loro distribuzione simmetrica, appare altrettanto logico che il nucleo, saturate le sue cariche, non abbia più modo di aggiungere altri elettroni. E pure questo avviene; ed anzi taluno degli elettronili, come il C^{-IV}, non solo aggiunge un elettrone, ma salta addirittura, senza intermediari, a quattro. Qui non vi è da pensare a forze elettriche positive. Esaurita e neutralizzata la sua carica il nucleo non ha più modo di attrarre altri elettroni. Forze positive esterne al nucleo sono difficilmente immaginabili ed in ogni caso, se esistessero, esse neutralizzerebbero la forza elettronegativa degli elettroni periferici.

Quale forza costringe dunque questi elettroni ad aggrupparsi intorno al nucleo in numero spesso assai superiore (sino al 40 per cento) a quello della carica positiva? E ci si può domandare ancora: L'aggiunta di un elettrone potrebbe richiedere un piccolo impiego di forza: ma, aggiuntosi un elettrone, questo, avendo reso negativo l'elettronile, non dovrebbe agire come repulsivo contro altri elettroni? In altre parole: se al C si aggiungessero gradualmente altri elettroni, il primo, il secondo e più ancora il terzo non dovrebbero agire repulsivamente, come dice l'Ephraim, sul quarto che vi si accompagna? E pure noi vediamo che, subito, ben quattro elettroni sui dieci vi si aggiungono. Ma non basta ancora. Possiamo difatti chiederci: Perchè tra i metalloidi abbiamo subito un O^{-II} bivalente e non conosciamo un O^{-I} monovalente? Perchè abbiamo soltanto N^{-III} trivalente e sono ignoti N^{-II} bivalente e N^{-I} monovalente? E perchè abbiamo solo C^{-IV} tetravalente e sono ignote le valenze intermedie?

Si usa (non spiegare perchè la parola nulla spiega) ma constatare la *tendenza* ad assumere un'orbita elettronica nobile.

Si dice, col Kossel, che i gaz nobili hanno già raggiunto l'equilibro 8 (2 , 2 . 4), e quindi non hanno alcuna tendenza e sono inerti. Invece gli alcali, che seguono i gaz nobili, hanno un elettrone in più della chiusura nobile e quindi hanno la tendenza a cederlo. Mentre gli alogeni, che precedono i gaz nobili, hanno un elettrone in meno dell'equilibrio nobile e quindi hanno la tendenza a prenderlo dove lo trovano.

Questa tendenza ha un poco l'aspetto dell'« orrore per il vuoto » pretorricelliano.

Non occorre ricorrere a tendenze. Si compie la chiusura nobile, perchè le chiusure con 1, 2, 3 elettroni *sono asimmetriche* e solo quella con 4 è

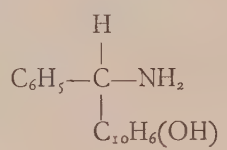
simmetrica e nobile; è una *terminante*. Si tratta dunque dell'azione di una potente forza, predominante nel mondo inorganico: la forza della simmetria. Questa, se agisce limitativamente nella valenza metallica, pur avendo gerarchia superiore alla forza elettrica, nella valenza metalloïdica, elettronegativa, è la sola che agisca, sino anzi a poter vincere la forza di repulsione.

Concludendo. — La simmetria appare come un fenomeno grandioso. Se consideriamo le forze che agiscono nelle reazioni noi vediamo che esse riescono a modificare, spesso profondamente, i corpi; ma non alterano la simmetria dei loro componenti. O, se la alternano, la modificano in altri aggruppamenti pure simmetrici. Nelle grandi profondità terrestri le rocce si fondono in un magma eminentemente dissociato e ionizzato; ma con questo non viene alterata la simmetria; anzi gli ioni che si formano assumono sempre più un tipo simmetrico, specialmente nobile. Quindi le più grandi forze naturali possono distruggere il cristallo, la molecola, infine qualunque complesso fisico e chimico, ma non riescono a distruggere la simmetria dei suoi componenti. Anzi più ridotto e modificato è il costituente chimico e più esso assume una forma simmetrica, nobile o inerte.

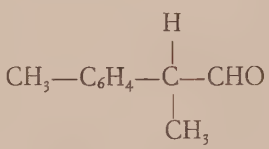
Chimica. — *Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche*[1]. Nota II[2] del Corrisp. M. Betti e di P. Pratesi.

Come fu già accennato nella Nota precedente[3], tutti i numerosi metodi di scissione « *diretta* » delle aldeidi racemiche nei loro antipodi ottici stati proposti fin qui si sono mostrati così inadatti allo scopo che ancora recentemente J. v. Braun e W. Haensel potevano affermare[4] che « la possibilità di tale sdoppiamento è tutt'oggi praticamente nulla (" praktisch gleich null ") ».

Il metodo basato sull'impiego del β-naftol,fenil,aminometano:



otticamente attivo, che già per la scissione descritta nella pubblicazione precedente aveva dato ottimi risultati, e che si presentava tale da farne sperare facile, sicura e generale l'applicazione, è stato ora da noi impiegato per la scissione dell'aldeide p·metil-idratropica:



e come viene esposto più avanti, per quanto si sia operato sopra una quantità di aldeide (gr. 5.3) che per tal genere di operazioni è da ritenersi eccezionalmente esigua, ha condotto a risultati soddisfacentissimi:

$$[\alpha]_D = \begin{matrix} -1°.69 \\ +1°.51 \end{matrix} \qquad [M]_D = \begin{matrix} -2°.50 \\ +2°.23 \end{matrix}$$

Questa scissione presentava un certo interesse anche perchè veniva a confermare la struttura di tale aldeide, che si ottiene per azione del clo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.
(2) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.
(3) Questi « Rendiconti », vol. XI, serie 6ª, 1° sem., p. 587 (1930).
(4) « Berichte der Deutsch. Chem. Gesellsch. », *59*, p. 1999.

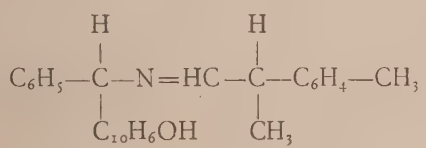
ruro di cromile sul cimene, e che gli autori che prima l'avevano preparata [1] ritenevano corrispondesse alla formula

$$CH_3—C_6H_4—CH_2—CH_2—CHO$$

senza atomo di carbonio asimmetrico [2].

Per la *preparazione dell'aldeide p·metil–idratropica* abbiamo seguito il metodo di Richter e Schüchner (loc. cit.) modificato da Miller e Rohde (loc. cit.) e da Errera (loc. cit.), che consiste nell'ossidazione del cimene con cloruro di cromile. Contemporaneamente all'aldeide si forma in quantità circa eguale anche il p·tolil–metilchetone: $CH_3—C_6H_4—CO—CH_3$. Per separare i due composti si tratta il prodotto con bisolfito sodico che si combina soltanto coll'aldeide. Dal composto bisolfitico purificato si libera l'aldeide trattandolo con carbonato sodico e distillando in corrente di vapore. Ottenemmo così gr. 5.3 di aldeide pura (p. e. 222°) che si presenta come un liquido oleoso, di gradevole odore aromatico pungente.

Sdoppiamento ottico dell'aldeide racemica. – Gr. 8.9 di β-naftol, fenil,aminometano (1 mol.) vennero sciolti in 300 cc. di alcool concentrato, scaldando a temperatura non superiore ai 50-60°. Alla soluzione tiepida furono aggiunti gr. 5.3 di aldeide (1 mol.) sciolta in poco alcool. Quasi subito si cominciarono a separare dei cristalli bianchissimi e in capo a qualche minuto tutto il liquido si rapprese in una massa cristallina bianca evidentemente dovuta alla formazione del composto aldeido–aminico della formula:



Dopo 24 ore di riposo si filtrò alla tromba, spremendo accuratamente il precipitato e lavandolo con poco alcool freddo. Il precipitato, dopo essiccazione, pesava gr. 9.8 e certamente non era otticamente puro perchè la quantità teorica totale del prodotto sarebbe stata gr. 13.6, e perciò quella corrispondente ad ognuno dei due antipodi avrebbe dovuto essere gr. 6.8. Il liquido filtrato fu messo da parte per ricavarne poi il derivato aldeido–aminico più solubile.

(1) V. v. Richter e G. Schüchner, « Berichte der Deutsch. Chem. Gesellsch. », *17*, p. 1931 (1884).

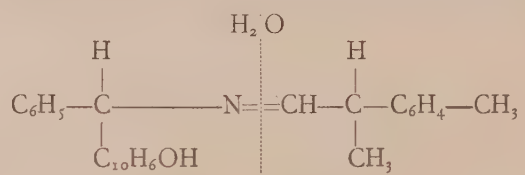
(2) Vedi a tale proposito Miller e Rohde, « Berichte der Deutsch. Chem. Gesellsch. », *23*, p. 1070 (1891) e *24*, p. 1356 (1892); G. Errera, « Gazz. Chim. Ital. », *21*, I, p. 76 (1891).

Prodotto poco solubile nell'alcool. – Il precipitato raccolto (gr. 9.8) che, come si è detto, era da ritenersi assai inquinato dal composto più solubile fu perciò fatto bollire per qualche minuto con 300 cc. di alcool assoluto filtrando poi prontamente alla pompa. Rimase sul filtro un prodotto che dopo essiccazione pesava gr. 6.3 e del quale fu determinato il potere rotatorio. Il liquido filtrato fu unito al precedente.

La parte rimasta indisciolta (gr. 6.3) si fece bollire una seconda volta con 200 cc. di alcool ed il liquido caldo si filtrò alla tromba. Rimase un residuo che, secco, pesava gr. 5.2 e che aveva potere rotatorio identico al prodotto precedente. Il liquido filtrato non fu però unito agli altri per il dubbio che contenesse frazioni sia pure piccole di prodotto poco solubile miste a quello solubile.

Il prodotto meno solubile, stato così esaurito con alcool, aveva aspetto cristallino, era bianchissimo e fondeva a 160°. Si scioglieva pochissimo nell'alcool anche bollente mentre era assai solubile nel benzene. All'analisi dette valori corrispondenti a quelli che si calcolano per il derivato aldeido–aminico della formula sopra riportata. Ne fu misurato il potere rotatorio impiegando una soluzione benzenica contenente gr. 0.5 di sostanza in 25 cc. di solvente ed esaminandola in un tubo lungo 2 dm; si ebbe: $\alpha_D = + 1°.37$.

Idrolisi: Aldeide levogira. - Questo prodotto fu spappolato con acqua addizionata di acido cloridrico al 20 % ed il miscuglio fu distillato in corrente di vapore. Il derivato, che è completamente insolubile nell'acqua e nell'acido cloridrico, a poco per volta si idrolizzava secondo lo schema seguente:



e mentre il cloridrato della base passava in soluzione, l'aldeide distillava insieme col vapor d'acqua e si raccoglieva in goccie oleose di odore caratteristico. In capo a 20–30 minuti la idrolisi era terminata. Dal liquido distillato fu estratta l'aldeide dibattendolo con cloroformio e la soluzione cloroformica, essiccata su cloruro di calcio, dette per distillazione del solvente l'aldeide libera che in soluzione cloroformica fu esaminata al polarimetro e dette il risultato seguente:

$$[\alpha]_D = - 1°.69 \qquad [M]_D = - 2°.50.$$

Semicarbazone dell'aldeide levogira. - A gr. 1.50 (1 mol.) di cloridrato di semicarbazide sciolti nella minor quantità d'acqua possibile si aggiunsero gr. 1.50 di acetato potassico sciolto in pochissimo alcool e poi a goccia

a goccia acqua e alcool finchè la soluzione non fu perfettamente limpida. A questa furono aggiunti gr. 1.30 (1 mol.) di aldeide sciolta in poco alcool. Dopo qualche ora si incominciò a separare un precipitato cristallino di semicarbazone misto a cloruro potassico. Raccolto su filtro e lavato con poca acqua, per sciogliere il cloruro di potassio, fu poi cristallizzato dall'alcool bollente, dal quale si ottenne come polvere bianca, cristallina, fusibile a 154°. Pel semicarbazone dell'aldeide racemica nella letteratura si trovano diversi punti di fusione, ma tutti compresi fra 152° e 160°.

Il potere rotatorio del semicarbazone fu misurato sciogliendolo nell'alcool metilico e si ebbe il seguente resultato:

$$[\alpha]_D = + 2°.09 \qquad [M]_D = + 4°.28 .$$

Il semicarbazone dell'aldeide levogira è dunque destrogiro.

Prodotto più solubile nell'alcool. – Il liquido alcoolico stato separato dal prodotto poco solubile e l'alcool col quale questo era stato successivamente esaurito fornirono col raffreddamento e col riposo alcune frazioni di sostanza cristallina: altre frazioni si ottennero concentrando ulteriormente tali liquidi che infine per completa evaporazione lasciarono un po' di resina giallastra che fu trascurata. Tutte le dette frazioni cristalline furono riunite e sciolte nuovamente nell'alcool e fatte ricristallizzare. Si lasciarono da parte le frazioni che si separavano per prime e si riuscì così ad ottenere complessivamente circa 2 gr. del prodotto più solubile, ben puro. Anche questo era bianchissimo, cristallino e fondeva a 160°. Era molto solubile nell'alcool e nel benzene. Gr. 0.5 di sostanza sciolti in 25 cc. di benzene ed esaminati al polarimetro in un tubo lungo 2 dm. dettero $\alpha_D = + 1°.48$.

Idrolisi: Aldeide destrogira. – Coi 2 gr. del derivato aldeido-aminico puro che avevamo a disposizione operammo come nel caso precedente ed ottenemmo una piccola quantità di aldeide che mostrò la rotazione polarimetrica seguente:

$$[\alpha]_D = + 1°.51 \qquad [M]_D = + 2°.23 .$$

Preparammo il *semicarbazone* anche di questa aldeide, ma data la esiguità del prodotto potemmo purificarlo soltanto sommariamente, e così non si potè determinarne l'esatto potere rotatorio, ma ci dovemmo limitare a constatare che la soluzione in alcool metilico presentava rotazione sinistrogira.

Chimica. — *Solfati di praseodimio e di tallio talloso* [1]. Nota [2] del Socio F. Zambonini e di S. Restaino.

In precedenti lavori sono stati pubblicati i risultati delle nostre indagini sui solfati di tallio talloso e di cerio (ceroso), di lantanio e di neodimio [3]. Nel presente scritto diamo conto di quelli ottenuti nello studio, parziale, del sistema $Pr_2(SO_4)_3 - Tl_2SO_4 - H_2O$, come al solito per l'isoterma di 25°.

I risultati delle nostre determinazioni di solubilità sono riuniti nella seguente

Tabella I

Numero dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$Pr_2(SO_4)_3$	Tl_2SO_4	H_2O	$\frac{Tl_2SO_4}{H_2O}$	Pr	Tl	H_2O	SO_4	$\frac{Pr_2(SO_4)_3}{Tl_2SO_4}$	
1	0.00	5.91	94.09	0.062	7.50	68.13	0.66	23.71	0.18	$1-5+Tl_2SO_4$
2	0.00	5.83	94.17	0.061	8.28	66.85	0.29	24.58	0.20	$1-5$
3	0.00	5.27	94.73	0.055	9.07	65.54	0.69	24.70	0.22	
4	0.00	4.98	95.02	0.052	9.70	65.28	0.42	24.60	0.24	$1-4\,1/2$
5	0.00	4.46	95.54	0.046	9.58	64.73	0.65	25.04	0.24	
6	0.09	3.44	96.47	0.035	10.94	62.54	4.63	21.89	0.28	$1-4\,1/2+1-3-1$
7	0.11	3.41	96.48	0.035	13.18	58.44	1.14	27.24	0.36	$1-3-1$
8	0.15	2.98	96.87	0.031	14.07	56.80	1.37	27.76	0.40	
9	0.12	2.96	96.92	0.031	17.26	50.55	2.64	29.55	0.54	
10	0.13	2.98	96.89	0.031	18.87	36.80	16.12	27.91	0.83	$1-3-1+1-1-4$
11	0.19	3.02	96.79	0.031	23.59	38.19	5.11	33.11	1.01	
12	0.18	2.80	97.02	0.028	24.29	35.60	6.88	33.23	1.11	
13	0.52	0.73	98.75	0.007	24.91	35.46	6.15	33.48	1.15	$1-1-4$
14	6.18	0.13	93.69	0.001	25.06	35.34	5.95	33.65	1.16	
15	8.43	0.03	91.54	0.0003	28.56	27.39	8.10	35.65	1.70	$1-1-4+Pr_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.
(2) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.
(3) Cfr. i « Rendiconti » di questa Accademia a partire dal 2° sem. 1924.

Composizione teorica dei composti ottenuti

	Pr	Tl	H_2O	SO_4
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 5Tl_2SO_4$	9.11	66 —	—	24.89
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 4\,^1/_2\,Tl_2SO_4$	9.92	64 70	—	25.38
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 3Tl_2SO_4 \cdot H_2O$	13.41	58.29	0.85	27.45
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4 \cdot 4H_2O$	24.59	35.60	6.28	33.53

Con i dati della tabella I si è costruita la fig. 1, nella quale sull'asse delle ascisse si sono riportati i valori del rapporto $\frac{Pr_2(SO_4)_3}{Tl_2SO_4}$ determinato nei diversi corpi di fondo, e sulle ordinate quelli dell'altro rapporto $\frac{Tl_2SO_4}{H_2O}$, dato dalle fasi liquide.

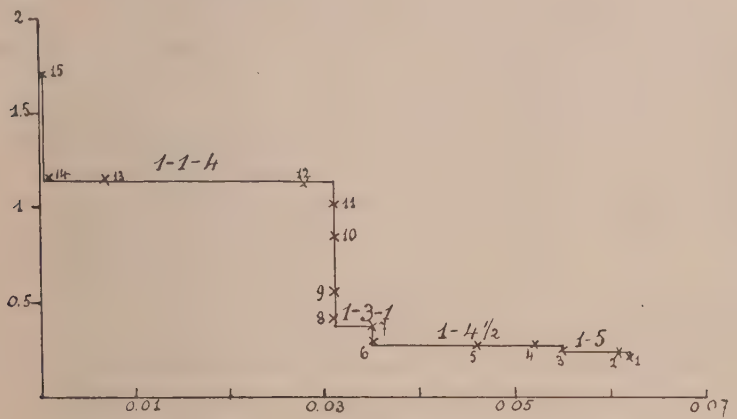


Fig. 1.

Dalla tabella I e dalla fig. 1 emerge chiaramente che i composti formatisi nelle nostre condizioni sperimentali sono i quattro seguenti:

$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 5Tl_2SO_4$	o	1 — 5
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 4\,^1/_2\,Tl_2SO_4$	o	1 — 4 $^1/_2$
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 3Tl_2SO_3 \cdot H_2O$	o	1 — 3 — 1
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4 \cdot 4H_2O$	o	1 — 1 — 4

I composti 1 — 4 $^1/_2$, 1 — 3 — 1 (o 1 — 3) si sono già osservati nello studio dei sistemi costituiti dall'acqua, dal solfato talloso e dal solfato di cerio o di lantanio: 1 — 1 — 4 si è avuto col cerio ed il tallio talloso. Nè col cerio, nè col lantanio, nè col neodimio abbiamo ottenuto

il composto 1 — 5, il quale viene, così, preparato per la prima volta nei solfati doppi dei metalli del gruppo del cerio con il solfato talloso.

Come al solito, noi abbiamo eseguito anche con il solfato di praseodimio e con quello di tallio talloso delle esperienze di cristallizzazione lenta da soluzioni contenenti i due solfati in vari rapporti. In quelle compiute nei mesi invernali, ad una temperatura che non superava i 12°–13°, si è anche ottenuto, nitidamente cristallizzato, il composto

$$Pr_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4 \cdot 8H_2O \text{ o } 1 — 1 — 8,$$

che non abbiamo avuto, invece, nello studio sistematico a 25°. Ed invero, i cristallini di 1 — 1 — 8, nel caso del praseodimio e del tallio talloso, non sono stabili a temperatura un po' superiore a quella indicata, e nel corso della estate, tenuti in tubetti paraffinati ad una temperatura che raggiunse anche i 28°, sfiorirono in gran parte, originando delle bellissime pseudomorfosi con conservazione perfetta della forma esteriore non solo, ma anche della striatura delle facce: soltanto lo splendore, da nettamente vitreo, è divenuto un po' setaceo. Anche il bel colore verde erba chiaro si è cambiato in bianco-grigiastro, con una netta punta nel verdastro. Singolare è il fatto, che i cristallini dell'idrato 1 — 1 — 8 provenienti da diversi depositi, benchè conservati nelle identiche condizioni, non si sono comportati ugualmente rispetto allo sfiorimento. Così, per esempio, i cristalli costituenti un primo deposito separatosi da una soluzione contenente grammi 1.25 Tl_2SO_4, in 10 cc. di soluzione satura di $Pr_2(SO_4)_3$, durante l'estate si sono completamente metamorfizzati, anche nell'interno, mentre quelli provenienti dal primo deposito di una soluzione con 0.75 Tl_2SO_4 non presentavano, dopo lo stesso tempo, che limitate zone di sfiorimento puramente superficiale, le quali, durante un altro anno dalla loro formazione, non progredirono ulteriormente. In seguito, però, anche in questi cristalli la disidratazione parziale si è estesa a tutta la massa, senza che anche nell'interno restasse la minima traccia dell'idrato 1 — 1 — 8.

I cristalli del composto $Tl_2SO_4 \cdot Pr_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$ presentano nella maggior parte dei casi le facce del pinacoide {010} strettissime e, in ogni caso, poco estese. Sovente due facce parallele del prisma {011} sono notevolmente più sviluppate delle altre due. Nella zona [001] si hanno le facce, di solito piccole, del prisma {110} ed il succedersi dei prismi, spesso in combinazione oscillatoria, prossimi a {100}.

Sempre del tutto subordinate, quando esistono, sono le faccette del prisma {012}. Eccezionali sono dei cristalli tabularissimi secondo {100}, non sostituito dai prismi vicinali, e limitati da {010} e {011}.

La composizione chimica è, effettivamente, quella dell' 1 — 1 — 8:

Pr 23.24 trov. (23.13 calc.) ; SO_4 31.84 trov. (31.54 calc.);
H_2O 11.60 trov. (11.83 calc.).

L'altro composto ottenuto in nitidi cristalli da soluzioni contenenti quantità variabili dei due solfati è $Tl_2SO_4 \cdot Pr_2(SO_4)_3 \cdot 4H_2O$ o 1 — 1 — 4.

I cristalli sono di due tipi. Quelli del primo sono grandi e tozzi, con dominanti le facce del prisma {110} e, poco più piccole, quelle di {011}: soltanto con faccette esilissime si rinviene il pinacoide {100}. Questi cristalli sono formati da molti individui intrecciati: le facce si presentano curve e spezzettate, sicchè misure esatte riescono impossibili, e si può soltanto stabilire il loro isomorfismo col composto di cerio studiato da Wyrouboff. Nel secondo tipo, invece, si hanno cristallini molto allungati nella direzione dell'asse *c*, e con le forme {100}, {110}, {011}. Il pinacoide {100} ha faccette abbastanza larghe.

Molto più interessanti sono dei cristallini di un altro successivo deposito, i quali sono tutti allungati secondo l'asse verticale, e, spesso, geminati secondo la legge: asse di geminazione la normale a (100). Sono più ricchi di facce di quelli precedentemente descritti, poichè in essi abbiamo osservato le forme {100}, {110}, {210}, {011}, {111}, {101}. Nella zona [001] il pinacoide {100} è sovente abbastanza esteso, tanto che i cristalli appaiono piuttosto tabulari, ma anche spesso è ridotto, e domina, allora, il prisma {110}. Il prisma {210} è frequentissimo, ma sempre con facce esili. Tra le forme terminali, domina generalmente {011}, ed allora il prisma {111} ha faccette assai strette e piccole, ma talvolta si verifica proprio l'opposto, e, cioè, il prisma {111} è molto esteso e {011} ridotto ad esili listerelle. Il pinacoide {101} è sempre, quando è presente, del tutto subordinato.

Benchè i cristalli descritti abbiano spesso le loro facce apparentemente piane e lucenti, pure le misure risultano in complesso poco buone ed oscillanti entro limiti abbastanza estesi.

Abbiamo, perciò, rinunciato a calcolare delle costanti speciali per i nostri cristalli, e nella tabella che segue gli angoli misurati sono confrontati con quelli calcolati in base alle costanti di Wyrouboff per il composto di cerio e tallio ($a : b : c = 1.1309 : 1 : 0.7059$; $\beta = 91°53'$)

	Mis.	Calc. (Wyroubov per il sale di Ce e Tl)
(110) : ($\bar{1}$10)	83° 24′	83° 0′
(100) : (110)	48 21	48 30
(100) : (210)	29 47	29 28
(100) : (011)	88 55	88 28
(100) : (111)	62 46	61 46
(111) : (1$\bar{1}$1)	61 14	61 4
(101) : (111)	30 35	30 32
(011) : (110)	62 50	63 17

Nelle nostre condizioni sperimentali, i due composti che hanno un campo di stabilità più esteso sono $1 - 1 - 4$ e $1 - 4\,^1/_2$.

Il composto $Pr_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4 \cdot 4H_2O$ si è ottenuto nelle esperienze in termostato a 25° sotto forma di una polvere cristallina, verde pallida, che al microscopio risulta costituita da minuti cristallini prismatici allungati, come quelli già descritti. Il composto $1 - 1 - 4$ è stabile, a 25°, in contatto con soluzioni che contengono da circa 8 % $Pr_2(SO_4)_3$ e tracce di solfato talloso a 0.2 % circa di solfato di praseodimio e 3 % circa di solfato talloso.

Il solfato doppio $Pr_2(SO_4)_3 \cdot 3Tl_2SO_4 \cdot H_2O$ è una polvere cristallina, verdolina, formata da cristallini allungati con estinzione parallela all'allungamento. È stabile, a 25°, in contatto di soluzioni con circa 0.1 % di solfato di praseodimio e da circa 3 a 3.4 % di solfato talloso.

Il composto $Pr_2(SO_4)_3 \cdot 4\,^1/_2\,Tl_2SO_4$ o $1 - 4\,^1/_2$ si è ottenuto sotto forma di minutissimi cristallini tabulari e allungati, con estinzione parallela all'allungamento, che è otticamente negativa. È stabile, a 25°, in presenza di soluzioni che contengono tutt'al più tracce di praseodimio e da 3.4 a 5 % circa di solfato talloso.

Finalmente, il solfato doppio $Pr_2(SO_4)_3 \cdot 5Tl_2SO_4$ è una polvere cristallina, di colore giallo verdolino chiaro, che al microscopio risulta formata da cristallini assai piccoli, stabili, a 25°, in contatto di soluzioni che contengono da 5.3 a 5.8 % circa di solfato talloso e sono praticamente prive di praseodimio.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Dell'associabilità di m congruenze di curve nello spazio ad n dimensioni.* Nota di GIUSEPPE CORBELLINI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Riferiamoci ad uno spazio *analitico* ad n dimensioni S_n, tale cioè che i suoi punti siano in corrispondenza biunivoca continua con le ennuple di variabili $x^{(i)}$ (coordinate di S_n). In esso siano assegnate m congruenze di curve indipendenti $[\lambda_r]$ $(r = 1, 2, \cdots, m;\ 2 \leq m < n)$, definite, per ogni valore dell'indice r, dal sistema di equazioni differenziali:

$$dx^{(i)} = \rho_r \lambda_r^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

nelle quali le $\lambda_r^{(i)}$ sono funzioni del posto linearmente indipendenti, e le ρ_r sono fattori infinitesimi indeterminati di proporzionalità.

Diremo che le m congruenze indipendenti $[\lambda_r]$ sono *associabili* fra loro, *se esiste una famiglia* ∞^{n-m} *di superficie ad m dimensioni* (superficie *associatrici* delle m congruenze), *tali che ogni superficie della famiglia contiene per intero* (nel campo che si considera) *le m linee delle congruenze* $[\lambda_r]$ *passanti per un suo punto generico*, le quali, quindi, risultano costantemente tangenti a detta superficie.

Oggetto di questa Nota è la ricerca e lo studio delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè m congruenze di curve indipendenti di S_n, siano associabili fra loro [2].

Sotto l'aspetto geometrico, si vedrà che queste condizioni consistono nel fatto che $m(m-1)/2$ congruenze di curve (le cui componenti sono costituite in modo caratteristico con le $\lambda_r^{(i)}$ e con le loro derivate prime) devono essere tangenti, in ciascun punto di S_n, allo spazio lineare ad m dimensioni ivi determinato dalle $[\lambda_r]$ stesse. Soddisfatte queste condizioni, le equazioni in termini finiti delle superficie associatrici si ottengono me-

(1) Nella seduta del 26 aprile 1931.

(2) Per $m = n - 1$, la soluzione del problema è indicata nella mia Nota *Sopra i sistemi di coordinate in una varietà qualunque*, in «Rendiconti» di questa R. Accademia, vol. XXXII, 1° sem. 1923, p. 112 *passim*.

diante l'integrazione di un sistema *completo* di equazioni lineari ed omogenee alle derivate parziali del primo ordine [1].

Sotto l'aspetto analitico, alle condizioni di associabilità possono venir attribuite varie forme, sostanzialmente equivalenti, fra le quali è precipua quella – che si connette col punto di vista della teoria dei sistemi di equazioni ai differenziali totali [2] – consistente nell'annullarsi di certi sistemi di espressioni (delle $\lambda_r^{(i)}$ e delle loro derivate prime), i quali verranno denotati col nome di « sistemi contravarianti bilineari » delle m congruenze assegnate, in quanto godono le proprietà espresse da tale denominazione.

Chiudono il lavoro alcune considerazioni metriche, aventi per iscopo l'interpretazione nello spazio di Riemann dei risultati conseguiti.

1. Supponiamo anzitutto che le m congruenze di curve siano associabili fra loro. Per ipotesi, adunque, esisterà una famiglia ∞^{n-m} di superficie ad m dimensioni che contiene le m congruenze $[\lambda_r]$. Le equazioni di questa famiglia siano:

$$f_\alpha(x^{(1)}, x^{(2)} \cdots x^{(n)}) = y_\alpha \qquad (\alpha = m+1, m+2 \cdots n) \tag{2}$$

dove le f_α sono $n-m$ funzioni indipendenti dei loro argomenti e le y_α altrettante costanti arbitrarie.

Differenziamo ambo i membri delle (2) tenendo conto delle (1), o, come diremo più brevemente, deriviamo le (2) in direzione λ_r; avremo:

$$X_r f_\alpha \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^{(i)}} \lambda_r^{(i)} = 0 \qquad (r = 1, 2 \cdots m;\ \alpha = m+1, m+2 \cdots n) \tag{3}$$

dalle quali seguono, come è noto, le condizioni differenziali:

$$(X_s, X_r) f_\alpha \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^{(i)}} \sum_1^n{}_l \left\{ \lambda_{r/l}^{(i)} \lambda_s^{(l)} - \lambda_{s/l}^{(i)} \lambda_r^{(l)} \right\} = 0 \tag{4}$$

dove $\lambda_{r/l}^{(i)}$ denota la derivata ordinaria di $\lambda_r^{(i)}$ rispetto ad $x^{(l)}$.

Fissati gli indici r ed s, le $n-m$ identità che si ricavano dalla precedente attribuendo ad α i valori indicati, sono indipendenti fra loro in virtù della indipendenza delle funzioni f_α; perciò, in forza dell'emisimmetria rispetto agli indici r ed s, le (4) costituiscono $n-m$ gruppi di $m(m-1)/2$ relazioni indipendenti.

2. Per interpretare geometricamente le (4), facciamo le posizioni:

$$\tau_{rs}^{(i)} = \sum_1^n{}_l \left\{ \lambda_{r/l}^{(i)} \lambda_s^{(l)} \lambda_{s/l}^{(i)} \lambda_r^{(l)} \right\} = -\tau_{sr}^{(i)} \qquad (i = 1, 2 \cdots n). \tag{5}$$

(1) Per i fondamenti di tale teoria, dei quali qui si fa uso, cfr. p. es. T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, A. Stock, 1925, cap. III, pp. 45-75.

(2) Il punto di vista a cui ci si riferisce è quello sviluppato nella Nota di G. Ricci-Curbastro, *Della integrazione dei sistemi di equazioni ai differenziali totali*, « Atti del R. Ist. Veneto », parte 1ª e 2ª. p. 178 *passim*.

È facile convincersi che per valori prefissati degli indici r ed s le $\tau_{rs}^{(i)}$ costituiscono un sistema semplice contravariante (come del resto proveranno anche le considerazioni metriche del § 9); possiamo perciò riguardare le $\tau_{rs}^{(i)}$ come le componenti di una congruenza di curve $[\tau_{rs}]$.

Ciò premesso, consideriamo il sistema algebrico nelle n incognite $Z^{(i)}$, costituito dalle $n - m$ equazioni lineari ed omogenee:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^{(i)}} Z^{(i)} = 0 \qquad (\alpha = m+1, m+2 \cdots n).$$

Per le ipotesi, la matrice di questo sistema ha caratteristica $n - m$, e perciò esso ammette $n - (n - m) = m$ sistemi di soluzioni indipendenti, che, in virtù della supposta associabilità espressa dalle (3), potranno essere identificate con le $\lambda_r^{(i)}$. Ma poichè dalle (3) seguono le (4), anche le $\tau_{rs}^{(i)}$ sono soluzioni del sistema precedente, e perciò le $\tau_{rs}^{(i)}$ devono dipendere linearmente dalle $\lambda_r^{(i)}$. Sicchè, indicando con $p_{rst} = -p_{srt}$ delle funzioni indeterminate del posto, dovrà essere:

$$(6) \qquad \tau_{rs}^{(i)} = \sum_1^m{}_t p_{rst} \lambda_t^{(i)} \qquad (r, s = 1, 2 \cdots m;\ i = 1, 2 \cdots n).$$

Geometricamente, queste esprimono che le congruenze $[\tau_{rs}]$, in ciascun punto di S_n, devono essere tangenti allo spazio lineare ad m dimensioni ivi caratterizzato dalle congruenze $[\lambda_r]$.

3. Per dimostrare che questa condizione è anche sufficiente, consideriamo il sistema di equazioni alle derivate parziali nell'unica funzione incognita $f(x^{(1)}, x^{(2)} \cdots x^{(n)})$:

$$(3') \qquad X_r f \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} \lambda_r^{(i)} = 0 \qquad (r = 1, 2 \cdots m)$$

insieme con le sue conseguenze differenziali:

$$(X_s, X_r) f \equiv \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} \tau_{rs}^{(i)} = 0 \qquad (r, s = 1, 2 \cdots m).$$

Ma per le ipotesi (6), queste ultime sono conseguenza algebrica delle (3'), e perciò il sistema (3') è *completo*. Pertanto le (3') ammettono gli $n - m$ integrali indipendenti (2) nei quali le y_α devono riguardarsi come costanti arbitrarie.

4. Le considerazioni precedenti conducono alla conchiusione seguente:

Per riconoscere se m congruenze di curve indipendenti $[\lambda_r]$ sono o no associabili fra loro, basterà esaminare la caratteristica della matrice:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)} \cdots \lambda_1^{(n)} \\ \lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)} \cdots \lambda_2^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)} \cdots \lambda_m^{(n)} \\ \tau_{rs}^{(1)}, \tau_{rs}^{(2)} \cdots \tau_{rs}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (r, s = 1, 2 \cdots m)$$

la quale, per le (6), deve essere minore di $m + 1$, anzi precisamente eguale ad m a causa della indipendenza delle congruenze considerate.

5. Passiamo ora ad indicare un'altra forma delle condizioni di associabilità, nella quale intervengono i coefficienti del sistema di equazioni ai differenziali totali la cui integrazione equivale all'integrazione del sistema (3').

Consideriamo gli $n - m$ sistemi di funzioni linearmente indipendenti $\Lambda\alpha/i (\alpha = m + 1, m + 2 \cdots n)$ definite a meno di una combinazione lineare d'ordine m, tali che per essi sussistano le identità:

$$(7) \qquad \sum_1^n{}_i \Lambda_{\alpha/i} \lambda_r^{(i)} = 0 \qquad (r = 1, 2 \cdots m; \ \alpha = m + 1, m + 2 \cdots n)$$

dalle quali, per le (1), discende il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$(7') \qquad \sum_1^n{}_i \Lambda_{\alpha/i} \, dx^{(i)} = 0 \qquad (\alpha = m + 1, m + 2 \cdots n).$$

Se questo sistema è illimitatamente integrabile, ciascuna ipersuperficie che vi soddisfa, per le (1), contiene le m congruenze $[\lambda_r]$, e inversamente; perciò la sua soluzione fornisce le superficie associatrici delle $[\lambda_r]$. Ora, moltiplicando ambo i membri delle (6) per $\Lambda_{\alpha/i}$ e sommando rispetto ad i da 1 ad n, indi badando alla (7), si ricava:

$$(8) \qquad \sum_1^n{}_i \Lambda_{\alpha/i} \tau_{rs}^{(i)} = 0 \qquad (r, s = 1, 2 \cdots m; \alpha = m + 1, m + 2 \cdots n).$$

Reciprocamente, dalla coesistenza delle (7) e delle (8) seguono le (6); le (8) sono dunque le condizioni di illimitata integrabilità per le (7').

6. A primo membro delle (8) figurano $n - m$ sistemi di forme lineari ed omogenee nelle $\tau_{rs}^{(i)}$, la cui espressione esplicita è:

$$H_\alpha^{(r,s)} \equiv \sum_1^n{}_i \Lambda_{\alpha/i} \sum_1^n{}_l \left\{ \lambda_{r/l}^{(i)} \lambda_s^{(l)} - \lambda_{s/l}^{(i)} \lambda_r^{(l)} \right\} = - H_\alpha^{(s,r)}$$
$$(r, s = 1, 2 \cdots m; \ \alpha = m + 1, m + 2 \cdots n)$$

definite a meno di una sostituzione lineare delle $\Lambda_{\alpha/i}$. Fissato l'indice α attribuendo ad r ed s i valori indicati, le $H_\alpha^{(r,s)}$ costituiscono un sistema

di forme al quale conviene la denominazione di « sistema contravariante bilineare » delle m congruenze di curve $[\lambda_r]$.

Invero, derivando le (7) in direzione λ_s, con uno scambio di indici, per sottrazione si trova:

$$(9) \qquad H_\alpha^{(r,s)} = -\sum_1^n{}_{il} \{ \Lambda_{\alpha/il} - \Lambda_{\alpha/li} \} \lambda_r^{(i)} \lambda_s^{(l)}$$

avendo indicato con $\Lambda_{\alpha/il}$ la derivata ordinaria di $\Lambda_{\alpha/i}$ rispetto ad $x^{(l)}$.

Dalle (9) si rileva anzitutto che le $H_\alpha^{(r,s)}$ sono espressioni bilineari delle componenti delle congruenze $[\lambda_r]$ e $[\lambda_s]$.

7. Inoltre, consideriamo la sostituzione lineare (propria) involgente le m congruenze $[\lambda_r]$:

$$(10) \qquad \lambda_r^{(i)} = \sum_1^m{}_j a_{rj} \lambda_j^{(i)} \qquad |a_{rj}| \neq 0 \qquad (r = 1, 2 \cdots m ; \ i = 1, 2 \cdots n)$$

la quale, dal punto di vista geometrico, trasforma le m congruenze $[\lambda_r]$ in altrettante congruenze indipendenti $[\bar{\lambda}_s]$, che, in ciascun punto di S_n sono tangenti allo spazio lineare ivi definito dalle $[\lambda_r]$ stesse.

Indichiamo con $\bar{H}_\alpha^{(j,h)}$ le espressioni analoghe alle $H_\alpha^{(r,s)}$ costruite con le congruenze $[\lambda_j]$ e $[\bar{\lambda}_h]$. Disponendo opportunamente – nel modo che indicheremo – dell'arbitrarietà con cui le $\bar{H}_\alpha^{(j,h)}$ sono definite, si prova facilmente che la sostituzione (10) subordina nelle $H_\alpha^{(r,s)}$ la sostituzione (legge di contravarianza):

$$H_\alpha^{(r,s)} = \sum_1^m{}_{jh} a_{rj} a_{sh} \bar{H}_\alpha^{(j,h)}$$

il che è in armonia col significato geometrico dell'annullarsi delle $H_\alpha^{(r,s)}$.

Infatti, operando la sostituzione (10) sulle (7) e osservando che $|a_{rj}| \neq 0$ per ipotesi, si ricavano le identità:

$$\sum_1^n{}_i \Lambda_{\alpha/i} \bar{\lambda}_j^{(i)} = 0 \qquad (j = 1, 2 \cdots m)$$

sicché, sebbene dalle (7) apparisca che le $\Lambda_{\alpha/i}$ dipendono dalle congruenze $[\lambda_r]$, tuttavia esse si possono riguardare come collegate con lo spazio lineare definito dalle $[\lambda_r]$ in ciascun punto di S_n, e perciò come invarianti rispetto alla sostituzione (10) nel senso che ad ogni sistema $H_\alpha^{(r,s)}$ si può far corrispondere il sistema $\bar{H}_\alpha^{(j,h)}$ costruito con le medesime $\Lambda_{\alpha/i}$.

Ciò premesso, operando nel secondo membro delle (9) la sostituzione (10), e notando che in virtù di quanto si è testè osservato per le $\Lambda_{\alpha/i}$, ci pos-

siamo dispensare dal trasformare le $\Lambda_{\alpha/il}$, il comportamento controvariante delle $H_\alpha^{(rs)}$ apparisce evidente.

In particolare, per $n = 2$ ogni sistema contravariante bilineare delle due congruenze si compone di un solo elemento distinto $H_\alpha^{(1,2)} = -H_\alpha^{(2,1)}$, e si ha:

$$H_\alpha^{(1,2)} = (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,\overline{H}_\alpha^{(1,2)} \qquad (\alpha = 3, 4 \cdots n).$$

Perciò ogni $H_\alpha^{(1,2)}$ è un *contravariante numerico.*

8. Ritornando al caso generale $(2 \leqq m < n)$ in forza della considerazione che le (7) definiscono $n - m$ sistemi di valori indipendenti per le $\Lambda_{\alpha/i}$, per ogni emmupla di congruenze $[\lambda_r]$ si hanno $n - m$ sistemi contravarianti bilineari linearmente distinti, cioè ogni altro sistema contravariante bilineare delle m congruenze, è una combinazione lineare di essi.

Perciò, ritornando alle condizioni necessarie e sufficienti per l'associabilità, espresse dalle (8), possiamo conchiudere che esse si interpretano dicendo che ogni sistema contravariante bilineare delle congruenze assegnate, deve essere identicamente nullo.

9. Ad illustrazione delle precedenti considerazioni, riferiamoci, invece che ad uno spazio analitico S_n, ad una varietà metrica V_n (spazio di Riemann), e nelle (1) riguardiamo le $\lambda_r^{(i)}$ come effettivi parametri di direzione.

Osserviamo in primo luogo che le $\tau_{rs}^{(i)}$ introdotte al § 2, non mutano il loro valore numerico se le $\lambda_{r/l}^{(i)}$ invece di denotare derivate ordinarie, indicano, come intenderemo d'ora in poi, le derivate covarianti delle $\lambda_r^{(i)}$ rispetto alla metrica della V_n; cioè:

$$\sum_1^n{}_l \left\{ \lambda_{r/l}^{(i)} \lambda_s^{(l)} - \lambda_{s/l}^{(i)} \lambda_r^{(l)} \right\} = \sum_1^n{}_l \left\{ \frac{\partial \lambda_r^{(i)}}{\partial x^{(l)}} \lambda_s^{(l)} - \frac{\partial \lambda_s^{(i)}}{\partial x^{(l)}} \lambda_r^{(l)} \right\} \equiv \tau_{rs}^{(i)}.$$

Per convincersene, basta tener presenti le espressioni esplicite delle derivate covarianti del sistema semplice contravariante [1]; eseguendo materialmente le differenze indicate, i termini contenenti i simboli di Christoffel si elidono.

La precedente espressione metrica delle $\tau_{rs}^{(i)}$, rende evidente il loro comportamento contravariante (cfr. § 2).

Ora è noto che le quantità:

$$\sum_1^n{}_i \lambda_{r/l}^{(i)} \lambda_s^{(l)} \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

(1) Cfr. T. Levi-Civita, op. cit., p. 179 formola (5′).

sono le componenti della derivata vettoriale o geometrica della congruenza $[\lambda_r]$, calcolata nella direzione della congruenza $[\lambda_s]$ (1).

Pertanto, le condizioni di associabilità (6), si possono interpretare dicendo che tutti i vettori ottenuti formando le differenze due a due fra le derivate geometriche delle m congruenze $[\lambda_r]$, ottenute derivando l'una in direzione dell'altra, devono essere tangenti alla varietà geodetica determinata, in ciascun punto di V_n, dalle m congruenze $[\lambda_r]$.

10. Sempre dal punto di vista metrico, si può attribuire alle condizioni di associabilità un'altra forma, che ha il pregio di una particolare evidenza geometrica. In causa del loro carattere covariante, le $\Lambda_{\alpha li}$ che figurano nelle (7), possono riguardarsi come proporzionali, o anche eguali, ai momenti di direzione di $n - m$ congruenze indipendenti $[\Lambda_\alpha]$ che, per le (7) stesse, sono ortogonali alle congruenze $[\lambda_r]$. L'illimitata integrabilità del sistema di equazioni ai differenziali totali (7'), equivale al fatto che esistono $n - m$ combinazioni lineari distinte dei primi membri delle (7'), che sono differenziali esatti delle $n - m$ funzioni f_α. Perciò le condizioni di associabilità equivalgono alla circostanza geometrica che fra le ∞^{n-m-1} congruenze ortogonali alle congruenze assegnate $[\lambda_r]$ devono esisterne $n - m$ indipendenti fra loro, ciascuna delle quali sia normale ad una famiglia ∞^1 di ipersuperficie di V_n.

In particolare, per $m = n - 1$, la congruenza ortogonale alle $n - 1$ congruenze indipendenti $[\lambda_r]$ è unica e ben determinata. Le condizioni di associabilità dicono dunque che essa deve essere normale (2).

(1) Questo concetto fu introdotto dal Bianchi; la denominazione qui indicata dal Levi-Civita. Cfr. T. Levi-Civita, *The absolute differential calculus*, London and Glasgow, Blackie and son, 1927, pp. 139–140.

(2) Sotto questa forma fu espressa la condizione metrica di associabilità per $n - 1$ congruenze di curve nella mia Nota citata.

Matematica (Analisi Matematica). — *Sul prodotto di serie sommabili secondo Cesaro.* Nota I di G. MAMMANA, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

In uno studio in corso: *Sull'algebra delle serie sommabili relativamente al più generale metodo di sommazione* [2], ho avuto occasione di notare – quando ci si riferisca al particolare metodo di sommazione di Cesaro – un teorema assai generale sul prodotto (secondo Cauchy) di due serie che, per quanto io sappia, non è stato finora messo in evidenza. Da esso discende come immediato corollario il noto teorema sul prodotto di due serie convergenti (sommabili, cioè, relativamente alla successione (C, o) di Cesaro) di cui una assolutamente convergente, si può dire, anzi, che di questo ultimo ci si dà ragione ora che è stato stabilito quello generale.

In questa Nota verrà anche data una semplice dimostrazione di un secondo teorema, noto [3], sul prodotto (secondo Cauchy) di serie sommabili alla maniera di Cesaro, dal quale consegue l'altro relativo al prodotto di due serie convergenti nell'ipotesi che sia convergente la corrispondente serie prodotto.

La ricerca dei teoremi sul prodotto di serie sommabili relativamente al più generale metodo di sommazione [4] è di notevole interesse, e l'algebra di queste serie rimane incompleta, e in certo modo sterile fino a che questi teoremi non saranno raggiunti; e d'altra parte, finora, la questione, per quanto a me consti, è stata abbordata solo in pochissimi casi relativi a qualche particolare metodo di sommazione [5].

Anche per questo ritengo utile mettere in rilievo il teorema oggetto della presente Nota.

Reputo opportuno ricordare dapprima il significato di alcune locuzioni e dei simboli solitamente adoperati.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Del quale sono casi particolari i noti metodi di sommazione di Cesaro, Hölder, Abel, Eulero, Borel, ecc.

(3) Cfr. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, verlag von Julius Springer, 1924; 277, Satz 9, p. 489.

(4) Cfr. PICONE, *Sui metodi di sommazione della serie*, « Annali di matematica pura e applicata », t. II della Serie IV, pp. 263-295.

(5) Oltre al teorema citato nella precedente nota 3, sussiste un teorema sul prodotto analogo a quello di Mertens per le serie sommabili secondo il metodo E_1 di Eulero di ordine 1 soltanto. Cfr. KNOPP, loc. cit., n. 292, p. 514; e l'altro evidente relativo alle serie sommabili secondo Abel.

Si prendano a considerare le due serie numeriche:

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} a_s \quad ; \qquad (2) \quad \sum_{s=1}^{\infty} b_s ,$$

e si ponga:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s = A_n^{(0)} \quad , \quad \sum_{s=1}^{n} A_s^{(0)} = A_n^{(1)} , \cdots , \sum_{s=1}^{n} A_s^{(i-1)} = A_n^{(i)} , \cdots$$

$$\sum_{s=1}^{n} b_s = B_n^{(0)} \quad , \quad \sum_{s=1}^{n} B_s^{(0)} = B_n^{(1)} \quad , \quad \sum_{s=1}^{n} B_s^{(j-1)} = B_n^{(j)} , \cdots$$

Se per un valore di i (di j), esistono determinati e finiti, i limiti seguenti:

$$(3) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{i!\, A_n^{(i)}}{n^i} = \lim \frac{i! \sum_{s=1}^{n} A_s^{(i-1)}}{n^i} \equiv A , \qquad (4) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{j!\, B_n^{(j)}}{n^j} = \lim \frac{j! \sum_{s=1}^{n} B^{(j-1)}}{n^j} \equiv B ,$$

si suol dire che la (1) (la (2)) è sommabile relativamente alla successione di Cesaro (C, i) d'ordine i ((C, j) d'ordine j) ed ha per somma A (per somma B). Si dirà anche che la (1), ad esempio, è assolutamente sommabile rispetto alla successione (C, i), se è determinato e finito anche il limite della successione: $\dfrac{i! \sum_{s=1}^{n} |A_s^{(i-1)}|}{n^i}$. Ciò posto si ha il

Teorema I. – *Se due serie sono sommabili relativamente alle successioni* (C, i) *e* (C, j) *rispettivamente, e una di esse lo è assolutamente, la serie prodotto* (secondo Cauchy) *delle due è sommabile relativamente alla successione* $(C, i + j)$ – *e quindi anche relativamente a ogni successione di ordine* $r > i + j$ – *ed ha per somma il prodotto delle serie fattori.*

Ne segue: Se la suddetta serie prodotto riesce sommabile relativamente a una successione di Cesaro di ordine $s < i + j$ [1], la relativa somma è uguale al prodotto delle somme, ecc.

In particolare quindi: Se le due serie sono convergenti (cioè sommabili entrambe rispetto alla successione $(C, 0)$) la serie prodotto è convergente, ecc.

Prima di procedere alla dimostrazione di questo teorema, enuncieremo e dimostreremo l'altro di cui abbiamo fatto cenno sopra:

(1) Cfr. Knopp, loc. cit., n. 268, p. 479.

Teorema II. – *Se due serie sono sommabili relativamente alle successioni* (C, i), (C, j) *rispettivamente, la serie prodotto* (secondo Cauchy) *è sommabile relativamente alla successione* $(C, i+j+1)$, ecc.

Poniamo:

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} (a_1 b_s + a_2 b_{s-1} + \cdots + a_s b_1) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} c_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} c_s = C_n^{(0)} \quad , \quad \sum_{s=1}^{n} C_s^{(r-1)} = C_n^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

Ricordiamo le identità (di immediata verifica)

$$C_n^{(0)} = a_1 B_n^{(0)} + a_2 B_{n-1}^{(0)} + \cdots + a_n B_1^{(0)} = b_1 A_n^{(0)} + b_2 A_{n-1}^{(0)} + \cdots + b_n A_1^{(0)}.$$

$$C_n^{(1)} = \sum_{s=1}^{n} a_s B_{n-s}^{(1)} = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{n-s}^{(1)} = \sum_{s=1}^{n} A_s^{(0)} B_{n-s}^{(0)} ;$$

$$C_n^{(r+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_s B_{n-s}^{(r+1)} = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{n-s}^{(r+1)} = \sum_{s=1}^{n} A_s^{(l)} B_{n-s}^{(r-l)} \quad (l = 0, 1, \cdots, r).$$

Ci proponiamo dimostrare che la successione

$$(6) \qquad \frac{(i+j+1)!\, C_n^{(i+j+1)}}{n^{i+j+1}} = (i+j+1)! \frac{A_1^{(i)} B_n^{(j)} + A_2^{(i)} B_{n-1}^{(j)} + \cdots + A_n^{(i)} B_1^{(j)}}{n^{i+j+1}}$$

è convergente ed ha per limite AB.

Conviene premettere il calcolo del limite della seguente successione: $N_n = \dfrac{1^r (n-1)^s + 2^r (n-2)^s + \cdots + (n-1)^r 1^s}{(n-1)^{r+s+1}}$, essendo r ed s assegnati numeri interi positivi.

$$N_n = \frac{1^r \left\{ \binom{s}{0} n^s - \binom{s}{1} n^{s-1} + \cdots \pm \binom{s}{s} n^0 \right\} + 2^r \left\{ \binom{s}{0} n^s - \binom{s}{1} n^{s-1} 2 + \cdots \pm \right.}{(n-1)^{r+s+1}}$$

$$\frac{\left. \pm \binom{s}{s} n^0 2^s \right\} + \cdots + (n-1)^r \left\{ \binom{s}{0} n^s - \binom{s}{1} n^{s-1} (n-1) + \cdots \pm \binom{s}{s} n^0 (n-1)^s \right\}}{(n-1)^{r+s+1}} =$$

$$= \binom{s}{0} \left(\frac{n}{n-1} \right)^s \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^r}{(n-1)^{r+1}} - \binom{s}{1} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{s-1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^{r+1}}{(n-1)^{r+2}} + \cdots \pm$$

$$\pm \binom{s}{s} \left(\frac{n}{n-1} \right)^0 \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^{r+s}}{(n-1)^{r+s+1}} = \binom{r}{0} \left(\frac{n}{n-1} \right)^r \frac{\sum_{s=1}^{n-1} i^s}{(n-1)^{s+1}} - \cdots \text{ etc.},$$

da cui:

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i} \frac{1}{r+i+1} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \frac{1}{s+i+1} = \psi(r, s).$$

Il teorema II sopra enunciato riesce, ciò premesso, immediata conseguenza del seguente:

LEMMA. – *Se le successioni* α_n *e* β_n *sono convergenti ed hanno per limiti rispettivamente* α *e* β, *la successione:*

$$\Gamma_n = \frac{1^r (n-1)^s \alpha_1 \beta_{n-1} + 2^r (n-2)^s \alpha_2 \beta_{n-2} + \cdots + (n-1)^r 1^s \alpha_{n-1} \beta_1}{(n-1)^{r+s+1}}$$

risulta pure convergente, e si ha precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \alpha\beta\, \psi(r, s).$$

Fissato, invero, un numero positivo ε possiamo in conseguenza determinarne un altro ν intero positivo e tale che per $n \geqq \nu$ si abbia a un tempo: $\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$, $\beta - \varepsilon < \beta_n < \beta + \varepsilon$.

Poniamo: $\alpha_n = \alpha + \theta_n \varepsilon$, $\beta_n = \beta + \tau_n \varepsilon$. I numeri θ_n e τ_n, per $n \geqq \nu$ soddisfano alle limitazioni: $|\theta_n| < 1$, $|\tau_n| < 1$.

Consideriamo valori di $n > 2\nu$. Abbiamo successivamente:

$$\Gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^{\nu-1} i^r (n-i)^s \alpha_i \beta_{n-i}}{(n-1)^{r+s+1}} + \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s \alpha_i \beta_{n-i}}{(n-1)^{r+s+1}} + \frac{\sum_{i=1}^{\nu-1} i^s (n-i)^r \beta_i \alpha_{n-i}}{(n-1)^{r+s+1}}.$$

I due termini estremi del secondo membro di questa eguaglianza tendono ovviamente a zero per $n \to \infty$. Abbiamo conseguentemente:

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s \alpha_i \beta_{n-i}}{(n-1)^{r+s+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s (\alpha + \theta_i \varepsilon)(\beta + \tau_{n-i} \varepsilon)}{(n-1)^{r+s+1}}$$

posto, naturalmente, che di limite si possa parlare. E ancora:

$$\lim \Gamma_n = \alpha\beta \lim \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s}{(n-1)^{r+s+1}} + \alpha\varepsilon \lim \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s \tau_{n-i}}{(n-1)^{r+s+1}} +$$

$$+ \beta\varepsilon \lim \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s \theta_i}{(n-1)^{r+s+1}} + \varepsilon^2 \lim \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s \theta_i \tau_{n-i}}{(n-1)^{r+s+1}}.$$

I coefficienti di $\alpha\varepsilon$, $\beta\varepsilon$, ed ε^2 sono finiti, e ciascuno di essi è numericamente inferiore a $\psi(r,s)$; quanto al coefficiente di $\alpha\beta$ si ha poi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=\nu}^{n-\nu} i^r (n-i)^s}{(n-1)^{r+s+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^r (n-i)^s}{(n-1)^{r+s+1}} = \psi(r,s)$$

ne segue:

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \alpha\beta\psi(r,s).$$

Se ora osserviamo che la successione $\frac{C_n^{(i+j+1)}}{n^{i+j+1}}$ si ottiene dalla successione Γ_n cambiandovi: α_l in $\frac{A_l^{(i)}}{l^i}$ (per $l = 1, 2, \cdots, n$), β_{n-l} in $\frac{B_{n-l}^{(j)}}{(n-l)^j}$ (per $l = 0, 1, \cdots, n-1$), e n in $n+1$, potremo concludere, tenute presenti le (3) e (4), che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C^{(i+j+1)}}{n^{i+j+1}} = \psi(i,j) \frac{A}{i!} \frac{B}{j!}. \tag{7}$$

Per completare la dimostrazione dell'enunciato teorema II ci resta da verificare solo che: $\psi(i,j) = \frac{i!\,j!}{(i+s+1)!}$.

A questo arriveremo con metodo indiretto semplicemente come segue.

Supponiamo, per un momento, le serie (1) e (2) convergenti, e supponiamo pure convergente la serie prodotto (5); diciamone: A, B, e C le rispettive somme. Sarà $C = AB$. Pel teorema fondamentale relativo al più generale metodo di sommazione delle serie, le menzionate tre serie risulteranno sommabili rispetto a una qualsivoglia successione e le relative somme sono sempre date da A, B, e C rispettivamente. Segue quindi che, anche nella nuova ipotesi, si ha:

$$\lim \frac{A_n^{(i)}}{n^i} = \frac{A}{i!}, \quad \lim \frac{B_n^{(j)}}{n^j} = \frac{B}{j!}, \quad \text{e} \quad \lim \frac{C_n^{(i+j+1)}}{n^{i+j+1}} = \frac{C}{(i+j+1)!} = \frac{AB}{(i+j+1)!}.$$

Per la (7) abbiamo d'altra parte:

$$\frac{C}{(i+j+1)!} \equiv \frac{AB}{(i+j+1)!} = \psi(i,j) \frac{A}{i!} \frac{B}{j!}$$

da cui

$$\sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} \frac{1}{i+s+1} = \sum_{s=1}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \frac{1}{j+s+1} \equiv \psi(i,j) = \frac{i!\,j!}{(i+j+1)!}$$

c. v. d.

Matematica. — *Centri di gravità delle sezioni piane di un corpo omogeneo.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota recente [2] il prof. Levi-Civita dimostrò che in ogni corpo omogeneo esistono *direttrici ortobariche*, ossia linee tali che la sezione piana del corpo ottenuta col piano *normale* alla linea in uno qualunque dei suoi punti G, ha in G il corrispondente baricentro.

Il teorema è vero tanto se il luogo geometrico dei baricentri delle ∞^3 sezioni piane del corpo è un campo a tre dimensioni (corpi *barosterici*), tanto se è un campo superficiale (corpi *baroepipedi*), tanto se è una linea (corpi barogrammici [3].

In quest'ultimo caso, la linea che è il luogo geometrico dei baricentri delle sezioni piane è la *unica* direttrice ortobarica; nel caso dei corpi baroepipedi, le direttrici ortobariche formano una famiglia *di rango 1*; nel caso dei corpi barosterici formano una famiglia *di rango 2*.

In questa Nota si dimostra la esistenza di direttrici tali che il piano *osculatore* di una di esse, in uno qualunque dei suoi punti G, determina nel corpo una sezione piana il cui baricentro si troverà in G. Queste direttrici formano una famiglia *di rango 4*, nel caso dei corpi barosterici e *di rango 2*, nel caso dei corpi baroepipedi.

a) Supponiamo che il sistema sia barosterico. Sia Γ il campo a tre dimensioni, luogo geometrico dei baricentri delle sezioni piane del corpo, e sia $\boldsymbol{u}\ (u_1, u_2, u_3)$ il versore che, in ogni punto G di Γ, definisce la normale al piano la cui sezione ha in G il suo baricentro [4].

Essendo questo piano osculatore della curva cercata, $\boldsymbol{u}$ sarà la binormale. Se sono A, B, C i coefficienti dell'equazione del piano osculatore, sarà

$$(1) \qquad \frac{A}{u_1} = \frac{B}{u_2} = \frac{C}{u_3}.$$

(1) Nella seduta del 26 aprile 1931.

(2) V. « Rendiconti Acc. Lincei ». vol. XII, serie 6ª, 2° sem. fasc. 11, dicembre 1930.

(3) Successivamente (cfr. questo stesso volume di « Rendiconti ») il prof. Tricomi ha dimostrato che ogni effettivo corpo a tre dimensioni è necessariamente barosterico. È probabile che lo stesso accada anche per il caso qui studiato di sezioni praticate con piani osculatori. Diverrebbe allora inutile il contemplare anche l'eventualità *b*) del testo, la questione rimanendo esaurita dalla *a*).

(4) Se esistesse più di una sezione piana col suo baricentro in G, ne sceglieremo *una*.

Prendendo x come variabile indipendente (sulla curva cercata) avremo

$$(2) \qquad \begin{cases} A = y' z'' - z' y'', \\ B = -z'', \\ C = y''. \end{cases}$$

Perciò (1) è un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine, in cui y e z sono le variabili dipendenti. Il sistema integrale generale

$$(3) \qquad \begin{cases} y = F_1(x, c_1, c_2, c_3, c_4) \\ z = F_2(x, c_1, c_2, c_3, c_4) \end{cases}$$

definisce la famiglia (∞^4) delle linee cercate.

b) Supponiamo ora che il sistema sia baroepipedo. Sia γ la superficie, luogo geometrico dei baricentri delle ∞^3 sezioni piane del corpo. Ogni punto G di γ è baricentro di ∞^1 sezioni piane. Sia N il cono delle ∞^1 normali in G a queste sezioni piane [1]. Essendo x, y, z le coordinate di G e X, Y, Z le coordinate correnti, il cono N sarà rappresentato da un'equazione della forma

$$(4) \qquad \varphi_1(X - x, Y - y, Z - z) = 0$$

dove φ_1 è una funzione omogenea. Una delle sue generatrici avrà equazioni della forma

$$(5) \qquad \frac{X - x}{u_1} = \frac{Y - y}{u_2} = \frac{Z - z}{u_3} = t$$

dove sia $\alpha(u_1, u_2, u_3)$ il corrispondente versore.

Eliminando fra (4) e (5) si ha

$$(6) \qquad \varphi_1(u_1, u_2, u_3) = 0$$

E siccome $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, per essere u_1, u_2, u_3 coseni direttori, sarano u_2 e u_3, per esempio, funzioni di u_1.

Se rappresentiamo con

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \vartheta(u, v) \end{cases}$$

le equazioni parametriche della superficie γ, i coefficienti dell'equazione (6) saranno funzioni delle coordinate u, v del punto G. I coseni u_2 e u_3 saranno espressi perciò in funzione di u, v, u_1.

(1) Loc. cit.

Sostituendo in (1) e tenendo presente che, sulla linea cercata, v è funzione di u, otterremo due equazioni differenziali ordinarie tra u, v, v', v'', u_1 dove v e u_1 sono le funzioni da determinare. Siccome in questo sistema non figurano le derivate di u_1, l'integrale generale contiene soltanto due costanti arbitrarie e la famiglia ha ∞^2 linee.

c) Se il sistema è barogrammico, la direttrice unica soddisfa evidentemente la questione [1].

È chiaro che l'analisi fatta per i piani normali e per i piani osculatori può generalizzarsi per qualsiasi famiglia di piani, a un parametro, definita per ciascuno dei punti della direttrice cercata.

Matematica. — *Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann.* Nota di PIA NALLI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia L una linea in una varietà metrica V_n, caratterizzata dal tensore fondamentale a_{ij}, e G_{ij} un tensore emisimmetrico definito nei punti di L. Poniamo

$$G_j^i = \sum_1^n{}_\nu \, a^{i\nu} \, G_{\nu j} .$$

Se t è il parametro al quale la L è riferita, il trasporto definito lungo L dal sistema di equazioni differenziali

$$(1) \qquad du^i + \sum_1^n{}_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i & \end{matrix} \right\} u^h \, dx^k + \sum_1^n{}_h \, G_h^i \, u^h \, dt = 0$$

è un trasporto rigido, cioè conserva i prodotti scalari ed è il più generale.

In generale, per un vettore $\boldsymbol{u}$ di componenti controvarianti u^i, le quantità che figurano nei primi membri delle precedenti equazioni divise per dt sono le componenti di un vettore il quale risulta somma di due altri: del vettore $\dot{\boldsymbol{u}}$, le cui componenti controvarianti sono

$$\frac{du^i}{dt} + \sum_1^n{}_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i & \end{matrix} \right\} u^h \frac{dx_k}{dt} ,$$

(1) Almeno in senso locale. VIDE loc. cit.

(2) Nella seduta del 26 aprile 1931.

e che chiameremo derivato ordinario di $\boldsymbol{u}$ lungo L rispetto a t, e del vettore $\boldsymbol{w}$ di componenti

$$w^i = \sum_1^n{}_h \, G_h^i \, u^h .$$

Chiameremo $\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{w}$ *derivato di* $\boldsymbol{u}$ *lungo* L *rispetto a* t *con referenza a* G_{ij}.

Il derivato ordinario corrisponde al tensore G_{ij} nullo.

La nozione di derivazione si estende poi ad un tensore qualunque $A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p}$, chiamando derivato la somma dei due tensori seguenti: il derivato ordinario di $A^{(j)}_{(i)}$ (cioè il tensore le cui componenti sono

$$\dot{A}^{(s)}_{(j)} = \frac{dA^{(j)}_{(i)}}{dt} + \sum_1^q{}_\nu \sum_1^n{}_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ j_\nu & \end{matrix} \right\} A^{j_1 \cdots j_{\nu-1} h j_{\nu+1} \cdots j_q}_{(i)} \frac{dx_k}{dt}$$

$$- \sum_1^p{}_\nu \sum_1^n{}_{hk} \left\{ \begin{matrix} i_\nu & k \\ h & \end{matrix} \right\} A^{(j)}_{i_1 \cdots i_{\nu-1} h i_{\nu+1} \cdots i_p} \Bigg) \frac{dx_k}{dt}$$

e del tensore le cui componenti sono

$$B^{(j)}_{(i)} = \sum_1^q{}_\nu \sum_1^n{}_h \, G_h^{j_\nu} \, A^{j_1 \cdots j_{\nu-1} h j_{\nu+1} \cdots j_q}_{(i)} - \sum_1^p{}_\nu \sum_1^n{}_h \, G^h_{i_\nu} \, A^{(j)}_{i_1 \cdots i_{\nu-1} h i_{\nu+1} \cdots i_p} .$$

La derivazione con referenza a G_{ij} gode delle stesse proprietà della derivazione ordinaria relativamente alla somma, al prodotto, alla composizione ed è invertibile con l'operazione di saturazione degli indici.

Il derivato del tensore fondamentale a_{ij} o a^{ij} è nullo.

Tutto ciò si dimostra nel modo più semplice scegliendo lungo L coordinate geodetiche e supponendo lungo L $a_{ij} = \delta^j_i$.

Se ora lungo L è definito un tensore $\Gamma_{ji,h}$, emisimmetrico rispetto alla coppia (i, j), si può prendere

$$G_{ij} = \sum_1^n{}_k \, \Gamma_{ij,k} \, \frac{dx_k}{dt} ,$$

e si avrà in corrispondenza una derivazione con referenza a $\Gamma_{ij,h}$. Il trasporto (1) diventa allora il seguente:

$$du^i + \sum_1^n{}_{hk} \left[\left\{ \begin{matrix} h & k \\ i & \end{matrix} \right\} + \Gamma^i_{h,k} \right] u^h \, dx_k = 0 \tag{2}$$

dove

$$\Gamma^i_{h,k} = \sum_1^n{}_\nu \, a^{i\nu} \, \Gamma_{\nu h,k} .$$

Se poi $\Gamma_{ij,h}$ è definito in tutti i punti della varietà, le (2) definiscono un trasporto per ogni linea (che per $\Gamma_{ij,h} = 0$ diventa il parallelismo).

In quest'ultima ipotesi, se $A^{(j)}_{(i)}$ è un tensore funzione dei punti della varietà, il suo derivato lungo una linea L con referenza a G_{ij} ha come componenti le seguenti quantità:

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} A'^{(j)}_{(i)|k} \frac{dx_k}{dt}$$

dove, denotando con $A^{(j)}_{(i)|k}$ il derivato covariante di $A^{(j)}_{(i)}$, è

$$(3) \qquad A'^{(j)}_{(i)|k} = A^{(j)}_{(i)|k} + \sum_{1}^{q}{}_{\nu} \sum_{1}^{n}{}_{h} \Gamma^{j_\nu}_{k,h} A^{j_1 \cdots j_{\nu-1} h j_{\nu+1} \cdots j_q}_{(i)} -$$

$$- \sum_{1}^{p}{}_{\nu} \sum_{1}^{n}{}_{h} \Gamma^{h}_{i_\nu,k} A^{(j)}_{i_1 \cdots i_{\nu-1} h i_{\nu+1} \cdots i_p} .$$

Noi chiameremo $A'^{(j)}_{(i)|k}$ *derivato covariante di* $A^{(j)}_{(i)}$ *con referenza a* $\Gamma_{ij,h}$.

La derivazione covariante così generalizzata gode delle stesse proprietà dell'ordinaria relativamente alla somma, al prodotto, alla composizione, alla saturazione degli indici.

Il tensore fondamentale a_{ij}, o a^{ij}, ha derivato covariante nullo.

Tutto ciò si dimostra facilmente in un punto della varietà prendendo nel punto coordinate geodetiche e supponendo in esso $a_{ij} = \delta^j_i$.

Per un invariante, la derivazione covariante generalizzata dà sempre le derivate parziali dell'invariante rispetto alle coordinate.

Consideriamo ora le (2) come un sistema di equazioni ai differenziali totali.

Quando esso risulta illimitatamente integrabile, fissata in un punto della varietà la stella dei vettori aventi l'origine nel punto, si viene a fissare un trasporto rigido ben determinato della medesima in ogni punto della varietà, ed inversamente, come faremo vedere in seguito, ogni trasporto rigido della stella di vettori dà luogo ad un tensore $\Gamma_{ij,h}$, per il quale il sistema (2) è illimitatamente integrabile [1].

Ciò mostra come per una V_n sia conveniente di prendere in considerazione i tensori $\Gamma_{ij,h}$ che corrispondono ai trasporti rigidi illimitatamente

(1) É evidente che un trasporto rigido a risultato unico si può caratterizzare per mezzo di un reticolo di congruenze. Cosicchè la teoria dei trasporti rigidi non è che un capitolo della fondamentale teoria delle congruenze, ed alcuni dei risultati da me ottenuti rientrano immediatamente in cose note. Cfr. in particolare: E. Bortolotti, *Parallelismo assoluto nelle varietà e connessione affine, ecc.*, « Mem. Acc. Scienze Bologna », t. VI, 1929-1930; Id., *Stelle di congruenze a parallelismo assoluto, ecc.*, « Rend. Acc. Lincei », vol. IX, 1929, pp. 530-538; E. Cartan, *Notice historique sur la notion de parallélisme absolu*, « Math. Ann. », B. 102, 1930, pp. 698-706.

integrabili od a risultato unico. In seguito mostreremo come si costruiscono tutti conoscendo solo il tensore fondamentale a_{ij}, quindi essi dipendono esclusivamente dal tensore fondamentale, come accade per (ij, hk) e per altri a quattro indici di cui diremo appresso. Ed è probabile che uno studio approfondito su tali tensori ed invarianti ad essi legati possa gettare molta luce sulla metrica di una varietà e che la curvatura di Riemann non sia che uno solo tra infiniti elementi, tutti egualmente degni di essere presi in considerazione.

Per l'illimitata integrabilità del sistema (2) si hanno le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} p\ h \\ i \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\begin{matrix} p\ k \\ i \end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{p,h} - \frac{\partial}{\partial x_h}\Gamma^i_{p,k} -$$

$$-\sum_q^n \left\{ \left[\left\{\begin{matrix} p\ k \\ q \end{matrix}\right\} + \Gamma^q_{p,k}\right]\left[\left\{\begin{matrix} q\ h \\ i \end{matrix}\right\} + \Gamma^i_{q,h}\right] - \left[\left\{\begin{matrix} p\ h \\ q \end{matrix}\right\} + \Gamma^q_{p,h}\right]\left[\left\{\begin{matrix} q\ k \\ i \end{matrix}\right\} + \Gamma^i_{q,k}\right]\right\} = 0\,.$$

Ora il primo membro non è altro che

$$\{pi, hk\} + \Gamma^i_{p,h|k} - \Gamma^i_{p,k|h} - \sum_q^n \left[\Gamma^q_{p,k}\Gamma^i_{q,h} - \Gamma^q_{p,h}\Gamma^i_{b,k}\right].$$

come si vede subito scegliendo in un punto della varietà coordinate geodetiche.

L'annullarsi delle soprascritte quantità, che sono le componenti di un tensore, caratterizza i tensori $\Gamma_{ji,h}$ corrispondenti a trasporti (2) illimitatamente integrabili. Diremo in seguito come si ottengono tutti.

La condizione (4), portando l'indice i di controvarianza a indice di covarianza, si scrive

$$(pi, hk) = R_{pi,hk}$$

dove

$$(5)\qquad R_{pi,hk} = \Gamma_{pi,h|k} - \Gamma_{pi,k|h} - \sum_q^n \left[\Gamma_{qi,k}\Gamma^q_{p,h} - \Gamma_{qi,h}\Gamma^q_{p,k}\right].$$

Si presenta così nel modo più naturale il tensore $R_{pi,hk}$ per ogni trasporto rigido caratterizzato da un tensore $\Gamma_{ij,h}$ e che coincide con (ij, hk) quando il trasporto è a risultato unico.

Per $n = 2$ manca la somma e si ha

$$R_{pi,hk} = \Gamma_{pi,h|k} - \Gamma_{pi,k|h}\,.$$

Lo stesso accade qualunque sia n se $\Gamma_{ij,h}$ ha la forma $A_{ij}R_h$, essendo A_{ij} emisimmetrico. Ora notiamo che ad $R_{pi,hk}$ si possono dare infinite forme

di cui la (4) è un caso particolare. Precisamente si ha una forma per $R_{pi,hk}$ associando al trasporto caratterizzato da $\Gamma_{ij,h}$ un altro trasporto caratterizzato da un tensore $C_{ij,h}$. La forma (4) è in particolare quella che si ha quando il secondo trasporto è il parallelismo: $C_{ij,h} = 0$. Un'altra forma particolare da prendere in considerazione si ha quando il secondo trasporto coincide col primo: $C_{ij,h} = \Gamma_{ij,h}$.

Infatti, denotando con $\Gamma'_{pi,h|k}$ il derivato covariante di $\Gamma_{pi,h}$ con referenza a $C_{ij,h}$, risulta dalla (3)

$$\Gamma'_{pi,h|k} = \Gamma_{pi,h|k} - \sum_1^n{}_q C^q_{p,k}\,\Gamma_{qi,h} - \sum_1^n{}_q C^q_{i,k}\,\Gamma_{pq,h} - \sum_1^n{}_q C^q_{h,k}\,\Gamma_{pi,q},$$

e per conseguenza

$$R_{pi,hk} = \Gamma'_{pi,h|k} - \Gamma'_{pi,k|h} - (T_{pi,hk} - T_{pi,kh}), \tag{5}$$

dove l'espressione di $T_{pi,hk}$ si forma facilmente.

Oltre i tensori $\Gamma_{ij,h}$, $R_{pi,hk}$ si presentano a prima vista degni di essere presi in considerazione gli invarianti

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{ijh}^n \Gamma_{ij,h}\,u^i v^j w^h, \\ \sum_{pihk}^n R_{pi,hk}\,u^p v^i w^h z^k, \\ \sum_{pihk}^n T_{pi,hk}\,u^p v^i w^h z^k. \end{array}\right. \tag{6}$$

Quest'ultimo è relativo ad una coppia di trasporti rigidi caratterizzati da due tensori $\Gamma_{ij,h}$ e $C_{ij,h}$.

Ma anche gli altri due si possono mettere in relazione con due trasporti rigidi, il secondo dei quali sia a risultato unico.

Infatti, i detti invarianti, invece di considerarli come relativi ad un punto di una varietà e ad una terna o quaterna di vettori per esso, si potranno considerare come relativi ad un punto della varietà e ad una terna o quaterna di vettori che si trasportano su se stesse nel trasporto a risultato unico caratterizzato da un tensore $C_{ij,h}$. Il vantaggio che se ne può trarre deriva dal fatto che essendo nulli i derivati covarianti di $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ con referenze a $C_{ij,h}$ quando la terna si trasporta su se stessa nel trasporto a risultato unico caratterizzato da $C_{ij,h}$, è

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{ijh}^n \Gamma_{ij,h}\,u^i v^j w^h = \sum_{ijh}^n \Gamma'_{ij,h|k}\,u^i v^j w^h,$$

e per conseguenza l'invariante (6) prende l'espressione

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}\left(\frac{\partial G}{\partial x_k}z^k - \frac{\partial F}{\partial x_k}w^k\right) - \sum_{1}^{n}{}_{pihk}\left(T_{pi,hk} - T_{pi,kh}\right)u^p v^i w^h z^k ,$$

dove

$$G = \sum_{1}^{n}{}_{ijh}\,\Gamma_{ij,h}\,u^i v^j w^h$$

ed

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ijh}\,\Gamma_{ij,h}\,u^i v^j z^h .$$

Fissato $\Gamma_{ij,h}$ si hanno così infiniti modi per rappresentare l'invariante (6) in corrispondenza agli infiniti $C_{ij,h}$, ossia agli infiniti trasporti rigidi a risultato unico. Che se poi si fa variare anche $\Gamma_{ij,h}$ fra i tensori che dànno un trasporto a risultato unico, si ha una doppia infinità di modi per rappresentare l'invariante

$$\sum_{1}^{n}{}_{pihk}\,(pi,hk)\,u^p v^i w^h z^k ,$$

(al quale si riduce allora il (6)) e quindi la curvatura riemanniana. In tal modo si verrebbe a mettere la curvatura in relazione ad una giacitura che si trasporta su se stessa in un trasporto rigido a risultato unico, giacitura che per $n > 2$ dipende da funzioni arbitrarie.

Tale modo di considerare la curvatura le darebbe carattere di elemento legato alla continuità della varietà, non soltanto riguardo ai punti, ma anche riguardo alle direzioni. Si passa da un punto ad un altro per mezzo di una linea: si passa da una direzione ad un'altra per mezzo di un trasporto rigido a risultato unico.

Diamo ora il tensore $\Gamma_{ij,h}$ che dà un trasporto rigido a risultato unico per una varietà qualunque.

Bisogna fissare in ogni punto della varietà una $(n-1)$ *pla* di vettori unitarî a due a due ortogonali $\boldsymbol{v}^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots n-1)$: esiste uno ed un solo trasporto rigido che porta la $(n-1)$ *pla* su se stessa (evidentemente a risultato unico). Esiste dunque un tensore $\Gamma_{ij,h}$ che dipende da $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni arbitrarie: esso rappresenta la soluzione generale del sistema (4).

Per ottenere l'espressione di $\Gamma_{ij,h}$, denotiamo con $v_i^{(\alpha)}$ le componenti covarianti di $\boldsymbol{v}^{(\alpha)}$.

Poniamo:

$$\Gamma^{(1)}_{ij,h} = v^{(1)}_i v^{(1)}_{j|h} - v^{(1)}_j v^{(1)}_{i|h}$$

e definito il tensore $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,h}$, si definisca $\Gamma^{(\alpha+1)}_{ij,h}$ ponendo

$$\Gamma^{(\alpha+1)}_{ij,h} = \Gamma^{(\alpha)}_{ij,h} + v^{(\alpha+1)}_i v^{(\alpha+1)(\alpha)}_{j|k} - v^{(\alpha+1)}_j v^{(\alpha+1)(\alpha)}_{i|h},$$

dove $v^{(\alpha+1)(\alpha)}_{i|h}$ denota il derivato covariante del sistema semplice $v^{(\alpha+1)}_i$ con referenza al tensore $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,h}$: l'ultimo tensore $\Gamma^{(n-1)}_{ij,h}$ che così si ottiene è $\Gamma_{ij,h}$.

Per esempio, per $n = 3$, se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono due vettori unitarî ortogonali, si ha

$$\Gamma_{ij,h} = v_i v_{j|h} - v_j v_{i|h} + w_i w_{j|h} - w_j w_{i|h} + (w_i v_j - w_j v_i) \sum_1^n{}_k w_k v_{k|h},$$

dove le derivazioni covarianti sono le ordinarie.

In un'altra Nota applicheremo i risultati generali alle superficie.

Matematica (Geometria). — *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme.* Nota di B. Segre, presentata [1] dal Socio F. Severi.

Se si rappresentano al modo solito due variabili complesse coi punti reali di S_4, ogni trasformazione analitica (invertibile) su quelle, dà in S_4 una trasformazione puntuale (reale), che dicesi una trasformazione pseudoconforme [2]. Le trasformazioni, che così si ottengono in S_4, costituiscono un gruppo, il quale ha importanza fondamentale nella teoria delle funzioni di due variabili complesse.

Lo studio dell'equivalenza delle linee o delle superficie di S_4 di fronte al gruppo suddetto – almeno se ci si limita a linee e superficie analitiche considerate « in piccolo » – non offre difficolta [3]. Ben diversamente si presentano le cose per le varietà a tre dimensioni; a tal proposito, da tempo H. Poincaré ha rilevato che, in generale, due pezzi di V_3 analitiche di S_4 non si equivalgono di fronte al gruppo delle trasformazioni pseudoconformi [4]: si pone quindi la questione di classificare le V_3 di S_4 nei riguardi di questo gruppo, assegnando condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza pseudoconforme di due V_3, in un col modo di determinare le trasformazioni pseudoconformi – supposte esistenti – che mutano l'una nell'altra due date V_3. Una via per affrontare tali difficili problemi, trovasi indicata a larghi tratti nel surricordato lavoro di Poincaré: ma pare ch'essa non possa facilmente venir approfondita, talchè fino ad oggi ben poco si sa di concreto sull'argomento, se si eccettuano alcuni notevoli contributi portati in questi ultimi anni, allo studio di certi casi particolari, da

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) Questa denominazione – addottata da F. Severi e da me in lavori recenti – è preferibile a quelle di trasformazione conforme o di trasformazione analitica usate da altri Autori.

(3) Ved. B. Segre, *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse*, « Rendic. del Seminario Mat. della R. Università di Roma », 1931, n. 24; in questa Memoria, oltre a numerose proprietà relative alle trasformazioni pseudoconformi ed alle superficie caratteristiche, dò una suggestiva ricostruzione geometrica della teoria delle singolarità delle funzioni analitiche di due variabili complesse.

(4) H. Poincaré, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. 23, 1927, § 1.

Almer, Reinhardt, Behnke, Carathéodory, Kritikos, Bergmann, H. Cartan, ecc. (1).

Un nuovo modo di impostare la ricerca trovasi in una mia recente Memoria. Quivi ho introdotto in S_4 certe linee di lunghezza nulla - che denomino linee bicaratteristiche - dimostrando che su ogni V_3 analitica di S_4 vi son due sistemi di tali linee, delle quali ne passa una di ciascun sistema per ogni punto della V_3, e che *affinchè due* V_3 *analitiche si equivalgano di fronte al gruppo delle trasformazioni pseudoconformi, è necessario e sufficiente che fra esse possa stabilirsi una corrispondenza puntuale (analitica), che muti le bicaratteristiche dell'una nelle bicaratteristiche dell'altra* (2). La questione resta così ricondotta allo studio della equivalenza rispetto alle trasformazioni puntuali fra due V_3, di due coppie di congruenze di linee tracciate su di esse; studio che qui effettuo in modo completo, nell'ipotesi che tali linee sieno *reali*, mentre i due sistemi di bicaratteristiche di una V_3 reale son costituiti da linee imaginarie coniugate. È presumibile, però, che i risultati che ottengo sussistano a prescindere pure dalla realtà degli elementi, e che quindi - anche astraendo dall'interesse intrinseco che essi offrono – se ne possa agevolmente trarre una risoluzione soddisfacente del problema di Poincaré (3).

1. Avendo su d'una qualsiasi V_3 analitica due diverse congruenze di linee, possiamo rappresentare la V_3 su di un S_3, e quindi ricondurci allo *studio delle coppie di congruenze di linee* (*reali ed analitiche*) *di* S_3, *di fronte al gruppo delle trasformazioni puntuali* (*reali ed analitiche*) *di* S_3. Data una coppia siffatta, per un punto A generico di S_3 esce una linea della prima congruenza ed una linea della seconda; le tangenti alle due linee in A risultano distinte, e quindi determinano un piano α passante per A: si hanno così in S_3 ∞^3 « elementi » (A, α), ed è chiaro che l'insieme delle infinite curve di S_3 che contengono una semplice infinità di tali elementi, è invariantivamente legato alla data coppia di congruenze (4).

Si hanno due alternative da distinguere, secondochè quegli ∞^3 elementi possono o non possono venir distribuiti negli elementi di ∞^1 molteplicità. Nel primo caso esistono ∞^1 superficie ciascuna delle quali contiene ∞^1 linee dell'una ed ∞^1 linee dell'altra congruenza, e le due congruenze si diranno fra loro associate; è geometricamente evidente che *due qualunque coppie di congruenze associate si equivalgono di fronte alle trasformazioni puntuali.*

(1) Una completa bibliografia in proposito, trovasi nella Memoria di F. Severi, *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, che verrà prossimamente pubblicata nei « Rendic. del Seminario della R. Università di Roma ».

(2) Cfr. la mia Mem. dianzi cit., n. 26.

(3) Tale presunzione è rafforzata da ciò che diciamo più sotto, in alcune note a piè di pagina.

(4) In relazione alle bicaratteristiche di una V_3 reale di S_4, posson similmente introdursi ∞^3 elementi, che risultano ancora reali.

Nel secondo caso è sempre possibile di effettuare in S_3 una trasformazione puntuale, in guisa che i suddetti elementi diventino le ∞^3 coppie costituite da un punto e da un piano omologhi nella polarità determinata da un complesso lineare di rette di S_3; la questione resta così ricondotta allo studio di due congruenze di linee appartenenti ad un dato complesso lineare [1], rispetto al gruppo delle trasformazioni puntuali di S_3 che mutano curve del complesso in curve del complesso. Ora è noto che gli « elementi » di un piano π si posson rappresentare coi punti di S_3, in guisa che alle curve di π [2] rispondano in S_3 le linee appartenenti ad un dato complesso lineare (non speciale). Profittando di una siffatta rappresentazione, otteniamo nel piano π – in corrispondenza alle date congruenze – due sistemi ∞^2 di linee, ognuno dei quali è rappresentabile con un'equazione differenziale della forma

$$y'' = \omega(x, y, y'), \tag{1}$$

dovendo per ogni elemento di π passare una curva di ciascuno dei due sistemi; e si tratta di effettuare lo studio di tali sistemi – ossia delle relative equazioni differenziali – di fronte al gruppo delle trasformazioni di contatto di π.

Possiamo fare un passo ulteriore, col ridurre a punti le curve di uno dei due sistemi, operando su π mediante un'opportuna trasformazione di contatto [3]; con ciò la ricerca propostaci si identifica con quella degli invarianti puntuali di un sistema ∞^2 di curve piane, integrali di un'equazione differenziale del tipo (1). La soluzione di questo problema – da tempo nota [4] – ci permette di rispondere in modo esauriente alle questioni posteci.

2. Principiamo col tradurre analiticamente – con qualche lieve modificazione – il processo indicato al numero precedente. Introdotte in S_3 coordinate cartesiane (x, y, z), le curve della prima congruenza assegnata abbiano le equazioni:

$$\varphi(x, y, z) = \text{cost.} \quad , \quad \psi(x, y, z) = \text{cost.}; \tag{2}$$

quelle della seconda avranno equazioni analoghe, che – mediante una trasformazione puntuale di S_3 – posson sempre ridursi alle:

$$x = \text{cost.} \quad , \quad y = \text{cost.} \tag{3}$$

(1) Secondo l'uso, si indicano con tale locuzione le linee le cui tangenti sono rette del complesso.

(2) Curve pensate come semplici infinità di elementi, e che pertanto – come luogo – posson anche ridursi ad un sol punto.

(3) È qui soltanto che vien sfruttata la realtà delle curve delle date congruenze.

(4) Cfr. A. Tresse, *Détermination des Invariants ponctuels de l'équation differentielle ordinaire du second ordre* $y'' = w(x, y, y')$, « Preisschriften v. d. Fürstlich Jablon. Ges. », Leipzig, Hirzel, 1896.

Se vogliamo che queste ultime equazioni non si alterino di forma, converrà limitarci ad operare in S_3 trasformazioni puntuali del tipo:

$$X = X(x, y) \quad , \quad Y = Y(x, y) \quad , \quad Z = Z(x, y, z).$$

Affinchè le (2) rappresentino effettivamente curve distinte dalle (3), non deve annullarsi la matrice funzionale delle φ, ψ, nè risultare contemporaneamente $\varphi_z = 0$, $\psi_z = 0$ [1]; ciò implica che una almeno delle quantità

$$(4) \quad \sigma(x, y, z) = \varphi_x \psi_z - \psi_x \varphi_z \quad , \quad \tau(x, y, z) = \varphi_y \psi_z - \psi_y \varphi_z$$

non si annulli identicamente. L'equazione di Pfaff

$$(5) \quad \sigma(x, y, z)\, dx + \tau(x, y, z)\, dy = 0,$$

ammette come curve integrali le (2), le (3) ed inoltre le infinite curve a queste invariantivamente legate, di cui si è detto al n. 1; secondochè essa è o non è completamente integrabile, le due congruenze assegnate sono o non sono fra loro associate.

3. La prima alternativa si presenta se vale la

$$(6) \quad \sigma \tau_z - \tau \sigma_z = 0,$$

nel qual caso esistono due funzioni non identicamente nulle $\rho(x, y, z)$ ed $f(x, y)$, tali che risulti

$$f_x(x, y) = \rho(x, y, z) \cdot \sigma(x, y, z) \quad , \quad f_y(x, y) = \rho(x, y, z) \cdot \tau(x, y, z).$$

In tale ipotesi si annulla la matrice funzionale delle f, φ, ψ, ossia f dipende funzionalmente dalle φ, ψ; supposto - com'è lecito - che non sia $\varphi_z \cdot \sigma = 0$, si può effettuare in S_3 la trasformazione puntuale (invertibile)

$$X = f(x, y) \quad , \quad Y = y \quad , \quad Z = \varphi(x, y, z),$$

con che le equazioni delle due date congruenze si riducono alla forma canonica

$$X = \text{cost.} \ , \ Y = \text{cost.} \quad \text{ed} \quad X = \text{cost.} \ , \ Z = \text{cost.},$$

che non si altera ove si effettui in S_3 una trasformazione puntuale del tipo

$$X^* = X^*(X) \quad , \quad Y^* = Y^*(X, Y) \quad , \quad Z^* = Z^*(X, Z).$$

(1) Poniamo: $\varphi_z = \dfrac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}$, ecc.

Ciò mostra di nuovo l'equivalenza di tutte le coppie di congruenze associate, ed inoltre che *ognuna di esse ammette un gruppo di trasformazioni puntuali in sè, dipendenti da due funzioni arbitrarie di due argomenti e da una funzione arbitraria d'un sol argomento* (1).

4. Supponiamo ora che non valga la (6), talchè nè σ nè τ potranno annullarsi identicamente. Posto:

$$\zeta(x, y, z) = -\frac{\sigma(x, y, z)}{\tau(x, y, z)},$$

in virtù della fatta ipotesi risulta $\zeta_z \neq 0$, onde si potrà effettuare in S_3 la trasformazione puntuale (invertibile)

$$X = x \quad , \quad Y = y \quad , \quad Z = \zeta(x, y, z),$$

che riduce l'equazione pfaffiana (5) alla forma canonica:

$$dY - Z\,dX = 0.$$

Possiamo addirittura supporre che le coordinate (x, y, z) considerate inizialmente coincidano con quelle testè definite, il che – com'è subito visto – equivale ad ammettere che valga l'identità:

$$z = -\frac{\sigma(x, y, z)}{\tau(x, y, z)}. \tag{7}$$

Le singole curve (2) – essendo $\tau \neq 0$ – posson anche venir rappresentate con equazioni del tipo

$$y = y(x) \quad , \quad z = z(x); \tag{8}$$

e – in forza delle (2) – esse risultano le curve integrali del seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0 \quad , \quad \psi_x + \psi_y y' + \psi_z z' = 0.$$

Avuto riguardo alle (4), la seconda di queste due equazioni può venir sostituita dalla

$$y' = -\frac{\sigma(x, y, z)}{\tau(x, y, z)}, \tag{9}$$

ottenuta eliminando la z' fra di esse; mentre la prima può scriversi

$$z' = -\frac{1}{\varphi_z}(\varphi_x + \varphi_y y'). \tag{10}$$

(1) Questa proposizione concorda con quella relativa agli «iperplanoidi», data al n. 28 della mia Memoria citata.

La (9), in virtù della (7), diventa semplicemente

$$y' = z, \tag{11}$$

onde la (10) si riduce alla forma

$$z' = \omega(x, y, z). \tag{12}$$

Le curve (8) della prima congruenza considerata, soddisfanno adunque al sistema (11), (12), la cui integrazione equivale manifestamente a quella dell'unica equazione (1) del 2° ordine.

Data su d'una V_3 una coppia di congruenze di linee non associate [1], il processo dianzi indicato le fa corrispondere un'equazione differenziale (1) – determinata solo a meno di trasformazioni del tipo

$$X = X(x, y) \quad , \quad Y = Y(x, y) \text{ -} \tag{13}$$

il cui secondo membro, ω, si esprime mediante le derivate prime e seconde delle funzioni che compaiono nelle equazioni in termini finiti delle due congruenze. Reciprocamente, da una qualunque equazione differenziale (1) si può risalire – integrandola – ad una coppia di congruenze non associate, appartenenti p. es. ad S_3; e l'equivalenza fra due siffatte coppie di congruenze nei riguardi delle trasformazioni puntuali di S_3, implica l'equivalenza delle corrispondenti equazioni differenziali di fronte alle trasformazioni (13), e viceversa.

5. Poggiandoci sui risultati contenuti nel citato lavoro di Tresse, possiamo dedurre da quanto precede la completa risoluzione della questione propostaci. Una coppia di congruenze non associate, non ammette generalmente alcuna trasformazione puntuale che la muti in sè [2]; ma può anche ammettere un gruppo continuo di siffatte trasformazioni, il quale può solo dipendere da 1, da 2, da 3 oppure da 8 parametri.

Quest'ultimo caso può venir caratterizzato analiticamente mediante due equazioni

$$\omega^{(4)} = 0 \quad , \quad H = 0, \tag{14}$$

i cui primi membri son due invarianti differenziali del 4° ordine della (1) – ossia due invarianti differenziali del 6° ordine della data coppia di con-

(1) L'ordine con cui due siffatte congruenze si considerano, non è indifferente nei riguardi del nostro problema.

(2) Ossia che muti ogni curva della 1ª o della 2ª congruenza, rispettivamente in una curva della 1ª o della 2ª congruenza. Per le deduzioni del testo, basta valersi dei risultati enunciati nella *Conclusione* posta alla fine della summentovata Memoria di Tresse.

gruenze – la cui espressione non è semplice, ma si ottiene senza difficoltà dagli sviluppi della Memoria dianzi ricordata. Le (14) esprimono altresì le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la (1) possa con una trasformazione (13) ridursi alla forma

$$y'' = 0\,^{(1)};$$

con ciò la congruenza (2) diventa una congruenza parabolica di rette:

$$(15) \qquad y = ax + b \quad , \quad z = a \qquad (a\,, b\,, \text{cost.}^{i}).$$

Dunque *se una coppia di congruenze non associate di* S_3 *ammette più di* ∞^3 *trasformazioni puntuali in sè, essa ne ammette di conseguenza* ∞^8*; le coppie di congruenze che godono di tale proprietà son caratterizzate dalle due condizioni differenziali del 6° ordine* (14)*, e risultano fra loro equivalenti, potendosi tutte ricondurre alla forma canonica rappresentata dalle* (3) *e dalle* (15)[2].

Assegnata una coppia di congruenze non associate per cui non sussistano le (14), posson introdursi 16 suoi invarianti relativi, di cui 2 del 6° ordine, 3 del 7° ordine ed 11 dell'8° ordine[3], coi quali si posson facilmente formare 14 invarianti assoluti (funzioni del punto $x\,, y\,, z$). Ebbene, a seconda che fra questi se ne trovano 3, 2 od 1 di funzionalmente indipendenti, oppure se essi si riducono tutti a costanti, la data coppia di congruenze non ammette alcuna trasformazione puntuale infinitesima in sè, o rispettivamente ne ammette 1, 2 o 3. Le ultime tre classi di coppie di congruenze, dipendono ordinatamente da una funzione arbitraria di due argomenti, o da una funzione arbitraria di un solo argomento od infine da costanti arbitrarie; ciascuna di esse si divide in sottoclassi – distinguibili in base alla forma delle relazioni che intercedono fra gli invarianti – che differiscono per la struttura del gruppo relativo. Di tali sottoclassi si può facilmente assegnare una forma canonica, riferendosi alla forma canonica a cui può ridursi la rispettiva equazione (1)[4].

(1) Cfr. la suddetta Mem., p. 84.

(2) Questo teorema è da raffrontarsi colla proposizione data da H. Cartan, secondo cui *un campo limitato di* S_4 *avente* ∞^4 *trasformazioni pseudoconformi in sè lascianti fisso un punto interno, può con una trasformazione pseudoconforme venir ridotto al campo interno ad un'ipersfera, e quindi ammette* ∞^8 *trasformazioni pseudoconformi in sè.*

(3) Ved. Tresse, Mem. cit., p. 38; i primi due di quei 16 invarianti, non son altro che i suddetti invarianti $\omega(4)$ ed H.

(4) Ved. la *Conclusione* ricordata; relativamente alle equazioni (1) che posseggono delle trasformazioni infinitesime in sè, cfr. anche S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, Leipzig, Teubner, 1891, cap. 16, 17, 19 e 24.

Per l'equivalenza fra due coppie di congruenze non associate e non soddisfacenti alle (14), *è necessario e sufficiente che fra invarianti omonimi - calcolati per l'una e per l'altra coppia di congruenze – intercedano le stesse relazioni funzionali*[1]*: in tal caso la o (se ve n'è più d'una) le trasformazioni puntuali che le mutano l'una nell'altra, si ottengon tutte scrivendo che ciascuno dei suddetti 14 invarianti assoluti assume valori uguali in punti omologhi.*

Matematica. — *Estensione delle equazioni integrali lineari singolari dei teoremi di Hilbert–Schmidt e di Picard.* Nota di C. Miranda, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur une équation aux dérivées partielles caracterisant les moyennes de M. Picone.* Nota di M. Nicolesco, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Considerazioni geometriche per l'analisi periodale.* Nota di M. Lombardini, presentata dal Socio F. Enriques.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Nel caso generale, basta anzi limitarsi a considerare 10 di quegli invarianti assoluti, e le relazioni funzionali che legano 7 di essi agli altri 3: cfr. Tresse, Mem. cit., p. 60.

Meccanica. — *Sulla teoria degli archi ad una o due cerniere.* Nota di G. Colonnetti, presentata [1] dal Corrisp. C. Guidi.

È noto che, in virtù del secondo principio di reciprocità [2], la ricerca delle caratteristiche della sollecitazione relativa ad una data sezione di un qualunque sistema elastico (ovvero della reazione di un dato suo vincolo) prodotta da una qualsiasi condizione di carico, si può sempre ridurre alla ricerca, generalmente assai semplice, delle variazioni di configurazione che si produrrebbero nel sistema qualora, praticando idealmente un taglio in corrispondenza di quella sezione (od in adiacenza di quel vincolo) si potesse provocare un conveniente spostamento relativo dell'una faccia del taglio rispetto all'altra, mediante l'applicazione sulle facce stesse di due sistemi di forze uguali e contrarî.

In una brevissima Nota pubblicata or son molti anni negli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » [3], io ho anzi dimostrato come tali sollecitazioni fittizie potessero venire, nei singoli casi speciali, facilmente determinate grazie ad una caratteristica proprietà dell'ellisse di elasticità.

Ma quella dimostrazione, che mi parve allora opportuno riferire al classico problema dell'arco elastico piano rigidamente incastrato ad entrambi gli estremi, poteva lasciare il dubbio che a questo problema soltanto fossero le mie considerazioni applicabili.

Ora, avendo avuto incidentalmente occasione di constatare come quelle considerazioni fossero invece utilmente applicabili anche ad altri casi svariatissimi - ed in particolare al problema, assai interessante per la pratica tecnica, dell'arco elastico ad una o due cerniere - penso non privo di interesse il ritornar brevemente, pur a tanta distanza di tempo, sull'argomento.

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Questo teorema venne da me enunciato per la prima volta nel 1912, e completato, dal punto di vista del rigore della dimostrazione, un paio d'anni più tardi. Cfr.: *Sul principio di reciprocità*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Serie 5ª, vol. XXI (1° sem. 1912); *Sul secondo principio di reciprocità*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. L (1915); *Su di una reciprocità fra deformazioni e distorsioni*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Serie 5ª, vol. XXIV (1° sem. 1915).

(3) *Sulla teoria degli archi*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVIII (1913).

Per una trattazione completa dell'argomento si veda la mia *Statica delle costruzioni*, vol. I, Torino, UTET, 1928.

Ciò varrà, se non altro, a dimostrare una volta di più la grande generalità del principio da me dimostrato e la varietà veramente notevole delle sue applicazioni.

* * *

Incominciamo col considerare il caso dell'arco dotato di una sola cerniera, ed accingiamoci ad applicare ad esso i procedimenti classici della teoria dell'ellisse di elasticità.

Nell'atto di suddividere idealmente il nostro arco in tronchi di dimensioni tali che, per ciascuno di essi, si possa con facilità tracciar la relativa ellisse, converrà intanto che noi abbiamo l'avvertenza di non includer la cerniera in alcuno dei detti tronchi: faremo pertanto terminare uno dei tronchi alla sezione AA immediatamente precedente la cerniera, ed inizieremo il tronco successivo con la sezione BB che immediatamente la segue (figura 1). Vuol dire che nella serie dei tronchi così ottenuta bisognerà poi

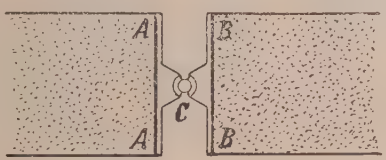


Fig. 1.

immaginar intercalato il particolare tronco AABB nel quale non possono verificarsi deformazioni elastiche, bensì soltanto moti rigidi: più precisamente rotazioni relative con centro nel perno C della cerniera.

Nulla ci vieta in queste condizioni di continuare ad impiegare il linguaggio in uso nella teoria dell'elasticità, introducendo anche per questo tipo di arco la considerazione dell'ellisse degli spostamenti elastici relativi.

Bisogna soltanto tener presente che a definire quest'ellisse concorrono non soltanto i pesi elastici dei varî tronchi di arco (pesi elastici da considerarsi ripartiti sul piano del disegno nei modi definiti dalle rispettive ellissi parziali) ma anche il peso elastico del tronco AABB, peso elastico infinitamente grande e concentrato nel punto C. Si ottiene così un'ellisse degli spostamenti elastici relativi evidentemente degenere; ma nei confronti della quale la teoria continua ad essere integralmente applicabile [1].

Convien peraltro avvertire che, se si ha soltanto di mira lo studio dell'arco ad una cerniera, non v'è nessuna necessità di combinare quel peso

(1) Sulla possibilità d'impiego dell'ellisse degenere, e sui vantaggi che, in certi casi se ne possono trarre, si veda la Nota dell'ing. G. Pugno: *Contributo alla trattazione dei sistemi elastici doppiamente iperstatici*, presentata in questa medesima seduta del 12 aprile 1931.

elastico concentrato ed infinitamente grande con tutti gli altri ripartiti e di grandezza finita. Ai fini pratici giova anzi tenerlo da essi ben distinto e limitarsi a costruire la solita ellisse degli spostamenti elastici relativi come se la cerniera non esistesse – e le due sezioni AA BB fossero tra loro rigidamente connesse – salvo a considerare poi il sistema elastico effettivo come caratterizzato dall'insieme dei pesi elastici di grandezza finita, la cui ripartizione resta ora definita dalla predetta ellisse, e dal peso elastico infinitamente grande concentrato in C.

A definire lo spostamento relativo che le due facce di un taglio praticato nell'arco in corrispondenza di una sua sezione generica subirebbero sotto l'azione di due forze F , — F eguali e contrarie, continueranno in ogni caso a servire le regole note.

La rotazione di una delle due facce del taglio per rapporto all'altra dovrà cioè risultar misurata dal prodotto dell'intensità della forza F per il momento statico dell'intiero sistema dei pesi elastici per rapporto alla linea d'azione x di detta forza.

Quanto allo spostamento, valutato secondo una direzione qualunque, di un qualsiasi punto rigidamente connesso ad una delle due facce del taglio per rapporto allo stesso punto considerato come rigidamente connesso coll'altra faccia, è noto che esso dovrà risultar misurato dal prodotto dell'intensità della forza F per il momento di second'ordine dell'intiero sistema dei pesi elastici per rapporto alla linea d'azione della forza ed alla linea secondo cui si intende misurato lo spostamento.

Ne segue una limitazione nella possibilità di scelta della linea di azione della forza.

È infatti evidente che, per la presenza del peso elastico infinitamente grande concentrato in C, il momento statico dell'intiero sistema dei pesi elastici per rapporto alla linea d'azione della forza riuscirà esso pure infinitamente grande tutte le volte che quella linea d'azione non passa per C.

Per ottenere degli spostamenti finiti di una delle facce del taglio rispetto all'altra bisogna dunque limitarsi ad immaginar ad esse applicate delle forze F , — F la cui linea d'azione x passi per il perno della cerniera (figura 2).

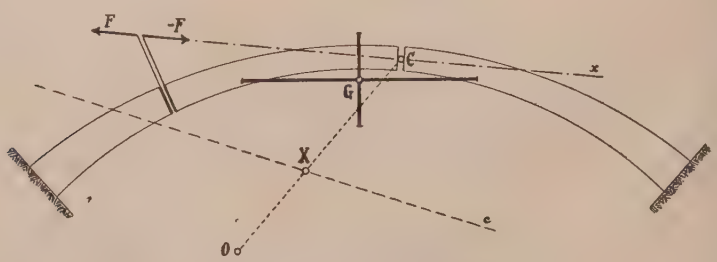


Fig. 2.

Tali spostamenti si potranno allora considerare come risultanti dalla sovrapposizione di due ben distinti fenomeni: l'uno consistente nella deformazione elastica dei varî tronchi di cui l'arco si compone, l'altro consistente in una semplice rotazione rigida della porzione di arco compresa tra il taglio e la cerniera attorno al perno di questa. È noto che lo spostamento dovuto al primo fenomeno si può sempre interpretare come una rotazione attorno all'antipolo X della retta x per rapporto all'ellisse di elasticità. Combinando questa rotazione con l'altra che ha il suo centro in C si otterrà una rotazione risultante attorno ad un punto O della retta CX, la cui posizione su questa retta dipende esclusivamente dal rapposto delle ampiezze delle rotazioni componenti, e può quindi farsi variare a volontà dato che alla rotazione rigida attorno a C (che è indipendente da F) noi possiamo evidentemente attribuire a piacer nostro un'ampiezza qualunque.

Reciprocamente se – nell'intento di ottenere una determinata caratteristica della sollecitazione relativa alla sezione secondo cui si è supposto praticato il taglio – si vuole che una delle facce di esso subisca per rapporto all'altra una rotazione attorno ad un ben determinato punto O del piano, basterà proiettare tale punto da C sopra la retta c antipolare di C per rapporto all'ellisse, per ottenere il punto X la cui antipolare x, certamente passante per C, si assumerà come linea d'azione della sollecitazione da adottarsi.

* * *

Se l'arco possiede non una ma due cerniere C e D (fig. 3), sono due i pesi elastici infinitamente grandi che occorre immaginar aggiunti alla solita

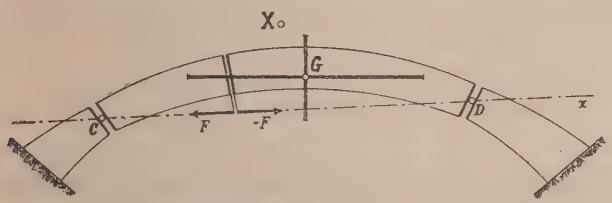


Fig. 3.

ellisse di elasticità. La linea d'azione della sollecitazione F, — F deve allora coincidere colla congiungente CD qualunque sia la sezione che si considera e qualunque sia lo spostamento relativo che si vuol imprimere alle due facce del taglio idealmente praticato lungo di essa. S'intende che allo spostamento relativo voluto si giungerà combinando la rotazione dovuta alle deformazioni elastiche – la quale avrà in ogni caso per centro un punto X ben determinato: l'antipolo della congiungente CD rispetto all'ellisse – con due altre rotazioni derivanti da semplici moti rigidi di determinate porzioni dell'arco attorno a C ed a D. Scegliendo infatti opportunamente le ampiezze di queste due ultime rotazioni si potrà sempre far in modo che il centro della rotazione risultante venga a coincidere con un punto qualunque del piano.

Meccanica. — *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi.* Nota di G. Lampariello, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. In questa Nota mi propongo di dimostrare che, a differenza di quanto accade per i fluidi perfetti e per altri sistemi anche dissipativi (cfr. in proposito l'osservazione alla fine della presente Nota), non è possibile alcuna propagazione ondosa in seno ai fluidi, se si ammette la viscosità. Il risultato non è nuovo, poichè esso è già stato conseguito da P. Duhem nel 1906 [2], ma può forse meritare l'attenzione degli studiosi la semplicissima dimostrazione che qui presento. Questa è basata sui concetti, oramai classici, riguardanti la teoria generale delle varietà caratteristiche dei sistemi di equazioni alle derivate parziali, introdotti nella scienza da J. Hadamard [3] e recentemente ripresi da T. Levi-Civita [4].

2. Ricordo che un sistema di m equazioni alle derivate parziali nelle funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ delle $n+1$ variabili indipendenti $x_0, x_1, \cdots, x_n$

$$E_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

dicesi *normale* rispetto alla variabile x_0 se si può ridurre alla forma

$$(1) \qquad \frac{\partial^{r_\nu} \varphi_\nu}{\partial x_0^{r_\nu}} = \Phi_\nu(x \mid \varphi \mid \psi \mid \chi) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m),$$

dove le ψ che compaiono nei secondi membri sono derivate parziali di ciascuna φ_ν rispetto alla sola x_0 di ordine minore di r_ν e le χ sono derivate parziali delle φ rispetto alle x d'ordine (finito) qualsiasi, purchè rispetto alle x_0 di ordine minore di r_ν per la corrispondente φ_ν [5].

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) Cfr. P. Duhem, *Recherches sur l'élasticité*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.

(3) Cfr. J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes, etc.*, Paris, Hermann, 1903; *Lectures on Cauchy's Problem in linear partial differential equations*, New-Haven, 1923.

(4) Cfr. T. Levi-Civita, *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein*, «Rend. Lincei», 1930; nonchè *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Lezioni raccolte dal dr. G. Lampariello, Bologna, Zanichelli (in corso di stampa).

(5) Questo concetto di sistema normale è alquanto più generale di quello ben noto. Cfr. ad es. E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, 2me éd., p. 19, Paris, Hermann, 1921.

Se allora si ammette l'analiticità delle Φ_ν e dei dati, è ben noto (Cauchy-Kowalewsky) che, assegnando ad arbitrio in ogni punto di un iperpiano portante $\tilde{\omega}$ dello spazio S_{n+1} delle variabili $x_0, x_1, \cdots, x_n$

$$x_0 = \text{cost}$$

i valori delle φ e delle ψ, restano univocamente determinate le funzioni incognite φ in un intorno di $\tilde{\omega}$.

Se si applica alle variabili x una generica trasformazione puntuale che faccia passare alle variabili $\zeta, \zeta_1, \cdots, \zeta_n$, la stessa determinazione delle φ è possibile in un intorno dell'ipersuperficie σ

$$\zeta(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \text{cost}, \tag{2'}$$

trasformata di $\tilde{\omega}$, a condizione che il sistema trasformato di (1) risulti normale rispetto alla variabile ζ.

Se vien meno la normalità, nel qual caso non si può affermare l'univoca esistenza della m^{pla} di funzioni φ nell'intorno di σ, la σ dicesi *caratteristica* (nel senso di Hadamard) del sistema (1).

Trattasi di una varietà di S_{n+1} sulla quale risulta indeterminato od impossibile il Problema di Cauchy.

Tutto ciò, come è ben noto, riceve un'importantissima interpretazione fisica. Un fenomeno fisico (per es. di moto) è suscettibile di propagazione ondosa se si traduce in un sistema (1) che presenti caratteristiche reali, variabili nel tempo.

L'interpretazione di ciò è dovuta al fatto che, lungo la varietà σ, si raccordano due diverse m^{ple} di soluzioni del sistema differenziale (1) (aventi eventualmente un contatto d'ordine superiore al primo, ma non infinito) le le quali caratterizzano, in modo diverso, il fenomeno nelle regioni dello spazio S_{n+1}, separate dalla σ. Attraverso σ subiscono così discontinuità, variabili nel tempo, le derivate (o almeno una di esse) di un cert'ordine di qualcuna delle funzioni incognite φ.

3. Ciò posto, consideriamo le equazioni differenziali del moto lento di un fluido viscoso[1]

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = X_i - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{d\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial x_i} + \dfrac{1}{3}\nu\dfrac{\partial}{\partial x_i}\sum_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} + \nu\Delta_2 u_i \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \dfrac{d\mu}{dt} + \mu\sum_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

(1) Cfr. ad es. H. Lamb, *Hydrodynamics*, fifth ed., p. 546, Cambridge, University Press, 1924; M. Brillouin, *Leçons sur la viscosité, etc.*, première partie, chap. II, Paris, Gauthier-Villars, 1907. Qui la variabile t è la x_0 del n. 2; scrivo, per brevità, $\sum_k$ invece di $\sum_1^3{}_k$.

nelle quali u_1, u_2, u_3, μ sono le componenti della velocità e la densità di una generica particella fluida, p è la pressione media, ν il coefficiente cinematico di viscosità, X_i la componente secondo l'asse x_i della forza sollecitante unitaria (di massa), i simboli $\frac{d}{dt}, \Delta_2$ denotano rispettivamente una derivata sostanziale rispetto al tempo (cioè fatta con referenza ad una stessa particella) e l'operatore di Laplace. Il sistema (3) nelle funzioni incognite u_1, u_2, u_3, μ delle quattro variabili t, x_1, x_2, x_3 è normale rispetto a t e tutto si riduce a far vedere che, applicando alle variabili indipendenti una generica trasformazione puntuale, il sistema trasformato risulta *sempre* normale rispetto alla variabile ζ, omologa di t.

Infatti, sia un'eventuale ipersuperficie caratteristica σ (2′) e poniamo

$$p_i = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} = p_i \dfrac{\partial}{\partial \zeta} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = p_i p_k \dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \cdots \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

dove compaiono soltanto i termini in cui figurano le derivate rispetto a ζ di ordine massimo.

Dunque

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_k p_i p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + \cdots = p_i \sum_k p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + \cdots$$

$$\Delta_2 u_i = \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} p_k^2 + \cdots = \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} \sum_k p_k^2 + \cdots$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} = (p_0 + \sum_k p_k u_k) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \cdots = \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \cdots .$$

Il sistema trasformato assume l'aspetto

$$\frac{1}{3} \nu p_i \sum_k p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} \sum_k p_k^2 - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} p_i + \cdots = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} + \cdots = 0,$$

nel quale si sono trascurati i termini che non contengono qualcuna delle quattro derivate $\frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$ e che quindi non influiscono sul carattere normale.

Se non è $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, nel qual caso la superficie di discontinuità (2) sarebbe fissa, la quarta equazione del sistema è risolubile rispetto a $\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$ e quindi basta considerare il determinante del 3° ordine formato con i coefficienti delle tre derivate $\frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2}$.

Esso è, a meno di un'essenziale fattore numerico

$$\begin{vmatrix} p_1^2 + 3\sum_k p_k^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_2 p_1 & p_2^2 + 3\sum_k p_k^2 & p_2 p_3 \\ p_3 p_1 & p_3 p_2 & p_3^2 + 3\sum_k p_k^2 \end{vmatrix} = 36\left(\sum_k p_k^2\right)^3.$$

L'equazione a derivate parziali delle varietà caratteristiche è dunque

$$\sum_k p_k^2 = 0$$

che dà senz'altro

$$p_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

È così dimostrata l'assenza di superficie di discontinuità variabili nel tempo, cioè l'inesistenza di propagazioni ondose.

Osservazione. - Si potrebbe pensare che l'impossibilità di propagazioni ondose fosse una necessaria conseguenza della viscosità; ciò non è. Per rendersene conto basta considerare il seguente esempio:

Le vibrazioni di una corda, nel caso in cui si supponga che il mezzo eserciti su di essa una resistenza viscosa, sono rette da un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine del tipo

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

In quest'equazione, la funzione incognita $\varphi(t, x)$ designa lo spostamento della generica particella della corda vibrante; il termine $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, in cui è $\lambda > 0$, avente con le solite notazioni le dimensioni di $l^{-2}t$, traduce analiticamente la resistenza opposta dal mezzo (per es. dall'aria) alle vibrazioni. Pur trattandosi qui di un sistema dissipativo, il fenomeno è suscettibile di propagazione ondosa, perchè le caratteristiche della (4) coincidono con quelle dell'equazione

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Meccanica. — *Quelques observations sur le travail de M. Sakellariou*: « *Sur une classe des mouvements centraux* ». Nota di N. Hatzidakis, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Sulla depressione gravimetrica di Carpaneto.* Nota di A. Belluigi, presentata dal Corrisp. P. Vinassa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di altezza variabile.* Nota II di R. Zoja, presentata [1] dal Corrisp. C. Guidi.

Nella Nota precedente ho indicato come per il solido considerato sia possibile ottenere l'espressione rigorosa delle componenti di tensione corrispondenti al sistema di sollecitazioni

(I) $$\mathfrak{N}_l \quad , \quad \mathfrak{M}_l \quad , \quad \mathfrak{T}_l$$

agenti nel piano verticale $y\zeta$ in corrispondenza della base libera.

Vediamo ora di ricercare l'espressione delle tensioni interne per l'altro sistema di sollecitazioni

(II) $$\mathfrak{M}'_l \quad , \quad \mathfrak{T}'_l$$

agenti sempre in corrispondenza della base libera, ma nel piano $x\zeta$.

È presto visto che data la particolare forma del solido, per questa nuova orientazione dello sforzo tagliante e del momento flettente, la configurazione delle tensioni interne non è più piana; in questo caso l'unica componente di tensione identicamente nulla è la

$$\sigma_x = 0$$

e quindi nelle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico ed in quelle ai limiti si annulla solamente il termine che contiene σ_x.

Per l'equilibrio tra il sistema di tensioni interne e la sollecitazione esterna relativa alla sezione trasversale generica di quota ζ, si avrà poi nel caso attuale

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

$$(1)\qquad \begin{cases} \int \sigma_z \, dA = 0 \\ \int \sigma_z \, y dA = 0 \qquad \int \sigma_z \, x dA = \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'_l - \mathfrak{T}'_l (l - z) \\ \int (\tau_{yz} \, x - \tau_{zx} \, y) \, dA = 0 \\ \int \tau_{yz} \, dA = 0 \qquad \int \tau_{zx} \, dA = \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'_l \end{cases}$$

dove gli integrali vanno al solito estesi a tutta la sezione.

Il problema della determinazione delle componenti di tensione si presenta nel caso attuale a primo aspetto come notevolmente più complesso che non per il caso considerato nella I Nota, ed in particolare non si può seguire il procedimento là indicato.

Se non che il fatto di essere questa volta il piano di sollecitazione normale alle due faccie laterali piane e parallele del solido, permette di prevedere direttamente la legge di variazione di alcune delle componenti di tensione. E precisamente oltre alla

$$(2)\qquad \sigma_z = \frac{\mathfrak{M}' x}{J'}$$

avremo anche

$$(3)\qquad \tau_{zx} = \frac{M' \mathfrak{T}'}{b J'},$$

come nel caso del solido prismatico; mentre per quanto riguarda la τ_{yz} è logico supporre che sulla sezione trasversale considerata le tensioni che si sviluppano per effetto di $\mathfrak{M}'$ nei vari punti di una corda $x = \text{cost.}$, debbano convergere nel punto di concorso delle due tangenti al contorno, giacenti appunto nel piano $x = \text{cost.}$; e perchè ciò sia occorre che la componente τ_{yz} di tali tensioni sul piano della sezione abbia la seguente espressione

$$(4)\qquad \tau_{yz} = \frac{\mathfrak{M}' x}{J'} \frac{y}{b} \frac{db}{dz}.$$

La conferma dell'esattezza di queste considerazioni si ha subito, poichè le espressioni di τ_{zx}, τ_{yz} e σ_z ora scritte soddisfano identicamente la terza equazione dell'equilibrio elastico, come pure risultano soddisfatte le condizioni ai limiti, rappresentate dalle

$$\text{per } x = \pm \frac{b}{2} \qquad \tau_{zx} = 0$$

$$\text{per } y = \pm \frac{h}{2} \qquad \tau_{yz} = \pm \frac{1}{2} \sigma_z \frac{db}{dz},$$

e tutte le relazioni (I); non solo, ma partendo dalle (2), (3), (4) è possibile ricavare univocamente le rimanenti componenti di tensione, soddisfacendo altresì alle rimanenti condizioni dell'equilibrio elastico.

Ed infatti:

a) dalla prima delle equazioni indefinite si ha

$$\tau_{xy} = -\int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\, dy + \text{cost.}$$

da cui

$$\tau_{xy} = \frac{M'\mathcal{C}'}{bJ'}\,\frac{y}{h}\,\frac{dh}{dz} \qquad (5)$$

(analoga alla (4))

essendo risultata nulla la costante colla condizione che

$$\text{per } y = \pm\frac{h}{2} \qquad \text{sia } \tau_{xy} = \pm\frac{1}{2}\tau_{zx}\frac{dh}{dz};$$

b) dalla seconda delle equazioni indefinite è allora possibile ricavare la

$$\sigma_y = -\int\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) dy + \text{cost.}$$

giungendo con facili passaggi all'espressione

$$\sigma_y = \frac{\mathfrak{M}'x}{J'}\left[\frac{y^2}{h^2}\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 + \frac{M}{A}\,\frac{d^2h}{dz^2}\right] \qquad (6)$$

la costante essendo stata determinata in modo da soddisfare alla seconda delle equazioni ai limiti.

Riassumendo i risultati di questa e della precedente Nota, le espressioni delle sei componenti di tensione per il solido considerato, quando esso venga assoggettato contemporaneamente ai due sistemi di sollecitazioni I e II in corrispondenza della base libera, sono le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma_x = 0\\
&\sigma_y = \frac{1}{A}\left[\frac{y^2}{h^2}\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 + \frac{M}{A}\,\frac{d^2h}{dz^2}\right]\mathfrak{N} - \frac{1}{4}\,\frac{y}{h}\left[\left(1 - 8\,\frac{y^2}{h^2}\right)\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 - 4\,\frac{M}{A}\,\frac{d^2h}{dz^2}\right]\mathfrak{M} +\\
&\qquad + \frac{x}{J'}\left[\frac{y^2}{h^2}\left(\frac{dh}{dz}\right)^2 + \frac{M}{A}\,\frac{d^2h}{dz^2}\right]\mathfrak{M}' + 2\,\frac{M}{bJ}\,\frac{y}{h}\,\frac{dh}{dz}\,\mathcal{C}\\
&\sigma_z = \frac{1}{A}\,\mathfrak{N} + \frac{y}{J}\,\mathfrak{M} + \frac{x}{J'}\,\mathfrak{M}'\\
&\tau_{yz} = \frac{1}{A}\,\frac{y}{h}\,\frac{dh}{dz}\,\mathfrak{N} - \frac{1}{8}\,\frac{h}{J}\left(1 - 12\,\frac{y^2}{h^2}\right)\frac{dh}{dz}\,\mathfrak{M} + \frac{x}{J'}\,\frac{y}{h}\,\frac{dh}{dz}\,\mathfrak{M}' + \frac{M}{bJ}\,\mathcal{C}\\
&\tau_{zx} = \frac{M'}{bJ'}\,\mathcal{C}'\\
&\tau_{xy} = \frac{M'}{bJ'}\,\frac{y}{h}\,\frac{dh}{dz}\,\mathcal{C}'.
\end{aligned}\right. \qquad (7)$$

Fisica (Fisica teorica). — *Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'eletiricità.* – II. *Posizione e prima discussione delle equazioni di campo.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota precedente portante lo stesso titolo, fu prospettata la possibilità di una teoria unitaria basata sui concetti di *metrica* e di *torsione* dello *spazio-tempo*. In questa si pongono le corrispondenti equazioni di campo.

Nella citata Nota, onde aver meglio sott'occhio tutta la inquadratura geometrica della questione, e anche per poter istituire confronti colle teorie che erano state precedentemente tentate, ci siamo sempre tenuti in un grado di generalità alquanto superiore allo stretto necessario, e, appunto con riferimento ad esso, abbiamo constatata la possibilità formale della nuova teoria. Ora invece, pur partendo ancora dallo stesso caso più generale, scenderemo rapidamente al particolare continuo, *spazio-tempo*, più semplice, che abbiamo veduto essere sufficiente al nostro scopo, e in esso porremo le equazioni generali della teoria unitaria.

Per far ciò seguiremo una via che presenta la più stretta analogia con quella che ormai si segue normalmente per porre le *equazioni gravitazionali* e dimostrare, nello stesso tempo, la loro *grande caratteristica*, che quasi le impone; di esser cioè, tra le più semplici relazioni differenziali covarianti fra il tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ e un tensore, entro certi limiti, arbitrariamente dato, quelle sole che, al limite, esprimono, come caso particolare, da un lato le equazioni fondamentali del moto dei sistemi continui nella nostra meccanica classica, dall'altro la legge di Newton.

Risulterà così evidente che le nostre equazioni sono senza dubbio le più semplici che al limite esprimono **esattamente** da una parte *le equazioni gravitazionali di Einstein* e dall'altra *le equazioni elettromagnetiche di Maxwell*.

Cotesta proprietà, che era sempre stata prospettata come meta ideale nella ricerca delle possibili teorie unitarie, non era mai stata raggiunta nelle precedenti teorie, le quali avevano in generale dovuto limitarsi a tendere ad approssimazioni di grado e, sopra tutto, di carattere assai discutibili.

Le grandi linee della teoria sono tuttora identiche a quelle della sua prima concezione, che data già da varî mesi e che avevo, oltre che in

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

privati colloqui e corrispondenze, esposte, fin dallo scorso gennaio, alla Società Mathesis di Genova. L'attuale formulazione, inaspettatamente semplice e piana, fu raggiunta attraverso varie altre formulazioni meno perfette che ho successivamente abbandonate, anche in seguito ad amichevoli osservazioni critiche degli egregi Colleghi Cartan, Levi-Civita e Palatini, ai quali mi è grato esprimere la mia riconoscenza.

Preparazione geometrica.

1. Per poter caratterizzare formalmente il nostro *spazio-tempo* indichiamone con $L^{\alpha}_{\mu\nu}$ i coefficienti della *connessione*, supponendola per ora *affine* e di tipo generale, quindi eventualmente *asimmetrica*, o *con torsione*. Gli indici α, μ, ν, corrispondano a quelli di un arbitrario sistema di riferimento x^{δ}. Ponendo: (1)

$$(1) \qquad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(L^{\alpha}_{\nu\mu} + L^{\alpha}_{\mu\nu}\right) \quad , \quad (2) \qquad \Omega^{\alpha}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\left(L^{\alpha}_{\mu\nu} - L^{\alpha}_{\nu\mu}\right)$$

si ottiene la nota scissione dei coefficienti della connessione nelle due parti rispettivamente simmetrica e emisimmetrica:

$$(3) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Omega^{\alpha}_{\mu\nu} .$$

Le $\Omega^{\alpha}_{\mu\nu}$ costituiscono le componenti di un tensore, che notoriamente si interpreta come il *tensore generale di torsione*, mentre le $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ non hanno affatto carattere tensoriale.

Il tensore di curvatura della *connessione* definita dalla $L^{\alpha}_{\mu\nu}$ (generalizzazione dell'analogo tensore di curvatura della connessione particolare espressa dai soli simboli di Christoffel di seconda specie $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$) ha l'espressione:

$$(4) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu\varrho} = \frac{\partial L^{\alpha}_{\mu\varrho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial L^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varrho}} + L^{\beta}_{\mu\varrho} L^{\alpha}_{\beta\nu} - L^{\beta}_{\mu\nu} L^{\alpha}_{\beta\varrho} .$$

2. Il tensore $\Omega^{\alpha}_{\mu\nu}$ è in generale scomponibile in un tensore a 20 componenti (ulteriormente scomponibile quando la connessione affine si riduca alla *connessione metrica*, oppure alla *connessione euclidea*) e in un tensore a 4 componenti (riconducibile ad un vettore), che indicheremo per omogeneità con $\Omega^{\alpha}_{\alpha\nu} = 2\,\delta^{\alpha}_{\mu}\psi_{\nu}$, essendo δ^{α}_{μ} il consueto tensore di Kronecker.

(1) Si veda in particolare la *Non riemannian Geometry* di *Eisenhart*. New Jork 1927, della quale si adottano anche in massima le notazioni.

Come fu detto (nelle considerazioni introduttive), a noi interessa il caso in cui il primo, o i primi tensori di torsione siano identicamente nulli, e quindi *tutta la torsione* del nostro continuo sia riconducibile al solo tensore $2\delta^{\alpha}_{\mu}\psi_{\nu}$ che, nella Nota precedente, svolgentesi nell'ipotesi della *connessione metrica*, abbiamo sempre detto *terzo* tensore irriducibile di torsione. Esso ha notoriamente, in tutte coteste connessioni, un carattere nettamente affine.

Nella precedente Nota fu pure rilevato che *nulla* consiglia di assumere come sfondo della fisica uno *spazio–tempo* caratterizzato da una connessione la cui parte simmetrica porti a *effettivi caratteri affini*, che non trovano alcun riscontro nella realtà fisisa. Ecco come possiamo ora formulare chiaramente questa osservazione fondamentale. Si immagini introdotta nella varietà una metrica riemanniana di tensore $g_{\mu\nu}$, e si indichino al solito con $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\}$ i relativi simboli di Christoffel. Con ciò diviene sempre lecito di rappresentare la parte simmetrica della connessione sotto la forma:

$$(5) \qquad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} + \alpha^{\alpha}_{\mu\nu},$$

nella quale l'ultimo termine rappresenta un *vero* tensore simmetrico. Ora noi ripetiamo che *nulla* consiglia di attribuire a cotesto tensore tutta la generalità di cui sarebbe *a priori* suscettibile; chè anzi intuitive considerazioni, che ad ogni modo risulteranno giustificate *a posteriori* dal risultato, consigliano di supporre senz'altro cotesto tensore *identicamente nullo*.

La connessione del nostro continuo, rispetto alla quale dovremo anche eseguire le derivazioni covarianti, risulta quindi un caso particolare, e precisamente *il più semplice possibile*, di quella che Cartan dice *connessione euclidea con torsione*, ossia la connessione:

$$(A) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} + 2\,\delta^{\alpha}_{\mu}\psi_{\nu}\,.$$

È essa la base formale della nostra teoria unitaria.

3. Non è forse privo d'interesse ritornare per un momento sui tentativi di Weyl e di Eddington, per precisarli dal nostro punto di vista.

Weyl, che fu il primo a intuire la necessità di ampliare la connessione, aveva posto a base della sua teoria la forma particolare, ma ancora *simmetrica* nelle μ, ν:

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} + \delta^{\alpha}_{\mu}\varphi_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\varphi_{\mu} + \delta^{\nu}_{\mu}\varphi_{\alpha}\,.$$

Evidentemente Egli non aveva voluto introdurre alcuna torsione, che d'altronde a quel tempo (1918) non era mai stata sistematicamente considerata.

Eddington era partito invece dalla connessione *simmetrica* più generale

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} + a^{\alpha}_{\mu\nu},$$

escludendo così Egli pure qualsiasi torsione.

Le ragioni della difficoltà incontrate dalle due teorie e particolarmente quella della loro divergenza rispetto alla teoria della gravitazione einsteiniana, già ricordata nella Nota precedente, risultano ormai evidenti. Per ottenere la possibilità dell'interpretazione dei fenomeni elettromagnetici, *in assenza di un'opportuna torsione*, Weyl e Eddington avevano ampliato considerevolmente la connessione dello *spazio–tempo* nella sua *parte simmetrica*; ma con ciò avevano anche dovuto *necessariamente* attribuirgli un carattere **effettivamente** *affine*, che non poteva non deformare profondamente tutte le rappresentazioni, in esso, degli svolgimenti dei fenomeni della nostra fisica, e in particolare dei fenomeni gravitazionali.

4. Le componenti del tensore generale di curvatura, definite dalle (4) e tenuto conto delle (*A*) saranno quindi:

$$(5) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu\varrho} = R^{\alpha}_{\mu\nu\varrho} + 2\,\delta^{\alpha}_{\mu}\left(\frac{\partial \psi_{\varrho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\varrho}} \right)$$

ove con $R^{\alpha}_{\mu\nu\varrho}$ è, come al solito, indicato il tensore di curvatura riemanniano. La notevole semplicità di questo tensore è dovuta alla mutua elisione di vari termini, come si verifica senza difficoltà.

Il tensore di curvatura contratto per $\alpha = \rho$, che nella nostra connessione può, in un certo senso, venir considerato come la generalizzazione del tensore di Ricci–Einstein $G_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$, risulta senza alcuna difficoltà espresso dalla:

$$(6) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = L_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2\left(\frac{\partial \psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right).$$

Il suo invariante scalare $L = L_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}$, data l'emisimmetria della seconda parte, si riduce a G.

Le equazioni del campo unitario.

5. Richiamiamo dapprima brevemente qualche tratto caratteristico della posizione delle equazioni della gravitazione.

Avendo Einstein intuita la convenienza di caratterizzare lo *spazio–tempo* per mezzo di condizioni imposte a un tensore formato colle $g_{\mu\nu}$, ma meno ampio del tensore di curvatura di Riemann, ricorse, come è notissimo, dapprima al solo tensore contratto $G_{\mu\nu}$, come a quello che permette di

porre, con la maggior complicità, una legge covariante della gravitazione, che comprenda, come caso limite, la legge di Newton. Ma ben presto vide che era invece preferibile ricorrere alla notevole combinazione $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G\, g_{\mu\nu}$, la quale costituisce anch'essa un tensore, ma a *divergenza nulla*, perchè, posta eguale ad un tensore $T_{\mu\nu}$ (evidentemente anch'esso a divergenza nulla, altrimenti arbitrario), non solo forniva una altrettanto ragionevole rappresentazione del campo gravitazionale, ma anche assicurava alla nuova fisica principî conservativi, che divenivano perfettamente analoghi a quelli classici, quando appena si interpretasse il tensore $T_{\mu\nu}$ quale tensore energetico della materia.

6. Consideriamo ora l'analoga espressione tensoriale dedotta dal tensore di curvatura $L^{\alpha}_{\mu\nu\varrho}$ corrispondente alla nostra connessione (A), e poniamola analogamente eguale a un tensore $E_{\mu\nu}$, del quale fisseremo immediatamente quelle proprietà che si presentano come necessarie conseguenze delle nostre posizioni, riservandoci invece di disporre opportunamente di quanto, dopo ciò, rimanesse ancora arbitrario.

Avremo quindi come equazioni fondamentali:

$$L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L\, g_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} ,$$

o più esplicitamente, tenendo conto delle (6) e dell'osservazione che loro segue:

$$(B) \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G\, g_{\mu\nu} + 2\left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu}\right) = E_{\nu\nu} .$$

7. Passiamo ora alla specificazione del tensore $E_{\mu\nu}$, per dare alle equazioni fondamentali la loro forma definitiva.

Osserviamo in primo luogo che il tensore $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G\, g_{\mu\nu}$ è *simmetrico*, mentre il tensore $2\left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu}\right)$ è *emisimmetrico*, per cui il tensore $E_{\mu\nu}$ dovrà necessariamente constare di una parte emisimmetrica, che indicheremo con $2\Psi_{\mu\nu}$. Con ciò le 16 equazioni (B) si scindono nei due sistemi parziali rispettivamente di 10 e 6 equazioni

$$(I) \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G\, g_{\mu\nu} = -k\, T_{\mu\nu}$$

$$(II) \qquad \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu} = \Psi_{\mu\nu} .$$

Le equazioni (I) coincidono *formalmente* colle equazioni della gravitazione, mentre le (II) coincidono *pure formalmente* colla definizione delle forze elettromagnetiche $\Psi_{\mu\nu}$ per mezzo di un potenziale elettromagnetico ψ_ν.

Osserviamo ora che *anche nella nostra particolare connessione* il tensore a sinistra nelle equazioni (I) è *a divergenza nulla*, perchè mentre in generale le derivate covarianti della connessione (*A*) differiscono dalle corrispondenti riemanniane, le divergenze invece coincidono, poiche si elidono i termini dovuti alla distorsione espressa dal vettore ψ_ν. Il tensore $T_{\mu\nu}$ dovrà quindi, *come nella teoria della gravitazioue einsteiniana* esser presupposto *a divergenza nulla*; potrà allora anche conservare il suo significato fisico di *tensore energetico*. Occorrerà perciò considerarlo come constante di due parti, *una di origine materiale*, che indicheremo con $T_{\mu\nu}$, e sarà in generale un dato del problema, e *una di origine elettromagnetica*, che indicheremo con $\tau_{\mu\nu}$, e dovrà esser espressa per mezzo delle ψ_ν. Dovendo ciascuna di esse esser indipendente dall'altra, entrambe dovranno esser *a divergenza nulla*, la qual cosa obbliga in certi casi a completarle, la prima col *pseudo tensore* gravitazionale, la seconda col *tensore delle tensioni non maxwelliane*, come d'altronde è noto (ved. p. es. Eddington, *Relativitätstheorie*, § 59 e 76). Fuori della materia (e elettricità) l'espressione di $\tau_{\mu\nu}$, a cagione della rilevata coincidenza delle divergenze, potrà esser posta identica alla consueta espressione del tensore energetico elettromagnetico:

$$\tau_{\mu\nu} = -\, g^{\varrho\sigma}\, \Psi_{\mu\varrho}\, \Psi_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\, \Psi_{\varrho\sigma}\, \Psi^{\varrho\sigma},$$

la cui divergenza, in tali condizioni, è senza dubbio nulla.

In conclusione le equazioni (I) possono coincidere, *anche nella sostanza* colle equazioni gravitazionali di Einstein.

8. Le equazioni (II) dicono null'altro di essenziale se non che il vettore ψ_ν ha le caratteristiche generali di un potenziale elettromagnetico. Se fossero date le $\Psi_{\mu\nu}$ il vettore ψ_ν sarebbe determinato *a meno del gradiente di uno scalare*, come è notissimo.

Ma facendo la divergenza delle equazioni (*B*), e tenendo conto di quanto abbiamo detto poco fa, possiamo scrivere le equazioni

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{\nu} = J^\mu \qquad \text{(III)}$$

in cui il vettore J^μ sarà *a priori* ancora del tutto arbitrario. Disponiamone parzialmente, nel senso di imporgli solamente di esser esso pure a divergenza nulla:

$$J^\mu{}_\mu = 0 \,. \qquad (C)$$

Otterremo così non solo che le equazioni (II) e (III), colla condizione (*C*) coincidano formalmente colle equazioni di Maxwell nel nostro continuo, ma anche che il vettore J^μ possa venir considerato come l'*ipercorrente*.

Esso costituisce appunto l'elemento fisico che *nella teoria unitaria* occorre aggiungere al tensore energetico per la determinazione delle variabili di campo $g_{\mu\nu}$ e ψ_ν, fino al punto desiderato, e cioè delle $g_{\mu\nu}$ a meno dell'arbitraria scelta del sistema di riferimento e delle ψ_ν a meno del gradiente di uno scalare. È infatti facile verificare che le equazioni (I), (II) e (III) soddisfano le opportune condizioni di compatibilità.

Fra le 10 equazioni (I) sussistono, come è notissimo, le 4 identità dovute all'annullarsi della loro divergenza.

Le 6 equazioni (II), in conseguenza delle (III) e della (*C*), sono identicamente verificate, tanto che spesso non si scrivono, limitandosi a ricordare l'esistenza del potenziale elettromagnetico ψ_ν che esse affermano. Sono in fondo 6 equazioni con 6 identità.

Fra le 4 equazioni (III), per la condizione (*C*) esiste 1 identità.

Sono quindi complessivamente $10 + 6 + 4 = 20$ equazioni, fra le quali sussistono $4 + 6 + 1 = 11$ identità, che appunto possono determinare le $10 + 4 = 14$ variabili di campo $g_{\mu\nu}$ e ψ_ν *a meno di 5 gradi di arbitrarietà*, corrispondenti all'arbitrarietà di scelta del sistema di riferimento (4) e della determinazione delle ψ_ν a meno del gradiente di uno scalare (1).

Fisica. — *Spettro Raman dello jone* SO_4. Nota di O. Specchia, presentata dal Socio Q. Majorana.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul calcolo di una lente.* Nota di G. Vitali, presentata dal Corrisp. P. Burgatti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla stereoisomeria dei derivati dell'* 1 1′*-dinaftile* [1]. Nota di A. Corbellini, presentata [2] dal Corrisp. L. Cambi.

La comparsa dell'attività ottica nei derivati sostituiti del difenile (ed in quelli analoghi del difenilbenzolo, dell'1 , 1′–dinaftile, dell'1 , 1′–diantrachinonile, ecc.), è, come è noto, attribuita [3]:

a) ai gruppi sostituenti nelle posizioni 2 , 2′ e 6 , 6′ i quali, sia per cause puramente meccaniche dipendenti dal loro volume, sia per gli effetti derivanti dalle loro cariche elettriche, impediscono la libera rotazione di un nucleo risperto all'altro;

b) alla contemporanea dissimetria di ambedue i nuclei benzenici.

La recente discussione di L. Mascarelli [4] sulla possibilità di avere attività ottica nei diversi derivati di sostituzione del difenile, dell'1– e 2–fenilnaftalina, dell'1 , 1′–, 1 , 2′- e 2 , 2′–dinaftile mette in particolare rilievo il carattere delle posizioni 8 e 8′ nell'1–fenilnaftalina e nell'1 , 1′-dinaftile. Non era infatti possibile prevedere se l'introduzione di un gruppo sostituente in una, e a maggior ragione in ambedue queste posizioni, poteva dar luogo a stereoisomeria. L'indagine sul comportamento ottico dei derivati 8 sostituiti, o meglio 8 , 8′ disostituiti dell'1 , 1′–dinaftile più facilmente accessibili, offriva quindi particolare interesse.

Comunico in questa Nota in via prelinare i risultati di alcune ricerche sull'argomento.

Fra i diversi derivati 8 , 8′ disostituiti dell'1 , 1′–dinaftile ho naturalmente preso in esame il diammino ed il dicarbossilderivato, i quali possono essere scissi negli eventuali antipodi ottici mediante acidi o basi attive.

Recentemente ho avuto occasione di preparare l'acido 1 , 1′–dinaftile-8 , 8′-dicarbossilico [5]; esso si ottiene con buoni rendimenti per riduzione del diazocomposto dell'acido 8-amino-1–naftoico.

Dalle esperienze finora eseguite risulta che la cristallizzazione o la precipitazione frazionata dei sali di brucina, cinconina e stricnina del predetto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(3) E. E. Turner e R. J. W. Le Fèvre, J. Soc. Chem. Ind.», *45*, 831, 883 (1926); F. Bell e J. Kenyon, «J. Soc. Chem. Ind.», *45*, 864 (1926); W. H. Mills, «J. Soc. Chem. Ind.», *45*, 884 (1926); L. Mascarelli, «Gazz. Chim. Ital.», *58*, 627, 791, 865 (1928); R. Adams e collaboratori, «J. Am. Chem. Soc.», *50*, 2499 (1928); *52*, 1200 (1930).

(4) Loc. cit.

(5) A. Corbellini e A. Passaggio, «Giorn. Chim. Ind. e Appl.», *13*, 109 (1931).

acido, conduce alla separazione dei due antipodi ottici. Questi in soluzione alcalina si racemizzano con grande facilità già a temperatura ordinaria, differenziandosi con ciò nettamente sia dai due acidi *d*- e *l*–1 , 1′–dinaftile–2 , 2′–dicarbossilico che sono invece stabili [1], sia dagli acidi *d*- e *l*–6 , 4′-dinitro–difenico [2], *d*- e *l*–4 , 4′ , 6–trinitro-difenico [3], *d*- e *l*–2–metil–6–nitro–2′–difenilcarbossilico [4], *d*- e *l*–N-(2–carbossifenil)-2 , 5-dimetil-3-pirrolcarbossilico [5] che si racemizzano meno facilmente.

Si può quindi con molta probabilità prevedere anche per i derivati 8-monosostituiti dell' 1–fenilnaftalina e dell' 1 , 1′-dinaftile, facendo qualche riserva sulla natura del gruppo sostituente e sull'intervento di possibili deformazioni della molecola [6], la possibilità dell'esistenza degli antipodi ottici.

Mentre proseguo ad isolare completamente i due stereoisomeri e nello studio chimico-fisico della loro racemizzazione, estendo le ricerche anche ad altri derivati dei dinaftili.

Parte sperimentale.

Acido 1 , 1′-*dinaftile* 8 , 8′–*dicarbossilico.*

Venne preparato riducendo il diazocomposto dell'acido 8-amino-1-naftoico con ossidulo di rame ammoniacale [7]. L'etere dimetilico, ottenuto per metilazione del sale dipotassico secco con solfato dimetilico, cristallizza dall'alcool in foglioline fondenti a 156°.

Sale di brucina. 5 gr. (1 mol.) di acido e 5.76 gr. (1 mol.) di brucina anidra si sospendono in 1200 cmc. di alcool assoluto; la soluzione riscaldata a bagnomaria per qualche tempo dà luogo alla formazione del sale che per la maggior parte passa in soluzione.

Si filtra il residuo (I frazione, 2.05 gr., p. f. 243°–245°); dal filtrato cristallizza buona parte del sale disciolto (II frazione, 6.05 gr., p. f. 247°–248°). Evaporando a secco l'alcool madre si ottiene una III frazione (2.18 gr.).

La frazione (I) venne ricristallizzata da una miscela di alcool e cloroformio; per lenta evaporazione si separa il sale in massa cristallina compatta che in soluzione cloroformica ha il seguente potere rotatorio:

$$[\alpha]_D^{18} = (-5 , 90° \cdot 100) : (1 , 5540 : 1) = -379°, 68°$$

(1) R. Kuhn e O. Albrecht, « Ann. », *465*, 282 (1928).
(2) R. Kuhn e O. Albrecht, « Ann. », *455*, 294 (1927).
(3) R. Kunh e O. Albrecht, « Ann. » *458*, 226 (1927).
(4) R. W. Stonghton e R. Adams, « J. Am. Chem. Soc. », *52*, 5263 (1930).
(5) L. H. Bock e R. Adams, « J. Am. Chem. Soc. », *53*, 374 (1931).
(6) W. M. Slanley e R. Adams, « J. Am. Chem. Soc. », *52*, 1204 (1930).
(7) A. Corbellini e A. Passaggio, loc. cit.

La frazione (II) ricristallizzata da alcool assoluto in soluzione cloroformica ha fornito:

$$[\alpha]_D^{18} = (-5,86° \cdot 100) : (1,5216 \cdot 1) = -385°,12$$

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

	trovato %	C 73,11	H 5,68	N 3,82
per $C_{45}H_{40}O_8N_2$	calcolato %	73,33	5,48	3,80

Gli acidi ottenuti dai sali precedenti decomponendoli con acido cloridrico sono otticamente attivi; in soluzione leggermente alcalina si è avuto:

acido I frazione $[\alpha]_D^{17} = (+3,40° \cdot 100) : (2,5240 \cdot 1) = +134°,71$
» II » $[\alpha]_D^{17} = (+2,50° \cdot 100) : (1,8510 \cdot 1) = +135°,06$

L'attività ottica diminuisce rapidamente già a temperatura ordinaria: il potere rotatorio dopo circa tre ore dalla prima osservazione è già inferiore alla metà e dopo poche ore si annulla.

La frazione (III), notevolmente più impura, contiene l'antipodo ottico che pure si racemizza rapidamente con gli alcali.

Sale di cinconina 3.47 gr. (1 mol.) di acido e 2.98 gr. (1 mol.) di cinconina si sospendono in 70 cmc. di alcool assoluto e si riscalda a bagno maria fino a completa solubilità.

Per aggiunta di 140 cmc. di etere di petrolio (p. e. 40°–70°) precipita caseosa una prima frazione (I) (2.05 gr., p. f. 181°–190°); concentrando il filtrato a circa 20 cmc. e aggiungendo 40 cmc. di etere di petrolio si separa pure caseosa una seconda frazione (II) (2.70 gr., p. f. 190°–198°). Evaporando infine il filtrato a secco si ottiene una terza frazione (III) (1.50 gr.).

Vennero osservati i seguenti poteri rotatori:

frazione (I) $[\alpha]_D^{18} = (-2,64° \cdot 100) : (1,5936 \cdot 1) = -169°,52$
» (II) $[\alpha]_D^{18} = (+1,55° \cdot 100) \cdot (1,6084 \cdot 1) = +96°,37$

L'acido proveniente dalla scomposizione con acido cloridrico della frazione (I) è destrogiro, quello proveniente dalla (II) levogiro.

Sale di stricnina. Si ottiene bollendo a ricadere per circa tre ore 5 gr. (1 mol.) di acido e 4.90 gr. (1 mol.) di stricnina con 100 cmc. di alcool assoluto nel quale il sale che si forma è quasi insolubile.

Cristallizzandolo da piridina si perviene alla separazione dei due antipodi ottici.

Chimica. — *Sullo spettro Raman del dicloro–bromometano.* Nota di G. B. Bonino e L. Brüll, presentata dal Corrisp. M. Betti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Spettro Raman di derivati idrogenati della naftalina.* Nota di G. B. Bonino e P. Cella, presentata dal Corrisp. M. Betti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulle reazioni di addizione ai composti organici non saturi.* Nota di P. Pratesi, presentata dal Corrisp. M. Betti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Diopside e tremolite del Monte Spinosa nel Campigliese* [1]. Nota di F. Rodolico, presentata [2] dal Corrisp. Piero Aloisi.

In una precedente pubblicazione ho descritto la vesuviana da me trovata sulle pendici del Monte Spinosa nella zona di contatto tra il granito del Botro ai Marmi ed i circostanti calcari liassici [3]. Nella stessa località, e nelle stesse condizioni di giacitura, ho raccolto campioni di diopside e di tremolite, minerali anche questi che non erano stati osservati nella regione [4].

La tremolite costituisce di solito aggregati bianchissimi di fibre molto allungate; al microscopio nelle sezioni sottili è sempre facilmente visibile

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(3) F. Rodolico, *Vesuviana del Monte Spinosa nel Campigliese*, « Rend. R. Accad. Lincei », XIII, [6], 213, (1931).

(4) Per ciò che riguarda la tremolite, è noto come le masse pirosseniche del Campigliese siano state considerate come anfiboliche sino a quando il Pilla ed il Cocquand ne determinarono la vera natura. Gli autori che successivamente hanno compiuto ricerche mineralogiche sul Campigliese non ricordano più gli anfiboli tra i minerali della regione, ed a tale proposito Antonio D'Achiardi, trattando della tremolite così scrive: « Questa verità di anfibolo suole presentarsi tra noi (*in Toscana*) insieme alle rocce serpentinose; si può anzi affermare esserne esse l'unica giacitura conciossiachè quelle masse bianche fibroso-raggianti che si trovano insieme ai pirosseni verdi di Campiglia, quantunque somigliantissime ad alcune varietà di tremolite, sono da ritenersi di pirosseno esse pure » (*Mineralogia della Toscana*, Pisa 1872, II, 85). La conclusione del D'Achiardi trova indiretta conferma nelle ricerche dell'Aloisi che studiando recentemente i pirosseni del Campigliese (« Mem. R. Accad. Lincei », II, [6] I, 1926), non ha osservato la presenza di anfiboli.

la sfaldatura secondo {110}, con l'angolo caratteristico degli anfiboli tra i due sistemi di tracce nelle sezioni normali a *c*. Il minerale mostra forte birifrazione con carattere negativo; in sezioni secondo {010} ho misurato l'angolo:

$$c : \gamma = 18°$$

Per l'analisi chimica mi sono procurato ottimo materiale, trattando con acido acetico diluito un aggregato che al microscopio appariva costituito da fibre freschissime ed inquinate soltanto da una piccola quantità di calcite; ecco i risultati ottenuti:

SiO_2	57.62	0.955
TiO_2	0.04	—
Al_2O_3	1.41	0.014
Fe_2O_3	0.12	—
FeO	1.03	0.014
MnO	tracce	—
MgO	23.48	0.582
CaO	13.94	0.249
K_2O	0.14	0.001
Na_2O	0.26	0.004
Fl	tracce	
H_2O +	2.25	0.125
H_2O —	0.04	—
	100.33	

Peso specifico = 2.966.

È stato più volte notato come le analisi più recenti di tremolite non si accordino con sufficiente esattezza con la formula:

$$Ca\,Mg_3\,(SiO_3)_4$$

Nel 1929 il Warren [1] ha studiato la struttura della tremolite e, sulla base di tali ricerche, sostiene la formula:

$$H_2Ca_2Mg_5(SiO_3)_8$$

(1) B. E. Warren, *The structure of Tremolite* $H_2Ca_2Mg_5(SiO_3)_8$, « Zeitschr. f. Kryst », LXXII, 42 (1929); Id., *The crystal structure and chemical composition of the monoclinic amphiboles*, « Zeitschr. f. Kryst. », LXXII, 493 (1929).

Egli inoltre, interpretando alcune delle migliori analisi del minerale secondo le idee di V. M. Goldschmidt, ritiene che esse bene si accordino con la nuova formula. È notevole il fatto che nello stesso tempo il Kunitz, partendo da considerazioni puramente chimiche, sia pervenuto allo stesso risultato [1]; del resto una formula della tremolite, corrispondente in sostanza a quella del Warren e del Kunitz, era stata scritta dal Gossner fino dal 1924 [2]. La differenza tra la vecchia formula e la nuova consiste nella variazione del rapporto CaO : MgO che da 1 : 3 diviene 2 : 5, e nella introduzione dell'acqua nella costituzione del minerale. L'acqua presente nella tremolite era stata invece considerata di soluzione da Allen e Clement [3], avendo essi notato che il minerale la perde gradatamente all'aumentare della temperatura senza modificare praticamente le sue proprietà ottiche.

Per facilitare i confronti con l'analisi della tremolite di Campiglia, riunisco nella seguente tabella le percentuali ed i rapporti molecolari calcolati in base alle due formule considerate:

	$CaMg_3(SiO_3)_4$		$H_2Ca_2Mg_5(SiO_3)_8$	
SiO_2	57.66	0.956	59.25	0.983
MgO	23.48	0.582	24.76	0.614
CaO	13.94	0.249	13.42	0.246
H_2O	—	—	2.21	0.123

Nella mia analisi la percentuale del calcio si accorda tanto con l'una quanto con l'altra formula; quella del magnesio, anche tenendo conto del ferro ferroso, concorda molto meglio con la nuova formula, mentre il contrario si verifica per quella della silice, qualora non si voglia ammettere la sostituzione alluminio-silicio. La quantità di acqua corrisponde quasi esattamente a quella calcolata con la nuova formula, ma la sua funzione non mi appare chiara giacchè ho potuto confermare le osservazioni di Allen e Clement, relative al modo col quale essa viene ceduta per riscaldamento, ed al fatto che il minerale disidradato non perde la sua omogeneità nè modifica in modo sensibile le sue proprietà ottiche. Per calcolare completamente le analisi degli anfiboli il Warren ammette le seguenti sostituzioni:

(1) W. Kunitz, *Die Isomorphieverhältnisse in der Hornblendgruppe*, « N. Iahrbuch f. Min. etc. - Beilage Band – Abt. A », LX, 192 (1930).

(2) B. Gossner, *Die chemische Konstitution der monoklinen Pyroxene und der Amphibole. II Amphibolgruppe*, « Zeitschr. f. Kryst. », LX, 368 (1924). Vedi anche Id., *Zur Frage der Zusammensetzung des Tremolits*, «Zeitschr. f. Kryst. », LXXIII, 114 (1930).

(3) E. T. Allen e J. K. Clement, *The rôle of water in Tremolite and certain other minerals*, « Am. Jour. Sci. », XXVI [4], 102 (1908).

Si , Al .
(Al) , Ti , Fe , **Mg** , Fe , Mn .
(Mn) , Na , **Ca** , K .
F , **OH** .

Ecco i risultati che si ottengono calcolando la mia analisi secondo il metodo adottato dal Warren:

	%	Numero degli atomi metallici sulla base di 24(O , OH)		Composizione teorica
SiO_2	57.62	7.83	8.05	8.00
Al_2O_3	1.41	0.22		
TiO_2	0.04	—	4.91	5.00
Fe_2O_3	0.12	0.01		
MgO	23.48	4.77		
FeO	1.03	0.13		
Na_2O	0.26	0.06	2.11	2.00
CaO	13.94	2.03		
K_2O	0.14	0.02		
H_2O	2.25		2.04	2.00

Le differenze tra valori calcolati e valori sperimentali sono dello stesso ordine di grandezza di quelle che si osservano nelle analisi di tremolite calcolate dal Warren e da lui riportate nel suo lavoro.

Il diopside si presenta sotto forma di prismi piuttosto grossi a contorni cristallografici mal definiti; al microscopio si nota che i cristalli sono spesso geminati secondo { 100 } e in essi si riconoscono talvolta i pinacoidi { 100 }, { 010 } e, più raramente, il prisma { 110 }. Caratteristica è la sfaldatura secondo { 110 } con i due sistemi di tracce quasi perpendicolari tra loro nelle regioni normali a *c*.

La rifrazione e la birifrazione sono molto elevate e quest'ultima ha carattere negativo. In sezioni { 010 }, che a luce convergente mostrano l'emergenza di β, ho misurato l'angolo:

$$c : \gamma = 37°$$

Per l'analisi chimica non mi è stato possibile di servirmi di materiale purissimo come per la tremolite; ho dovuto trattare con acido acetico diluito un campione di calcare inquinato di limonite nel quale il diopside era associato con la tremolite, e quindi separare i due minerali. Il materiale ottenuto, esaminato al microscopio, appariva costituito soltanto da cristalli del pirosseno, ma in essi si notava qualche segno di alterazione e la presenza di tracce di limonite. Ecco i risultati della analisi:

SiO	54.58	0.905		
TiO	0.04	—		
Fe_2O_3	0.62	—		
FeO	1.38	0.019		
MnO	0.02	—	0.453	
MgO	17.49	0.434		0.900
CaO	24.76	0.442		
Na_2O	0.32	0.005	0.447	
K_2O	tracce	—		
H_2O	0.63	—		
	99.84			

Peso specifico = 3.317

Se si trascurano le percentuali dell'acqua e del ferro ferrico ammettendo che esse derivino dallo stato di alterazione del minerale e dalla presenza di piccole quantità di limonite, si ottengono rapporti concordanti con la formula del diopside.

Fig. 1.

Diopside e tremolite sono di solito intimamente associati tra loro ed al calcare cristallino che li racchiude; talvolta al microscopio si nota che i cristalli di diopside sono concresciuti con quelli di calcite della roccia calcarea. Il fenomeno, che non credo sia stato descritto, è rappresentato schematicamente nella figura 1; esso si manifesta sempre in maniera molto netta: dentro un cristallo di calcite si osservano numerose piccole plaghe di diopside, le quali sono tutte isorientate come appare dall'andamento delle tracce di sfaldatura e dalla contemporanea estinzione. Anche tra cristalli di tremolite e calcite e di diopside e tremolite si osservano talvolta fenomeni che potrebbero far pensare a concrescimenti, ma nel caso di questi minerali non è possibile di asserire la cosa con sicurezza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Levi-Civita, per incarico dei colleghi Maggi e Cisotti, presenta in omaggio il vol. IV dei « Rendiconti » del Seminario Matematico Fisico di Milano e ne illustra brevemente il contenuto.

L'Accademico Segretario Parravano presenta i libri giunti in dono segnalando il tomo IV del « Catalogo fotografico del cielo dell'Osservatorio di Parigi » e il vol. I degli « Atti della Società italiana per il progresso delle scienze » pubblicati a cura del prof. L. Silla.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci Armellini Betti, Crocco, Guidi, Levi-Civita, Severi.

VARIE

Il Presidente annuncia che il 24 maggio prossimo in Forlì si renderanno solenni onoranze alla memoria di E. B. Morgagni ed assicura che la Presidenza curerà perchè l'Accademia sia degnamente rappresentata alla cerimonia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 maggio 1931

BEGHIN H. et JULIA G. — Exercices de mécanique. Tome I, fasc. II. Paris, 1931. 8°, pp. 337-576.

BOSSOLASCO MARIO. — Alcune conseguenze di una formula dovuta ad H. Bruns. (Sonderdruck aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Bd. XXII, Heft 1-2. 1920. pp. 9-12). Leipzig, 1929. 8°.

BOSSOLASCO MARIO. — Cenni biografici su Felix M. Exner. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia Pratica ». Anno XI, n. 2). Subiaco, 1930, 8°.

BOSSOLASCO MARIO. — Condensazione ed evaporazione. Nota I^a. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia Pratica ». Anno XI, n. 3). Subiaco, 1930. 8°, pp. 1-11.

BOSSOLASCO MARIO. — Il concambio di masse nella libera atmosfera. (Estr. da « L'Aerotecnica-Giornale ed Atti dell'Ass. Italiana di Aerotecnica ». Anno VIII, n. 10). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-16.

BOSSOLASCO MARIO. — Il potere refrigerante come fattore climatico. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia Pratica ». Anno XI, n. 1). Subiaco, 1930. 8°.

BOSSOLASCO MARIO. — Isostasia ed ondulazioni del geoide in rapporto alle anomalie gravimetriche ed alle deviazioni della verticale. (Estr. dai « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Vol. XXVI, pp. 14-26). Leipzig, 1930. 8°.

BOSSOLASCO MARIO. — L'aerofotogrammetria nell'indagine limnologica. (Estr. dal vol. II degli « Atti del XI Congresso geografico italiano ». Napoli, 1930. 8°, pp. 1-8.

BOSSOLASCO MARIO. — La plasticità nei fenomeni di orogenesi. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, matematiche e naturali ». Vol. VII, pp. 66-71). Roma, 1928. 8°.

BOSSOLASCO MARIO. — Recenti progressi e nuovi indirizzi nella costruzione degli strumenti topografici e fotogrammetrici. Parte I (Estr. da « L'Ingegneria moderna ». 1931). Busto Arsizio, 1931. 4°, pp. 1-14.

BOSSOLASCO MARIO. — Relazione della campagna glaciologica del 1927, Alpi Occidentali. (Estr. dal « Bollettino del Comitato Glaciologico italiano ». n. 8. 1928, s. d. t.

BOSSOLASCO MARIO. — Relazione preliminare sulle campagne glaciologiche compiute in Alto Adige negli anni 1919 e 1930. (Estr. dal « Bollettino del Comitato Naz. Geodetico-Geofisio » N. XXI). Pisa, 1930. 8°, pp. 1-6.

BOSSOLASCO MARIO. — Su di alcuni fenomeni che si presentano nei ghiacci e che dipendono specialmente dalle condizioni del movimento. (Sonderabd. aus der « Zeitschrift für Gletscherkunde ». Bd. XVIII, Heft 1-3; pp. 9-23). Berlin, 1930. 8°.

BOSSOLASCO MARIO. — Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ». Vol. V, pp. 748-752). Roma, 1927, 4°.

BOSSOLASCO MARIO, — Sulla natura delle oscillazioni dei ghiacciai. (Estr. dalla

Rivista « La Meteorologia Pratica ». Anno X, N. 5). Subiaco, 1929. 8°, pp. 1–12.

Bossolasco Mario. — Sulla previsione della temperatura nell' interno delle montagne. (Estr. de « Ergänz–Hefte F. angew. Geophysik ». Tome I (1930), pp. 149–155). Leipzig, 1930. 8°.

Bossolasco Mario. — Sulle condizioni attuali di alcuni ghiacciai del gruppo del Gran Paradiso. (Estr. dal « Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano ». n. 9, anno 1929, pp. 109-143). s. d. t. 8°.

Bossolasco Mario. — Sulle medie aritmetiche delle funzioni di un sistema ortogonale (Estr. dagli « Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXII, 1927). Torino, 1927. 8°, pp. 1–9.

Bossolasco Mario. — Sur l'ellipticité de l'équateur terrestre (Estr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 187 e 188). Paris, 1927–1929. 4°, pp. 1-3.

Bossolasco Mario. — Ulteriori considerazioni sul potere refrigerante. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia Pratica ». Anno XI, N. 2). Subiaco, 1930. 8°.

Bossolasco Mario. — Zur Frage der Gletschereisbildung durch tägliches Schmelzen und nächtliches Wiedergefrieren des Firnschnees.

Le condizioni attuali del ghiacciaio del Maiage. (Sanderabd. aus der « Zeitschrift für Gletscherckunde ». Bd. XVIII, Hoft 1/3. Berlin, 1930. 8°, pp. 1–5.

Catalogue photographique du ciel. Coordonneès rectilignes. Tome VI, zone + 18 a + 20. (Observatoire de Paris). Laval, 1929 4°, pp. I–XII, 1–237.

De Marchi Luigi. — Moderni problemi di geofisica. (Pubblicazioni del Comitato Naz. italiano per la geodesia e la geofisica. N. 1). Pisa, 1930. 8°, pp. 1-15.

Pampanini R. — Prodromo della flora Cirenaica. (Ministero delle Colonie). Forlì, 1931. 8°, pp. I–XXXVIII, 1–665.

Relazione sull'attività del Comitato Naz. italiano geodetico e geofisico durante l'anno 1930. (Estr. dal « Bollettino del Com. Naz. Italiano per la Geodesia e la Geofisica ». Anno I, n. 4). s. l. 1931. 8°, pp. 1-4.

Veblen Oswald. — Analysis situs. New Jork, 1931. 8°, pp. I–X, 1-194.

Vitale M. A. — Il cammello ed i reparti cammellati. Collezione di opere e di monografie a cura del Ministero delle Colonie. N. 11. Roma, 1928. 8°, pp. 1–294.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 maggio 1931 (anno IX)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *A proposito delle Note dei sig.ri Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali.* Nota[1] del Socio T. Levi-Civita.

Mi astengo doverosamente dall'intervenire nella polemica, che si è svolta anche in questi « Rendiconti » fra i due egregi colleghi Hatzidakis[2] e Sakellariou[3] a proposito di un particolare problema sui moti centrali, posto e trattato da quest'ultimo. Credo tuttavia opportuno, dato l'interesse, che sempre suscita l'argomento nei cultori della meccanica classica, di riassumere nelle linee che seguono la ricerca del prof. Sakellariou, tenendo conto delle osservazioni critiche del prof. Hatzidakis.

Sia P un punto mobile di massa unitaria. Suppongasi che la forza (totale) che lo sollecita abbia la linea d'azione che passa costantemente per un punto fisso O (forza centrale, in senso puramente geometrico).

Siano $r = OP$; v il valore assoluto della velocità di P; φ la componente radiale della forza (designata con $-\Delta$ nelle ricordate Note dei signori Sakellariou e Hatzidakis).

Il moto di P è necessariamente piano e ammette l'integrale delle aree, che si scrive

$$r^2\dot{\theta} = c \qquad (c \text{ costante}), \tag{1}$$

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.
(2) Cfr. la Nota immediatamente precedente.
(3) Vol. XII, 1930, pp. 514-518.

dove θ designa l'anomalia del punto P (nel piano del moto) e $\cdot$ la derivata rapporto al tempo.

Facciamo intervenire ulteriormente l'equazione della traiettoria in coordinate polari

$$r = r(\theta). \tag{2}$$

Combinandola colla (1) e colle equazioni del movimento se ne ricava notoriamente [1] l'equazione di Binet

$$-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)=\varphi. \tag{3}$$

D'altra parte sussiste l'equazione della forza viva

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right)=\varphi\,dr; \tag{4}$$

e non è forse superfluo il rilevare che dalle (1), (3), (4) si può materialmente risalire alle equazioni differenziali newtoniane del moto.

Supponiamo in particolare che la traiettoria del movimento sia una conica di parametro p, con un fuoco in O. Si ha

$$\frac{1}{r}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}=\frac{1}{p}, \tag{5}$$

e, per conseguenza, ponendo

$$\frac{c^2}{p}=k, \tag{6}$$

l'equazione del Binet diviene

$$-\frac{k}{r^2}=\varphi, \tag{7}$$

valida, ben si intende, in ogni punto della traiettoria, in quanto si è fatta l'ipotesi che si tratti di una conica.

Ciò posto, domandiamoci col sig. Sakellariou se la componente radiale φ (sulla cui natura non è stata fatta alcuna ipotesi) può dipendere da r e da v, in modo tale che la (7) risulti soddisfatta lungo un'orbita. In tal caso, deri-

(1) Veggasi ad es. Levi-Civita e Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, p. 145 (della seconda edizione).

vando la (7) rispetto a t, si riconosce che dovrà (pure lungo l'orbita) sussistere l'equazione

$$\frac{d}{dt}(\varphi r^2) = 0,$$

cioè

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\dot{v}\right) + 2r\dot{r}\varphi = 0.$$

Ma dalla (4), dividendo per dt, si ha

$$\dot{v} = \frac{\varphi}{v}\dot{r}.$$

Sussiste pertanto l'identità

$$\frac{d}{dt}(\varphi r^2) = r^2\dot{r}\Omega(\varphi) \tag{8}$$

dove si è introdotto, per brevità di scrittura, l'operatore differenziale

$$\Omega(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + 2\frac{\varphi}{r}. \tag{9}$$

Consideriamo dapprima il caso generale in cui la conica traiettoria *non* si riduce ad una circonferenza. Allora nè $\dot{r}$ (nè r) si annullano per tutti i valori di t, e si desume dalla (8), riferendosi a un valore di t, nell'intorno del quale $r\dot{r} \neq 0$, che $\varphi(r, v)$ deve verificare l'equazione del signor Sakellariou

$$\Omega(\varphi) = 0. \tag{10}$$

Per verità, tale conclusione concerne unicamente i punti della conica, di cui si tratta. Ma se si esige che sia traiettoria anche ogni altra conica, con un fuoco in O (o almeno una famiglia ∞^1 di tali coniche), si è effettivamente in diritto di affermare che l'equazione (10) deve essere verificata come equazione alle derivate parziali. Si trova dunque *come condizione necessaria la forma di* φ *corrispondente all'integrale generale della* (10)[1]. Ciò vale anche nel caso provvisoriamente escluso di orbite circolari. Infatti, per tali orbite, v è costante, in virtù dell'integrale (1) delle aree. Lo è allora anche $\varphi(r, v)$, e si può ben riguardare tale costante come subordinata da un generico integrale della (10).

(1) La forma esplicita di tale integrale generale si trova a p. 515 della citata Nota del sig. Sakellariou.

Supponiamo reciprocamente che $\varphi(r, v)$ *sia una soluzione della* (10). Consideriamo uno qualunque dei movimenti, descritti dal punto P sotto l'azione di una forza, avente PO per linea d'azione, e la detta $\varphi(r, v)$ per componente radiale.

Sussiste la (4); e, d'altra parte, è pur verificata l'equazione (6), perchè il suo secondo membro non è che una trasformata del primo mediante la (4). Ne viene (lasciando qui ancora per un momento da parte il caso di $r = 0$, cioè di una traiettoria circolare) che si deve avere per tutta la durata del movimento

$$\frac{d(\varphi r^2)}{dt} = 0,$$

ossia

$$\varphi r^2 = -k, \tag{7'}$$

la costante k potendo variare da una traiettoria ad un'altra. Ciò vale anche per le eventuali traiettorie circolari, in quanto sopra queste non solo r, ma, per la legge delle aree, anche v si mantiene costante, e con esse $\varphi(r, v)$.

Rimane così acquisito che lungo lo generica traiettoria presa in considerazione, la componente radiale $\varphi(r, v)$ della forza (centrale) varia come se avesse una espressione della forma $-\frac{k}{r^2}$. E *questo implica che la traiettoria descritta sia veramente una conica.* Per convincersene basta osservare che l'equazione generale (3) di Binet, tenendo conto delle (7') e (6), si scrive

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{p}$$

il cui integrale generale

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta - \theta_0) \qquad (e \text{ e } \theta_0 \text{ costanti})$$

rappresenta sempre una conica.

Chimica. — *Ditiocarbammati e nitroso-ditiocarbammati di ferro.* Nota del Corrisp. L. Cambi e A. Cagnasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Estensione alle equazioni integrali lineari singolari dei teoremi di Hilbert-Schmidt e di Picard* [1]. Nota di C. Miranda, presentata [2] dal Corrisp. G. Scorza.

È noto che ipotesi fondamentale della ordinaria teoria delle equazioni integrali lineari di Fredholm è questa: detto $K(P, Q)$ il nucleo della equazione e T il dominio di integrazione, gli integrali:

$$\int_T K(P, Q)^2 \, dT(Q) \qquad \text{e} \qquad \int_T K(Q, P)^2 \, dT(Q)$$

sono funzioni finite e continue del punto P in T.

Lo sviluppo della teoria in ipotesi più larghe è appena all'inizio. Un primo gruppo di risultati è stato ottenuto da Hilb, Weyl, Plancherel ed altri con l'ausilio della teoria delle forme quadratiche ad infinite variabili nell'ipotesi di simmetria del nucleo. Successivamente Carleman in una importante Memoria [3] è riuscito, con metodo diretto, a fare una completa trattazione delle equazioni integrali singolari a nucleo simmetrico, nella sola ipotesi che

$$\int_T K(P, Q)^2 \, dT(Q)$$

sia una funzione continua di P nel dominio T privato dei punti di un insieme N chiuso e di misura nulla.

La difficoltà principale da superare in queste ricerche proviene dal fatto che lo spettro può anche non essere discreto. Il Carleman ha brillantemente superato tale difficoltà sostituendo le serie classiche della teoria ordinaria con integrali di Stieltjes, per i quali la variabile di integrazione è il parametro λ.

In un lavoro, che ho intrapreso per suggerimento del prof. Picone, ho trattato con le idee di Carleman la teoria di Schmidt [4] delle equazioni

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(3) T. Carleman, *Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique.* Upsala, A.-B. Lundequistska Bokhandeln.

(4) Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen.* 1. Teil, 3. e 4. Kapitel, « Mathematische Annalen », 63. Bd., 4 Heft (1906).

integrali singolari associate a nucleo qualsivoglia, pervenendo altresì ad una estensione del criterio di Picard [1] per la risolubilità delle equazioni integrali lineari di prima specie.

In questa breve Nota do notizia dei risultati da me ottenuti, riserbando ad un più ampio scritto la loro organica trattazione.

1. – Funzioni spettrali.

Sia $K(P, Q)$ una funzione reale e misurabile dei 2 punti P e Q, definita per P e Q variabili, indipendentemente l'uno dall'altro, in un dominio limitato e misurabile T. Supponiamo inoltre che, prescindendo al più dai punti P di un insieme chiuso N di misura nulla, esistano sempre gli integrali

$$K(P)^2 = \int_T K(P, Q)^2 \, dT(Q) \qquad \text{e} \qquad K'(P)^2 = \int_T K(Q, P)^2 \, dT(Q)$$

e che per ogni punto P di $T - N$ risulti:

$$\lim_{P' \to P} \int (K(P, Q) - K(P', Q))^2 \, dT(Q) = 0$$

$$\lim_{P' \to P} \int (K(Q, P) - K(Q, P'))^2 \, dT(Q) = 0$$

Ciò porta che le funzioni $K(P)^2$ e $K'(P)^2$ sono finite e continue in ogni punto di $T - N$. Se allora

$$T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots$$

è una successione di domini misurabili invadenti $T - N$, posto:

$$K_n(P, Q) \begin{cases} = 0 & \text{se } P < T - T_n \text{ oppure } Q < T - T_n \\ = K(P, Q) & \text{se } P < T_n \text{ e } Q < T_n \end{cases}$$

possiamo asserire che a questi nuclei è applicabile la ordinaria teoria delle equazioni integrali. Esisteranno quindi per ogni n una successione di numeri reali e positivi

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \cdots, \lambda_k^{(n)}$$

e due successioni di funzioni ortogonali e normalizzate

$$\Phi_1^{(n)}(P), \Phi_2^{(n)}(P), \cdots, \Phi_k^{(n)}(P), \cdots$$

$$\Psi_1^{(n)}(P), \Psi_2^{(n)}(P), \cdots, \Psi_k^{(n)}(P), \cdots$$

(1) Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », vol. 29 (1910).

tali da risultare

$$\begin{cases} \Phi_k^{(n)}(P) = \lambda_k^{(n)} \int_T K_n(P, Q)\, \Psi_k^{(n)}(Q)\, dT(Q) \\ \Psi_k^{(n)}(P) = \lambda_k^{(n)} \int_T K_n(Q, P)\, \Phi_k^{(n)}(Q)\, dT(Q). \end{cases}$$

Poniamo:

$$\theta_n(P, Q|\lambda) \begin{cases} = 0 & \lambda = 0 \\ = \sum_{\lambda_k^{(n)} < \lambda} \Phi_k^{(n)}(P)\, \Psi_k^{(n)}(Q) & \lambda > 0 \end{cases}$$

$$\tau_n^{(1)}(P, Q|\lambda) \begin{cases} = 0 & \lambda = 0 \\ = \sum_{\lambda_k^{(n)} < \lambda} \Phi_k^{(n)}(P)\, \Phi_k^{(n)}(Q) & \lambda > 0 \end{cases}$$

$$\tau_n^{(2)}(P, Q|\lambda) = \begin{cases} = 0 & \lambda = 0 \\ = \sum_{\lambda_k^{(n)} < \lambda} \Psi_k^{(n)}(P)\, \Psi_k^{(n)}(Q) & \lambda > 0 \end{cases}$$

Si può far vedere che dagli aggregati $[\theta_n], [\tau_n^{(1)}], [\tau_n^{(2)}]$ si possono estrarre tre successioni convergenti, uniformemente in ogni dominio interno a $T - N$, verso tre funzioni $\theta(P, Q|\lambda)$, $\tau^{(1)}(P, Q|\lambda)$, $\tau^{(2)}(P, Q|\lambda)$ parzialmente a quadrato integrabile rispetto a P e Q e a variazione limitata rispetto a λ. Le funzioni $\theta(P, Q|\lambda)$, $\tau^{(1)}(P, Q|\lambda)$ e $\tau^{(2)}(P, Q|\lambda)$ si chiamano le funzioni spettrali del nucleo $K(P, Q)$.

2. – Estensione dei teoremi di Hilbert-Schmidt.

I seguenti teoremi sono la naturale estensione dei classici teoremi di Hilbert–Schmidt:

I. *Se* $g(P)$ *e* $h(P)$ *sono due funzioni di quadrato sommabile e se inoltre esiste l'integrale*

$$\int_T |g(P)|\, K(P)\, dT(P),$$

si ha:

$$\int_T \int_T K(P, Q)\, g(P)\, h(Q)\, dT(P)\, dT(Q) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\, d_\lambda \int_T \int_T \theta(P, Q|\lambda)\, g(P)\, h(Q)\, dT(P)\, dT(Q).$$

II. *Se* $h(P)$ *è una funzione di quadrato sommabile si ha:*

$$\int K(P, Q)\, h(Q)\, dT(Q) = \int_0^\infty \frac{I}{\lambda}\, d_\lambda \int_T \theta(P, Q|\lambda)\, h(Q)\, dT(Q).$$

III. *Per ogni fissato punto* P_0 *di* T *l'integrale*

$$\int_\varrho^l \frac{I}{\lambda}\, d_\lambda\, \theta(P_0, Q|\lambda),$$

considerato come funzione di Q *converge in media, per*

$$\varrho \to 0 \qquad ed \qquad l \to \infty,$$

verso $K(P_0, Q)$.

Se ora indichiamo con

$$\varphi_1(P), \cdots \quad , \quad \cdots, \varphi_n(P), \cdots$$

un sistema ortogonale e normalizzato di funzioni soddisfacenti alla equazione:

$$\int_T K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dT(Q) = 0$$

tale che ogni altra soluzione, di quadrato sommabile, di questa equazione possa essere approssimata in media mediante combinazioni lineari delle $\varphi_n(P)$, si ha:

IV. *Se* $h(P)$ *è una funzione di quadrato sommabile, esistono delle costanti* c_k *tali che la funzione*

$$\sum_1^N{}_k c_k\, \varphi_k(P) + \int_0^l d_\lambda \int_T \tau^{(2)}(P, Q|\lambda)\, h(Q)\, dT(Q)$$

converge in media verso $h(P)$ *quando* N *ed* l *divergono.*

3. – Estensione del criterio di Picard.

Applicando il teorema IV si giunge al seguente relativo alla equazione integrale lineare di prima specie:

V. *Se il nucleo* $K(P, Q)$ *è chiuso e se* $f(P)$ *è una funzione di quadrato sommabile, condizione sufficiente affinchè esista una soluzione di quadrato sommabile della equazione:*

$$f(P) = \int_T K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dT(Q)$$

è che converga l'integrale di Styeltjes

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 \, d_\lambda \iint_T \tau^{(1)}(P, Q \mid \lambda) \, f(P) \, f(Q) \, dT(P) \, dT(Q) .$$

Se tale condizione è soddisfatta, la detta soluzione è il limite in media per $l \to \infty$ *di:*

$$\varphi_l(P) = \int_0^{l} \lambda \, d_\lambda \int_T \theta(R, P \mid \lambda) \, f(R) \, dT(R) .$$

Questa condizione è poi anche necessaria, quando si faccia la ulteriore ipotesi di poter invertire l'ordine di integrazione nello integrale doppio:

$$\int_T \int_T K(P, Q) \, g(P) \, h(Q) \, dT(P) \, dT(Q)$$

ogni qual volta $g(P)$ *e* $h(P)$ *sono di quadrato sommabile.*

Nel caso che il nucleo sia simmetrico questo teorema è ancora valido, purchè si tenga conto che le tre funzioni spettrali si riducano ad una sola, simmetrica e definita anche per λ negativo, in modo che gli integrali di Stieltjes che compaiono nell'enunciato vanno presi, secondo il caso, o tra $-\infty$ e $+\infty$ o tra $-l$ ed l.

4. – Applicazione.

Di questo ultimo teorema si può fare una applicazione, prendendo in considerazione il nucleo

$$e^{-|x-y|} \quad , \quad -\infty \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqq +\infty$$

che è simmetrico e chiuso e la cui funzione spettrale è definita da[1]

$$\theta(x, y \mid \lambda) = 0 \quad , \quad \lambda < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}[\theta(x, y \mid \lambda + 0) + \theta(x, y \mid \lambda - 0)] = \frac{\operatorname{sen}(x-y)\sqrt{2\lambda - 1}}{\pi(x-y)} .$$

Se $g(x)$ e $h(x)$ sono due funzioni di quadrato sommabile nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \, h(y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \, dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \, g(x) \, dx$$

(1) Cfr. Carleman, loc. cit., cap. V.

onde possiamo dire:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia risolubile la equazione integrale lineare di prima specie:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x-y|} \varphi(y)\, dy$$

e che converga l'integrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \lambda^2\, d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-y)\sqrt{2\lambda-1}}{\pi(x-y)} f(x) f(y)\, dx\, dy .$$

Poichè Carleman ha dimostrato[1] che, se $f(x)$ è del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x-y|} \varphi(y)\, dy$$

l'integrale di Fourier di $f(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos \alpha x \, \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{\operatorname{sen} \alpha s}{s}\, ds + \operatorname{sen} \alpha s \, \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{\cos \alpha s}{s}\, ds \right] d\alpha$$

converge e rappresenta $f(x)$ possiamo dire:

Condizione sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ di quadrato sommabile sia rappresentabile dal suo integrale di Fourier e che converga l'integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \lambda^2\, d_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-y)\sqrt{2\lambda-1}}{\pi(x-y)} f(x) f(y)\, dx\, dy .$$

(1) Cfr. CARLEMAN, loc. cit., cap. V.

Matematica. — *Sulla flessione delle superficie.* Nota di C. Rimini, presentata[1] dal Corrisp. P. Burgatti.

1. Se P, P_1 è una coppia generica di punti corrispondenti di due superficie S ed S_1, fra loro applicabili, la uguaglianza:

$$(1) \qquad dP_1^2 = dP^2$$

mostra che le relazioni

$$(2) \qquad dP_1 = \beta dP \quad , \quad \boldsymbol{n}_1 = \beta \boldsymbol{n}$$

(dove $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1$ indicano vettori unitari normali in P e P_1 ad S ed S_1 rispettivamente) sono compatibili e definiscono una isomeria β dello spazio ambiente, manifestamente funzione di P.

Differenziando la relazione

$$K\beta \cdot \beta = 1$$

caratteristica delle isomerie, ricordando che gli operatori K e d sono invertibili, e che, in virtù della relazione stessa, β^{-1} coincide con $K\beta$, si ottiene:

$$\beta^{-1} d\beta = -K(\beta^{-1} d\beta).$$

Ne segue che $\beta^{-1} d\beta$ è assiale. Detto $\boldsymbol{u}$ il suo asse, si ha la prima delle due relazioni:

$$(3) \qquad d\beta = \beta \cdot \boldsymbol{u} \bigwedge \quad , \quad \delta\beta = \beta \cdot \boldsymbol{v} \bigwedge,$$

la seconda delle quali si riferisce ad un altro differenziale qualunque δ, indipendente da d.

In esse $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ rappresentano vettori infinitesimi, che diciamo essere tangenziali.

Invero, differenziando (con d) la

$$\beta \delta P = \delta P_1$$

e tenendo presente la prima delle (3), si ha:

$$\beta(\boldsymbol{u} \bigwedge \delta P) = d\delta P_1 - \beta d\delta P.$$

Di qui, operando a sinistra con β^{-1} (che esiste) e moltiplicando ($\times$) per dP, si ottiene:

$$\boldsymbol{u} \bigwedge \delta P \times dP = \beta^{-1} d\delta P_1 \times dP - d\delta P \times dP = d\delta P_1 \times \beta dP - \\ - d\delta P \times dP = d\delta P_1 \times dP_1 - d\delta P \times dP.$$

(1) Nella seduta del 17 maggio 1931.

L'ultimo membro è nullo, come si riconosce differenziando la (1) e ricordando che i simboli d e δ sono commutabili, quindi l'asserto è dimostrato.

Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sono gli assi delle assiali $\beta^{-1} d\beta$, $\beta^{-1}\delta\beta$ pertinenti agli spostamenti $d\mathrm{P}$, $\delta\mathrm{P}$, sarà manifestamente $\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{v}$ l'asse relativo allo spostamento $d\mathrm{P} + m\delta\mathrm{P}$, qualunque sia m, eventualmente funzione di P; e ciò dimostra la esistenza di una omografia α (operante parallelamente al piano tangente ad S), funzione di P, tale che:

$$\boldsymbol{u} = \alpha d\mathrm{P} \qquad , \qquad \boldsymbol{v} = \alpha\delta\mathrm{P} .$$

Tale α, che dipende solo dalla flessione considerata, la chiameremo *l'omografia della data flessione.*

2. Sorge ora naturale la domanda: data una omografia α, funzione del punto P variabile su una data S, può essa considerarsi la omografia di una particolare flessione di S?

In generale ciò non è, ed anzi vogliamo stabilire le condizioni caratteristiche cui soddisfano le α considerate.

In primo luogo, si osservi che, differenziando la prima delle (3) con δ e la seconda con d, e confrontando i risultati, tenendo conto delle (3) stesse, otteniamo:

$$\beta \cdot (d\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{u}) \bigwedge = \beta \cdot \boldsymbol{v} \bigwedge \cdot \boldsymbol{u} \bigwedge - \beta \cdot \boldsymbol{u} \bigwedge \cdot \boldsymbol{v} \bigwedge ,$$

da cui, operando a sinistra con β^{-1}:

$$(d\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{u}) \bigwedge = \boldsymbol{v} \bigwedge \cdot \boldsymbol{u} \bigwedge - \boldsymbol{u} \bigwedge \cdot \boldsymbol{v} \bigwedge = (\boldsymbol{v} \bigwedge \boldsymbol{u}) \bigwedge ,$$

cioè:

$$d\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \bigwedge \boldsymbol{u},$$

che, mettendo in evidenza la omografia α, si scriverà

$$(4) \qquad d(\alpha\delta\mathrm{P}) - \delta(\alpha d\mathrm{P}) = \alpha\delta\mathrm{P} \bigwedge \alpha d\mathrm{P}$$

od anche:

$$(4') \qquad d(\alpha\delta\mathrm{P}) - \delta(\alpha d\mathrm{P}) = \mathrm{I}_2\,\alpha \cdot \delta\mathrm{P} \bigwedge d\mathrm{P} \ (1).$$

(1) Introducendo il simbolo di differenziale superficiale (definito in *Geometria differenziale* di Burgatti, Boggio, Burali-Forti, parte II, cap. 2° e 3°) dalla (4) si deduce

$$d_v(\alpha\delta\mathrm{P}) = \delta_v(\alpha d\mathrm{P}) \qquad \text{da cui} \qquad d_v\,\alpha \cdot \delta\mathrm{P} = \delta_v\,\alpha \cdot d\mathrm{P},$$

che alla sua volta può scriversi:

$$(4'') \qquad (\mathrm{k} - 1)\frac{d_v\,\alpha}{d\mathrm{P}} = 0.$$

È però da notarsi che questa equazione non è equivalente alla (4), giacchè dalla (4'') si deduce soltanto essere il primo membro di (4) un vettore normale ad S, mentre la (4) ne precisa il valore.

È questa dunque una prima condizione (differenziale) cui necessariamente deve soddisfare la omografia di flessione α.

Ma ad un'altra condizione importante, e questa di tipo finito, soddisfa la omografia α, ed è quella di avere nullo l'invariante primo:

$$\mathrm{I}_1 \alpha = 0, \tag{5}$$

o, il che equivale, di essere *una involuzione*.

Infatti, differenziando la seconda delle (2) e tenendo conto delle (3) si ha:

$$d\boldsymbol{n}_1 = \beta d\boldsymbol{n} - \beta (\boldsymbol{n} \wedge \alpha d\mathrm{P}),$$

da cui, introducendo le dilatazioni fondamentali $\sigma = \frac{d\boldsymbol{n}}{d\mathrm{P}}$, $\sigma_1 = \frac{d\boldsymbol{n}_1}{d\mathrm{P}_1}$ delle due superficie (con che scriveremo $\sigma_1 d\mathrm{P}_1 = \sigma_1 \beta d\mathrm{P}$ e $\sigma d\mathrm{P}$ al posto di $d\boldsymbol{n}_1$ e $d\boldsymbol{n}$ rispettivamente) ed operando poi a sinistra con β^{-1}, si deduce:

$$\beta^{-1} \sigma_1 \beta = \sigma - \boldsymbol{n} \wedge \alpha. \tag{6}$$

Siccome l'omografia $\beta^{-1} \sigma_1 \beta$ non è che il risultato del trasporto (secondo β) sul piano tangente ad S della dilatazione σ_1 (del piano tangente ad S_1), essa è evidentemente una dilatazione operante, come σ, tangenzialmente ad S. Quindi $\boldsymbol{n} \wedge \alpha$, differenza di due dilatazioni, è pure dilatazione. Allora, detti $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ due vettori (tangenziali) tali che $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{n}$ sia terna unitaria ortogonale positiva, si ha:

$$(\boldsymbol{n} \wedge \alpha)\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{n} \wedge \alpha)\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i},$$

da cui, per essere $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$, si trae la (5).

Dalla identità fondamentale:

$$\alpha^2 - \mathrm{I}_1 \alpha \cdot \alpha + \mathrm{I}_2 \alpha = 0$$

segue poi che α^2 è una omotetia, e pertanto α opera involutoriamente fra le direzioni del piano tangente [1], [2].

3. Ora, è importante stabilire che le condizioni (4) e (5), necessariamente soddisfatte dalla α, sono altresì sufficienti, cioè:

Data una omografia bidimensionale α, *soddisfacente, su una data* S, *alle* (4) *e* (5), *esiste una sola superficie* S_1 (perfettamente determinata a meno di

(1) In particolare si può asserire che esiste sempre una coppia di direzioni $d\mathrm{P}, \delta\mathrm{P}$ fra loro ortogonali tali che

$$\boldsymbol{u} = \alpha d\mathrm{P} = p\, \delta\mathrm{P} \qquad , \qquad \boldsymbol{v} = \alpha \delta\mathrm{P} = q\, d\mathrm{P},$$

essendo p, q convenienti funzioni numeriche di P. Potranno chiamarsi le *direzioni principali* della data flessione.

(2) Escluderemo che sia $\alpha = 0$, perchè ciò corrisponderebbe al caso (banale) in cui la flessione si riduce ad un movimento rigido.

movimenti rigidi) *applicabile su* S *in guisa che* α *sia la relativa omografia di flessione.*

Invero, soddisfatta la (4), la (3) risulta illimitatamente integrabile, esiste cioè una (sola) omografia β (dello spazio ambiente) che, soddisfacendo alla (3) su S, coincide, in un dato punto P_0 di essa, con una omografia propria β_0 arbitrariamente data. Più precisamente, se $\bar{\beta}$ è l'integrale particolare di (3) tale che $\beta(P_0) = 1$, sarà $\beta = \beta_0 \bar{\beta}$.

Siccome poi dalla (3) stessa si deduce che $\beta^{-1} d\beta$ è assiale, si avrà:

$$\beta^{-1} d\beta + K(\beta^{-1} d\beta) = 0$$

da cui:

$$d(\beta \cdot K\beta) = 0,$$

quindi $\beta \cdot K\beta = \beta_0 \cdot K\beta_0$. Segue che, scelta per β_0 una qualunque isomeria (per es. ad invariante terzo unitario), la β sarà dovunque isomeria (con $I_3 \beta = 1$).

Determinata così la β, consideriamo la differenza:

$$d\beta \cdot \delta P - \delta\beta \cdot dP.$$

Sostituendo a $d\beta$, $\delta\beta$ le loro espressioni (3), dove scriveremo αdP, $\alpha \delta P$ in luogo di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, essa si trasforma in:

$$\beta(\alpha dP \wedge \delta P + dP \wedge \alpha \delta P);$$

il vettore entro parentesi vale:

$$(\alpha dP \wedge \delta P \times \boldsymbol{n} + dP \wedge \alpha \delta P \times \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n} = dP \wedge \delta P \times \boldsymbol{n} \cdot I_1 \alpha \cdot \boldsymbol{n};$$

quindi è nullo, per la (5), e pertanto quella differenza è nulla pure. Da ciò segue:

$$d(\beta \delta P) = \delta(\beta dP),$$

il che significa che βdP è differenziale esatto su S.

Si può dunque determinare (con una quadratura) un vettore $\boldsymbol{w}(P) = P_1 - O$ (O essendo punto arbitrario) tale che $d\boldsymbol{w} = \beta dP$.

Il luogo di P_1 è appunto la cercata superficie S_1. Questa infatti risulta applicabile su S in guisa che l'omografia di flessione relativa sia appunto la data α. Essa è poi perfettamente determinata a meno di moti rigidi (isomeria iniziale β_0 che affetta a sinistra l'espressione di $\boldsymbol{w}$, e traslazione rappresentata dall'arbitrarietà di O), e pertanto il teorema è dimostrato.

4. Di questo teorema, che riduce lo studio delle flessioni di una data S a quello degli *integrali involutori* della (4), vogliamo qui fare una semplice applicazione.

Osserviamo che se, in un punto di S, è $I_2\alpha = 0$, ivi la omografia α si riduce ad una diade $H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, in cui, per la (5), deve aversi $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$. Supposto, come sempre si può, $\boldsymbol{a}^2 = 1$, la α sarà definita da:

$$(7) \qquad \alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad , \quad \alpha\boldsymbol{b} = 0.$$

In tal caso, dalla (6), indicando per semplicità con $\bar{\sigma}$ la dilatazione a primo membro, si ha:

$$\bar{\sigma}\boldsymbol{a} = \sigma\boldsymbol{a} - \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b} \quad , \quad \bar{\sigma}\boldsymbol{b} = \sigma\boldsymbol{b} \quad (\bar{\sigma} = \beta^{-1}\sigma_1\beta).$$

Moltiplicando ($\wedge$) membro a membro ed osservando che, pel teorema di Gauss, si ha $\bar{\sigma}\boldsymbol{a} \wedge \bar{\sigma}\boldsymbol{b} = \sigma\boldsymbol{a} \wedge \sigma\boldsymbol{b}$ [1], si ottiene

$$\sigma\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b}) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \sigma\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 0;$$

la direzione $\boldsymbol{b}$ è dunque autoconiugata, quindi:

Dovunque la omografia α è degenere, ivi la sua direzione nulla è tangente ad una assintotica della superficie S.

In particolare:

L'omografia di flessione di una superficie a curvatura positiva è sempre propria.

Se $I_2\alpha$ non ha segno costante, la linea di separazione (linea $I_2\alpha = 0$) fra le regioni di S *corrispondenti agli opposti segni di $I_2\alpha$ è una assintotica.*

Se $I_2\alpha$ è sempre nullo, la direzione nulla $\boldsymbol{b}$ di α sarà una certa funzione di P, che caratterizza, sulla superficie, una famiglia di linee (Ω) (integrali dell'equazione $d\mathrm{P} \wedge \boldsymbol{b} = 0$), che, per quanto precede, coincide con uno dei sistemi di assintotiche. Indicando con d e δ differenziali presi lungo (Ω) e normalmente ad (Ω), la seconda delle (7) porge $\alpha d\mathrm{P} = 0$, dopo di che dalla (8) si deduce $d(\alpha\delta\mathrm{P}) = 0$, il che significa essere $\alpha\delta\mathrm{P}$ costante lungo ogni linea (Ω). D'altra parte, per la prima delle (7), $\alpha\delta\mathrm{P}$ è parallelo alla direzione nulla di α, cioè a quella della tangente ad (Ω).

(1) Invero, detti $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_1$ i valori in P e P_1 delle curvature totali delle due superficie, necessariamente uguali in causa dell'applicabilità, si ha notoriamente:

$$\mathcal{K} = \frac{\sigma\boldsymbol{a} \wedge \sigma\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}} \quad , \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\sigma_1\boldsymbol{a}_1 \wedge \sigma_1\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{n}_1},$$

dove $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1$ indicano vettori arbitrari, tangenti ad S ed S_1 rispettivamente. Se si assume $\boldsymbol{a}_1 = \beta\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_1 = \beta\boldsymbol{b}$, si ha:

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\sigma_1\beta\boldsymbol{a} \wedge \sigma_1\beta\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}_1}{\beta\boldsymbol{a} \wedge \beta\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}_1} = \frac{\beta^{-1}\sigma_1\beta\boldsymbol{a} \wedge \beta^{-1}\sigma_1\beta\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}} = \frac{\bar{\sigma}\boldsymbol{a} \wedge \bar{\sigma}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}};$$

per cui dall'uguaglianza $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ segue che, essendo i due vettori $\bar{\sigma}\boldsymbol{a} \wedge \bar{\sigma}\boldsymbol{b}$ e $\sigma\boldsymbol{a} \wedge \sigma\boldsymbol{b}$ paralleli ad $\boldsymbol{n}$, essi sono uguali.

Ne segue che tale tangente ha direzione costante, e pertanto le (Σ) sono rette.

Al modo stesso si prova che sono rette le linee corrispondenti su S_1, quindi le due date superficie sono delle rigate, e la flessione supposta ha luogo con conservazione delle rette [1].

Siccome poi, per la prima delle (3), è $d\beta = 0$, la isomeria β risulta costante lungo ogni generatrice. Pertanto si può precisare, in primo luogo, che, portati a coincidere due punti P, P_1, ed i rispettivi intorni dP e dP_1 (fatto cioè $\beta(P) = 1$), tale coincidenza si verifica lungo tutta la generatrice passante per P. In secondo luogo poi, la data flessione si può effettuare facendo *rotolare* le due superficie l'una sull'altra in guisa da far coincidere le successive generatrici. Ciò risulta osservando che la rotazione infinitesima $1 + \delta\beta$ capace di addurre alla sovrapposizione degli intorni di $P + \delta P$ e $P_1 + \delta P_1$, realizza, a causa delle sua costanza lungo la generatrice, la analoga sovrapposizione degli intorni di tutti i punti di questa.

5. Come è stato osservato al n. 2 (nota (1) p. 726), dalla equazione fondamentale (4) si deduce l'altra:

$$(4'') \qquad (k - 1)\frac{d_v \alpha}{dP} = 0$$

la quale per altro non è a quella equivalente.

Ora, è utile osservare che, ad onta della analogia formale fra la (4'') e la nota condizione di integrabilità di αdP, non è lecito concludere per la *integrabilità superficiale* di tal vettore αdP, cioè per la esistenza di un vettore tangenziale $\boldsymbol{w}$, funzione di P, tale che

$$d_v \boldsymbol{w} = \alpha dP.$$

Anzi, possiamo verificare che tale circostanza non può presentarsi se non nel caso in cui S ha nulla la curvatura totale $\mathcal{K}$, giacchè dalla (4''), che equivale a

$$d_v \delta_v \boldsymbol{w} = \delta_v d_v \boldsymbol{w},$$

segue $\mathcal{R} dP \delta P \boldsymbol{w} = 0$ essendo $\mathcal{R}$ la omografia di Riemann della S; quindi, assumendo dP parallelo a $\boldsymbol{w}$:

$$\mathcal{R} dP \delta P dP \times \delta P = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \mathcal{K} = 0.$$

Questo risultato può confermarsi ed anzi precisarsi ricorrendo alla (5), la quale in questo caso si scrive così:

$$d_v \boldsymbol{w} \wedge dP = \delta_v \boldsymbol{w} \wedge dP;$$

(1) Non può quindi trattarsi di rigate qualunque (cfr. Libro citato, cap. IV, n. 4).

oppure (per essere, come è noto, $d_v\,\delta P = \delta_v\,dP$):

$$d_v\,(\boldsymbol{w} \wedge \delta P) = \delta_v\,(\boldsymbol{w} \wedge dP).$$

Da questa segue che, lungo le linee (Ł) definite da $\boldsymbol{w} \wedge dP = 0$, la normale $\boldsymbol{n}$, manifestamente parallela al vettore $\boldsymbol{w} \wedge \delta P$, si serba costante [1]; quindi la superficie S, se non è un piano, è una rigata di cui le (Ł) sono le generatrici. Ma, poichè lungo queste non varia $\boldsymbol{n}$, si tratta certamente di una sviluppabile, per cui in ogni caso la S è a curvatura nulla.

Matematica. — *Proprietà notevoli di funzioni continue da una parte.* Nota di T. Viola, presentata [2] dal Corrisp. G. Vitali.

In questa Nota do la dimostrazione di una proposizione molto generale sulle funzioni continue da una parte. Da essa deduco due proposizioni da me già enunciate in un articolo che ho pubblicato nel « Bollettino dell'Un. Mat. Ital. » (febbraio 1931, anno X, n. 1) sotto il titolo: *Sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale* (n. 3, *d*), *g*)), e che del resto dimostrerò anche con procedimento diverso in un lavoro in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

In una Nota successiva, poi, mi propongo di utilizzare le conclusioni della presente per dimostrare che se $F(x)$ è una funzione continua verso destra e derivabile verso destra in tutto un intervallo $a\,|\!-\!|\,b$, la funzione $D_+ F(x)$ è di prima classe di Baire in tutto $a\,|\!-\!|\,b$.

1. *Sia* P *un aggregato perfetto contenuto in un intervallo* $a\,|\!-\!|\,b$ *della scala lineare. Sia* $F(x)$ *una funzione reale definita in* $a\,|\!-\!|\,b$, *ovunque continua verso destra in* $a\,|\!-\!|\,b$. Allora $F(x)$ è continua verso destra anche in ogni punto di P, rispetto a P [3].

Sia N *l'aggregato dei punti di* P *nei quali* $F(x)$ *è discontinua (verso sinistra) rispetto a* P. *Supponiamo* N *ovunque denso in* P. *Dico che, se* $m\,|\!-\!|\,n$ *è un qualunque intervallo parziale di* $a\,|\!-\!|\,b$ *contenente punti di* P, *in* $m\,|\!-\!|\,n$ *esiste un punto* x *di* P *tale che*

$$\bar{D}_+ F(x) - D_+ F(x) = +\infty.$$

(1) Infatti, posto $\boldsymbol{w} \wedge \delta P = h\boldsymbol{n}$ e considerando che $d_v h = dh$, $d_v \boldsymbol{n} = d\boldsymbol{n}$, si ha:

$$d_v\,(\boldsymbol{w} \wedge \delta P) = dh \cdot \boldsymbol{n} + h \cdot d\boldsymbol{n}.$$

Siccome il vettore a primo membro è tangenziale, deve aversi $dh = 0$. Ne segue poi $hd\boldsymbol{n} = 0$, e quindi $d\boldsymbol{n} = 0$ perchè h non può essere nullo (essendo $\boldsymbol{w} \wedge \delta P \neq 0$).

(2) Nella seduta del 17 maggio 1931.

(3) Vedi il n. 4.

2. Indicando con x_0 un generico punto di P, definisco su P le seguenti funzioni:

$$L(x_0) = \overline{\lim_{x \to x_0 \text{ per valori di P}}} F(x) \quad (\text{« limite massimo di } F(x) \text{ su P in } x_0 \text{ »}),$$

$$l(x_0) = \underline{\lim_{x \to x_0 \text{ per valori di P}}} F(x) \quad (\text{« limite minimo di } F(x) \text{ su P in } x_0 \text{ »}),$$

$$\omega(x_0) = L(x_0) - l(x_0) \quad (\text{« oscillazione di } F(x) \text{ su P in } x_0 \text{ »}).$$

Sia a_1 un punto qualunque di N, e sia $b_1 = a_1 - \omega(a_1)$. Per ogni punto x_0 appartenente all'intervallo $I_1 \equiv b_1 \mid\!-\!\mid a_1$ è

$$\frac{L(a_1) - F(x_0)}{a_1 - x_0} - \frac{l(a_1) - F(x_0)}{a_1 - x_0} = \frac{L(a_1) - l(a_1)}{a_1 - x_0} = \frac{\omega(a_1)}{a_1 - x_0} > 1$$

e quindi, per le definizioni date delle funzioni $L(x), l(x)$, in qualsivoglia intorno di a_1 esistono coppie di punti x', x'', appartenenti a P e tali che

$$\frac{F(x') - F(x_0)}{x' - x_0} - \frac{F(x'') - F(x_0)}{x'' - x_0} > 1.$$

D'altra parte, poichè in a_1 $F(x)$ è discontinua verso sinistra rispetto a P, esistono alla sinistra di a_1 e prossimi quanto si vuole ad a_1 punti di P e quindi anche punti di N. Sia a_2 un punto di N in I_1. Proseguiamo nella scelta di punti a_r $(r = 1, 2, 3, \cdots)$ con la legge seguente. Essendosi determinato il punto a_r nell'intervallo (intorno sinistro di a_{r-1}) I_{r-1}, posto $b_r = a_r - \frac{1}{r}\omega(a_r)$ si osserverà che, per ogni punto x_0 appartenente all'intervallo $b_r \mid\!-\!\mid a_r$, si ha

$$\frac{L(a_r) - F(x_0)}{a_r - x_0} - \frac{l(a_r) - F(x_0)}{a_r - x_0} = \frac{L(a_r) - l(a_r)}{a_r - x_0} = \frac{\omega(a_r)}{a_r - x_0} > r$$

e quindi, a più forte ragione, questa disuguaglianza vale per ogni x_0 nella parte I_r comune a I_{r-1} e all'intervallo $b_r \mid\!-\!\mid a_r$. Per le definizioni date delle funzioni $L(x), l(x)$, scelto x_0 ad arbitrio in I_r, in qualsivoglia intorno di a_r esistono coppie di punti x', x'', appartenenti a P e tali che

$$\frac{F(x') - F(x_0)}{x' - x_0} - \frac{F(x'') - F(x_0)}{x'' - x_0} > r.$$

È a_{r+1} un punto di N in I_r.

La successione

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

è decrescente e tende ad un limite x_0, punto di P [1].

(1) Per regolarizzare l'arbitrarietà nella scelta dei punti a_r può utilizzarsi la numerabilità dell'aggregato N (loc. cit., n. 2).

Essendo

$$\bar{D}_+ F(x_0) - D_+ F(x_0) = \overline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \underline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \overline{\lim_{\substack{x' \to x_0 + 0 \\ x'' \to x_0 + 0}}} \left\{ \frac{F(x') - F(x_0)}{x' - x_0} - \frac{F(x'') - F(x_0)}{x'' - x_0} \right\}$$

è dunque $\bar{D}_+ F(x_0) - \underline{D}_+ F(x_0) = + \infty$.

3. L'arbitrarietà concessa nella dimostrazione alla scelta dei punti a_r assicura che i punti di P che godono della proprietà di x_0 costituiscono un aggregato ovunque denso in P, com'è appunto affermato al n. 1. In ciascuno di essi la $F(x)$ perde la derivabilità verso destra [1] ed inoltre almeno uno dei numeri derivati destri di $F(x)$ è infinito (cioè si ha o $\bar{D}_+ F(x_0) = + \infty$, oppure $\underline{D}_+ F(x_0) = - \infty$, oppure l'uno e l'altro). Si ha dunque il

Teorema. – Se $F(x)$ è ovunque derivabile verso destra in $a \mid\!-\!\mid b$, oppure se in tutto $a \mid\!-\!\mid b$ le derivate destre di $F(x)$ sono finite, allora su ogni aggregato perfetto P contenuto in $a \mid\!-\!\mid b$ è non denso l'aggregato N dei punti di P nei quali $F(x)$ è discontinua rispetto a P.

4. Le conclusioni precedenti valgono in modo identico se invece di un aggregato perfetto P si considera un aggregato chiuso C. In questo caso più generale, però, è bene osservare che la definizione della continuità rispetto all'aggregato perde significato in ogni punto isolato di C. È perciò necessario premettere una comoda estensione di tale definizione, qual'è in uso presso molti autori e che del resto già avremmo dovuto premettere al n. 1, ove si comincia a parlare della continuità verso destra su un aggregato perfetto e rispetto all'aggregato perfetto: diremo che una funzione $\varphi(x)$ definita su un aggregato chiuso C è *sempre* continua rispetto a C in tutti i punti isolati di C.

5. Si può osservare che il ragionamento del n. 2 non esclude, nel caso che l'aggregato N sia denso in P, l'esistenza di punti x_0 di P nei quali $F(x)$ è derivabile verso destra con derivata destra infinita in modo che, per successioni di punti x' ed x'' tendenti ad x_0 dalla destra, sia

$$\lim_{\substack{x' \to x_0 + 0 \\ x'' \to x_0 + 0}} \left\{ \frac{F(x') - F(x_0)}{x' - x_0} - \frac{F(x'') - F(x_0)}{x'' - x_0} \right\} = + \infty .$$

In considerazione di questa eventualità, noi intendiamo (sia nella Nota presente che in quelle che pubblicheremo in seguito) che, se $F(x)$ è derivabile verso destra in tutto un intervallo $a \mid\!-\!\mid b$, possa bensì esistere in $a \mid\!-\!\mid b$ un punto x_0 nel quale la derivata destra è infinita, ma che il rapporto incrementale tenda ad infinito « asintoticamente », cioè compiendo oscillazioni limitate.

(1) Vedi il n. 5.

Matematica. — *Trasporti rigidi di vettori sulle superficie.* Nota di Pia Nalli, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

In questa Nota si applicano alle superficie i risultati esposti in una precedente (in questi « Rendiconti ») sulle varietà ad un numero qualunque di dimensioni.

Per una varietà ad n dimensioni, in corrispondenza ad un tensore $\Gamma_{ij,h}$ emisimmetrico rispetto alla coppia (i, j) si ha un trasporto rigido ed un tensore

$$R_{pi,hk} = \Gamma_{pi,h|k} - \Gamma_{pi,k|h} - \sum_{1}^{n}{}_{q} (\Gamma_{qi,k}\,\Gamma^{q}_{p,h} - \Gamma_{qi,h}\,\Gamma^{q}_{p,k})$$

emisimmetrico rispetto alle coppie $(p, i), (h, k)$.

Per $n = 2$ la somma è nulla e rimane

$$R_{pi,hk} = \Gamma_{pi,h|k} - \Gamma_{pi,k|h}.$$

Ma intanto $\Gamma_{ij,h}$ si può sempre considerare come prodotto del tensore emisimmetrico A_{ij} per il quale $A_{12} = \sqrt{a}$ (a discriminante della forma fondamentale che caratterizza la metrica della superficie) per un vettore $\mathbf{R}$:

$$\Gamma_{ij,h} = A_{ij} R_h.$$

Così, per una superficie si ha un trasporto rigido in corrispondenza ad ogni vettore $\mathbf{R}$. (Non possiamo dire inversamente che ad ogni trasporto rigido corrisponda un vettore; ma se il trasporto è a risultato unico, cioè indipendente dalla linea lungo la quale viene effettuato, ciò è anche vero. Il più generale trasporto rigido per una varietà si avrà quando, fissata in essa una linea, viene fissato, per mezzo di una certa legge, un tensore G_{ij}, emisimmetrico, nei punti della linea, che caratterizza lungo di questa un trasporto rigido. Si rientra così nel calcolo funzionale). Essendo poi

$$A_{ij|k} = 0,$$

sarà

$$R_{pi,hk} = A_{pi} (R_{h|k} - R_{k|h}).$$

Quando $\mathbf{R} = \operatorname{grad} \Phi$ è $R_{pi,lk} = 0$: in particolare ciò accade per $\mathbf{R} = 0$, ed allora il trasporto è il parallelismo.

(1) Nella seduta del 26 aprile 1931.

Così il parallelismo diventa un caso particolare del trasporto rigido generale corrispondente al tensore

$$\Gamma_{ij,h} = A_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_h},$$

(Φ invariante arbitrario) e questo è nel piano il più generale trasporto rigido a risultato unico.

In modo analogo: tutti i trasporti rigidi corrispondenti ai vettori

$$\mathbf{R} + \operatorname{grad} \Phi$$

($\mathbf{R}$ vettore fisso, Φ invariante arbitrario) formano una *classe*; per essi $R_{pi,hk}$ ha lo stesso valore.

Una delle classi è quella dei trasporti a risultato unico: per essa $R_{pi,hk} = (pi, hk)$. Essa si ha quando il vettore $\mathbf{R}$ soddisfa alla condizione

$$\sqrt{a}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_1}\right) = (12, 12),$$

ossia, essendo $(12, 12) = aK$ (K curvatura)

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_1} = \sqrt{a}K. \tag{1}$$

Siano due trasporti rigidi corrispondenti ai due vettori $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$. Applichiamoli lungo una linea L partendo da un punto A con un medesimo vettore unitario: avremo in ogni punto della linea due vettori unitarî $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Sia α l'angolo da essi formato in un punto P: dimostreremo che

$$\alpha = \int_{AP} R_1\, dx_1 + R_2\, dx_2 - \int_{AP} S_1\, dx + S_2\, dx_2. \tag{2}$$

Per semplificare la dimostrazione, fissiamo coordinate geodetiche lungo la linea in modo che nei suoi punti, per il tensore fondamentale, si abbia $a_{ij} = \delta^i_j$.

Allora, le equazioni differenziali del primo trasporto, che in coordinate generiche sono

$$dv^i + \sum_{hk}^{1\,2} \left[\begin{Bmatrix} h\,k \\ i \end{Bmatrix} + \Gamma^i_{h,k} \right] v^h\, dx_k = 0,$$

dove

$$\Gamma^i_{h,k} = \sum_{r}^{1\,2} a^{ri}\, \Gamma_{rh,k},$$

(per la speciale scelta delle coordinate, risultando

$$\begin{Bmatrix} h\,k \\ i \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \Gamma^{i}_{h,k} = \Gamma_{ih,k} = A_{ih} R_k ,$$

ed $a = 1$) diventano

$$dv^1 = v^2 \sum_1^2{}_k \, R_k \, dx_k \quad , \quad dv^2 = - v^1 \sum_1^2{}_k \, R_k \, dx_k .$$

Analogamente, per il secondo trasporto,

$$dw^1 = w^2 \sum_1^2{}_k \, S_k \, dx_k \quad , \quad dw^2 = - w^1 \sum_1^2{}_k \, S_k \, dx_k .$$

Da queste, essendo

$$\cos \alpha = \sum_1^2{}_i \, v^i \, w^i ,$$

differenziando si ricava

$$- \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = (v^1 w^2 - v^2 w^1) \left[\sum_1^2{}_k \, S_k \, dx_k - \sum_1^2{}_k \, R_k \, dx_k \right] ,$$

ed essendo

$$v^1 w^2 - v^2 w^1 = \operatorname{sen} \alpha ,$$

si ottiene appunto la (2).

In particolare, se il secondo trasporto è il parallelismo è

$$\alpha = \int_{\overset{\frown}{AP}} R_1 \, dx_1 + R_2 \, dx_2 .$$

Si trova così il significato geometrico del secondo membro: esso è l'angolo che formano in P i due vettori che si ottengono trasportando uno stesso vettore secondo il trasporto caratterizzato da **R** e per parallelismo. Se poi L è una linea chiusa

$$\alpha = \int_L R_1 \, dx_1 + R_2 \, dx_2$$

è la differenza tra l'angolo di parallelismo relativo ad L e l'analogo angolo relativo al trasporto caratterizzato da **R**. Ma è da notare che tale differenza rimane invariata sostituendo a ciascuno dei due trasporti un altro della medesima classe (il che vale più in generale per la differenza

$$\int_L R_1 \, dx_1 + R_2 \, dx_2 - \int_L S_1 \, dx_1 + S_2 \, dx_2) .$$

Più in particolare ancora, se **R** soddisfa alla (1) (se cioè il trasporto corrispondente è a risultato unico)

$$\beta = \int_L R_1\, dx_1 + R_2\, dx_2 \tag{3}$$

rappresenta l'*angolo di parallelismo relativo ad* L[1]. Ma più in generale β rappresenta l'angolo relativo ad L per tutti i trasporti della stessa classe del parallelismo.

Ora dimostreremo che se L è una linea chiusa ed Ω la porzione di superficie da essa limitata, si ha:

$$\int_\Omega \frac{R_{12,12}}{a}\, d\Omega = \int_L R_1\, dx_1 + R_2\, dx_2\,. \tag{4}$$

E con ciò ricaviamo un'altra espressione per β, dato dalla (3),

$$\beta = \int_\Omega K\, d\Omega\,, \tag{5}$$

la quale piuttosto che formula di collegamento fra parallelismo e curvatura è da considerare come formula di collegamento fra tutta una classe di trasporti rigidi e curvatura e cioè, in fondo, tra invarianti e curvatura, che è un altro invariante.

La quale curvatura si presenta come un invariante particolare, appartenente a tutta una classe di invarianti, e cioè le funzioni

$$\frac{R_{12,12}}{a}\,.$$

Così, ad ogni vettore **R** resta legato un invariante.

Per dimostrare la (4) ricordiamo la formola di Green per una varietà metrica qualunque.

Sia una varietà ad n dimensioni, riferita a coordinate x_i, Ω una porzione di essa, limitata da una varietà σ ad $n-1$ dimensioni, $d\Omega$ e $d\sigma$ gli elementi dei due campi Ω e σ: si ha

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial W}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{a}}\, W n_i\, d\sigma$$

dove n_i è l'i^{mo} momento della normale a σ orientata verso l'interno di S.

(1) Ciò dimostra ancora una volta come la nozione di parallelismo di Levi-Civita sia di natura fondamentale, perchè anche elementi legati ad un trasporto a risultato unico, o *parallelismo assoluto*, non possono interpretarsi senza la detta nozione.

Per $n = 2$, σ diventa una linea chiusa L che racchiude una porzione Ω di superficie, $d\Omega = \sqrt{a}\, dx_1\, dx_2$, $d\sigma$ è l'elemento di arco s su L. Ed allora, essendo (secondo l'espressione generale di $R_{pi,hk}$)

$$R_{12;12} = \sqrt{a}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_1}\right)$$

avremo

$$\int_\Omega \frac{R_{12,12}}{a}\, d\Omega = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_1}\right) d\Omega = \int_L \frac{1}{\sqrt{a}}\,(n_1 R_2 - n_2 R_1)\, ds\,.$$

Ma $\frac{1}{\sqrt{a}}(n_1 R_2 - n_2 R_1)$ è il prodotto della lunghezza di $\mathbf{R}$ per il seno dell'angolo formato da $\mathbf{R}$ e dalla normale ad L, cioè è la componente di $\mathbf{R}$ secondo la tangente ad L: $R_1 \frac{dx_1}{ds} + R_2 \frac{dx_2}{ds}$, quindi resta dimostrata la (4), ed in particolare la (5) per l'angolo β di parallelismo. Quest'angolo β si potrà dunque calcolare per mezzo della (5) o per mezzo della (3). Per servirsi di questa formula occorrerà conoscere R_1 ed R_2 soddisfacenti alla (1). Per questo si fisseranno due funzioni v_1, v_2 legate dalla relazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{ij} a^{ij} v_i v_j = 1$$

e si assumeranno come componenti covarianti di un vettore: basterà prendere

$$R_h = \frac{v_1 v_{2|h} - v_2 v_{1|h}}{\sqrt{a}}\,.$$

Variando la coppia v_1, v_2 il vettore $\mathbf{R}$ si incrementa di un gradiente ed è esso stesso un gradiente per le varietà euclidee e solo per esse.

Si potrà prendere

$$v_1 = 0 \qquad , \qquad v_2 = \sqrt{\frac{a}{a_{11}}}\,,$$

ed allora

$$R_h = \frac{\sqrt{a}}{a_{11}} \left\{ \begin{matrix} 1 & h \\ 2 & \end{matrix} \right\}$$

e si ha la seguente espressione per β:

$$\beta = \int_L \frac{\sqrt{a}}{a_{11}} \left[\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} dx_1 + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} dx_2 \right] (1)\,.$$

(1) Non si pensi che β risulta nullo perchè si possono fissare coordinate geodetiche lungo L, perchè se la varietà non è euclidea le coordinate geodetiche si potranno fissare per tratti di L, ma non per tutta L.

La curvatura K prende allora la seguente espressione

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}\right].$$

Le varietà euclidee sono caratterizzate dall'annullarsi della quantità dentro parentesi. È da notare che le quantità

$$T(h) = \frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}1 & h\\ & 2\end{matrix}\right\}$$

formano per una superficie un sistema semplice. Esse non sono componenti di un tensore: quando si fa un cambiamento di coordinate si trasformano secondo la legge:

$$\overline{T}(h) = \sum_1^2{}_j \frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_h} T(j) + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{x}_i}$$

dove Φ, al variare delle $\overline{x}_i$, non si trasforma per invarianza, ma l'espressione

$$\int_L T_{(1)}\, dx_1 + T_{(2)}\, dx_2 ,$$

dove L è una linea chiusa, è un invariante.

Si pensa che i risultati contenuti in questa Nota possano condurre ad interessanti generalizzazioni.

Ne faremo conoscere qualcuna in altro lavoro.

Meccanica. — *Sulle onde di canale di tipo permanente.* Nota di W. Fenchel, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Un moto ondoso irrotazionale di un liquido incompressibile in un canale rettilineo colle sponde verticali ed il fondo orizzontale è chiamato permanente, se il pelo libero *sembra* procedere rigidamente con velocità costante e se, rispetto ad un osservatore che si muove col pelo, il moto del liquido è stazionario. Il prof. Levi-Civita ha osservato che un moto è permanente in questo senso, se il pelo si muove nel modo suddetto e se la portata relativa all'osservatore mobile non dipende dal tempo. Nella Nota presente vogliamo aggiungere che basta la prima condizione. Cioè vogliamo dimostrare che:

Il moto ondoso in un canale è permanente, se la superficie libera pare che si muova lungo il canale senza cambiare di forma, con velocità costante.

Basta studiare il moto in un piano parallelo alle sponde. Adoperiamo le notazioni del lavoro fondamentale del Levi-Civita [2]. Sia dunque $-c$ la velocità apparente del pelo e x, y un sistema di coordinate che si muove alla stessa velocità.

Il campo L del moto sarà una striscia fra una retta orizzontale che prendiamo per asse delle x, ed una curva l che è fissa in questo sistema secondo la ipotesi. L'equazione di l sia

$$y_1 = y_1(x).$$

Supponiamo che sia

$$(1) \qquad c_1 < y_1 < c_2,$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti positive. Le componenti della velocità (relativa) di una generica particella liquida siano u e v. La u sia sempre maggiore di una costante positiva. Questa ipotesi esprime in un certo senso il carattere ondoso del moto [3].

Come è stato dimostrato dal Levi-Civita [4], esiste una funzione analitica $f(\zeta)\,[\zeta = x + yi]$, che gode delle proprietà seguenti:

(1) Nella seduta del 17 maggio 1931.

(2) *Sulle onde progressive di tipo permanente*, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVI, 1907, pp. 777-790, oppure *Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik*, Berlin, 1924, pp. 26-59.

(3) Loc. cit., p. 779 risp. p. 29.

(4) Loc. cit.

1. La parte reale φ della f è il potenziale di velocità, la parte immaginaria ψ è la funzione di corrente.

2. Per la derivata w della f vale

$$\frac{df}{dz} = w = u - vi \quad , \quad |w|^2 = V^2 , \tag{2}$$

ove V è la velocità.

β. La funzione f rappresenta conformemente il campo L del moto su una striscia fra l'asse reale ed una sua parallela cui spetta una certa ordinata $q > 0$, cosicchè o corrisponde a $0, \infty$ a ∞, $-\infty$ a $-\infty$. Il significato di q è « portata relativa, attraverso una generica verticale, nell'unità del tempo ».

Secondo la 3. ed un noto teorema della teoria della rappresentazione conforme, la f è unicamente determinata, se la curva l e la portata q sono date. Se in particolare la q non dipende dal tempo, segue che la f è la stessa funzione per ogni tempo; cioè il moto è stazionario o permanente. Però non vogliamo fare nessuna ipotesi sulla q. Essa, quindi anche la $f(z)$, possono dipendere dal tempo. Scriviamo perciò $q(t)$, rispettivamente $f(z\,;\,t)$.

Per studiare come la $f(z\,;\,t)$ dipende dal tempo, consideriamo la funzione $F(z) = \Phi + \Psi i$ (univocamente determinata ed indipendente dal tempo), che rappresenta il campo L sulla striscia fra l'asse reale e la retta $\Psi = 1$, cosicchè o corrisponde a $0, \infty$ a ∞ e $-\infty$ a $-\infty$. Allora abbiamo

$$f(z\,;\,t) = q(t) \cdot F(z) ; \tag{3}$$

poichè questa funzione gode evidentemente della proprietà 3. Poniamo inoltre

$$W = \frac{dF}{dz} .$$

Allora abbiamo secondo la (2)

$$w = q(t)\, W \quad , \quad V = q(t)\, |W| . \tag{4}$$

Dobbiamo mostrare che la $q(t)$ è costante. Dalle condizioni cinematiche non segue niente. Consideriamo però le condizioni dinamiche. Le equazioni di Euler ci danno nel caso conservativo la relazione seguente (se poniamo la densità del liquido uguale 1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + U - p = k(t) ,$$

ove U è il potenziale della forza, p la pressione e $k(t)$ una funzione della sola t. Sul pelo libero, cioè sulla curva l, la p è costante. Il potenziale sarà nel nostro caso

$$U = -gy + \text{cost}.$$

Abbiamo dunque su l

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 - g y_l = K(t), \tag{5}$$

ove $K(t)$ è un'altra funzione della sola t.

Trasformiamo ora la (5) in un modo completamente analogo a quello usato dal Levi-Civita per derivare la sua equazione funzionale per le onde permanenti. Consideriamo le ζ e W come funzioni della F. Esse sono regolari per $0 \leqq \Psi \leqq 1$ e reali per $\Psi = 0$, sono dunque prolungabili analiticamente per riflessione nella striscia $-1 \leqq \Psi \leqq 0$ e hanno valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse reale. Abbiamo quindi sulla curva l, che corrisponde a $\Psi = 1$, secondo la (4)

$$V^2 = q^2(t) \, |W|^2 = q^2(t) \, W(\Phi + i) \, W(\Phi - i)$$

e

$$y_l = \frac{1}{2i} [\zeta(\Phi + i) - \zeta(\Phi - i)].$$

Inoltre segue dalla (3)

$$\varphi = q(t) \, \Phi.$$

La (5) possiamo quindi scriverla così:

$$q'(t) \, \Phi + q^2(t) \frac{1}{2} W(\Phi + i) \, W(\Phi - i) - \frac{g}{2i} [\zeta(\Phi + i) - \zeta(\Phi - i)] = K(t).$$

Ora possiamo considerare la Φ come variabile complessa, perchè si tratta di funzioni analitiche e possiamo derivare rispetto a Φ, ottenendo

$$q'(t) + q^2(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\Phi} [W(\Phi + i) \, W(\Phi - i)] -$$

$$- \frac{g}{2i} \left[\frac{d}{d\Phi} \zeta(\Phi + i) - \frac{d}{d\Phi} \zeta(\Phi - i) \right] = 0,$$

ovvero brevemente

$$q'(t) + q^2(t) \, A(\Phi) + B(\Phi) = 0,$$

ove dipendono $q(t)$ dalla sola t, $A(\Phi)$ e $B(\Phi)$ dalla sola Φ.

Adesso distinguiamo due casi:

I. $A(\Phi) = \text{cost}$. Allora deve essere anche

$$B(\Phi) = \text{cost}$$

cioè

$$\frac{dy_1}{d\Phi} = \text{cost}.$$

Però, in virtù della (1), la y_1 è limitata, quindi

$$y_1 = \text{cost} \quad , \quad B(\Phi) = 0 .$$

Ciò significa che la superficie libera del liquido è un piano orizzontale. In questo caso è evidentemente

$$F(\zeta) = a\zeta \quad , \quad a = \text{cost},$$

dunque

$$W = \frac{dF}{d\zeta} = \text{cost},$$

$$A(\Phi) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\Phi}[W(\Phi + i)\, W(\Phi - i)] = 0 ,$$

$$q'(t) = 0 .$$

II. $A(\Phi) \neq \text{cost}$. Scegliamo due valori fissi Φ_1 e Φ_2, cosicchè

$$\begin{vmatrix} 1 & A(\Phi_1) \\ 1 & A(\Phi_2) \end{vmatrix} = A(\Phi_2) - A(\Phi_1) \neq 0 .$$

Allora le due equazioni lineari

$$q'(t) + q^2(t)\, A(\Phi_1) + B(\Phi_1) = 0$$
$$q'(t) + q^2(t)\, A(\Phi_2) + B(\Phi_2) = 0$$

si lasciano risolvere rispetto a $q'(t)$ e $q^2(t)$. Ne viene

$$q^2(t) = \text{cost}.$$

Meccanica. — *Quelques observations sur le travail de M. Sakellariou: "Sur une classe de mouvements centraux"*. Nota di N. Hatzidakis, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. Dans cette Note[2] M. Sakellariou répète un travail, qu'il avait déjà publié en grec dans le journal « Οὐρανία » et sur lequel j'avais fait, dans le même journal, quelques observations. Comme M. Sakellariou cite dans cette Note une partie de mes observations, je me vois obligé d'expliquer ici plus précisément les points de son travail qui me paraissent faibles ou imparfaits.

2. M. Sakellariou part des hypothèses suivantes $\Delta = \frac{k}{\rho^2}$ (où k représente une constante) et $vv' = -\Delta\rho'$. Or, ces hypothèses donnent immédiatement les relations: $(\alpha)\ \Delta\rho^2 = k$ et $2\rho\Delta - v^2 = c$, où c est une nouvelle constante. Par conséquent, il n'y a pas de raison de former l'équation aux dérivées partielles qu'il trouve et intègre pour retomber aux équations (α). Il va sans dire que, si l'on pose $c = \varphi(k)$, φ étant une fonction arbitraire et k, c ayant *d'avance* les valeurs (α), et que l'on forme, en partant de $c = \varphi(k)$, une équation aux dérivées partielles par le procédé bien connu (en éliminant, par dérivations partielles, la fonction arbitraire), on retrouvera comme caractéristiques les équations (α), c'est-à-dire *on retombera au point d'où l'on partit.*

3. Il est d'ailleurs évident que k peut varier d'une trajectoire à l'autre, puisqu'on ne fait usage que des deux premières lois de Képler et que c'est précisément la troisième $\left(\frac{\alpha^3}{T^2} = \frac{\alpha'^3}{T'^2}\right)$ qui exige l'identité de k pour toutes les trajectoires.

4. La phrase de l'auteur (p. 516, en haut): « *Réciproquement, si les* Δ, ρ, v « *sont liés par* (7) *et* Δ *est une fonction seulement des* ρ, v, *le mobile décrit* « *une conique dans un mouvement central, tandisque le centre du mouvement est* « *un des foyers...* » n'est point en ordre. C'est *seulement* quand le mouvement est *d'avance* supposé central, que les équations (7) peuvent donner une conique. Mais, même alors, *la réciproque n'est pas vraie en général*, et il y a là un point *erroné* de ce travail; car, même si nous acceptons, pour le moment, la marche suivie par l'auteur, nous voyons tout de suite que M. Sakellariou *n'a pas eu égard à la solution singulière* de son équation, solution qui donne *d'autres trajectoires.*

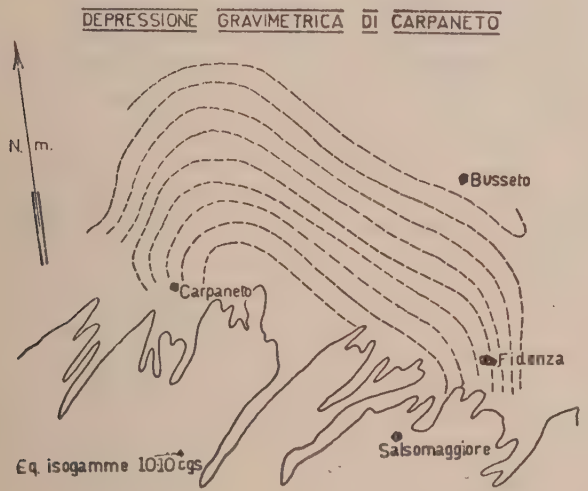
(1) Nella seduta del 3 maggio 1930.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 10, novembre 1930.

Geofisica. — *Sulla depressione gravimetrica di Carpaneto.* Nota di A. Belluigi, presentata [1] dal Corrisp. P. Vinassa.

Nella zona Fidenza–Carpaneto è stata rilevata una grande depressione gravimetrica che denota un'area di minimo di gravità ad est di Carpaneto.

Sarebbe stato utile studiare anche i raccordi con le prime colline appenniniche di questa depressione, ma purtroppo i rilievi non sono stati eseguiti che parzialmente in questo senso.



Le isogamme di gravità sono parallele all'andamento medio appenninico da Fidenza a Carpaneto, piegano verso sud–est, ad est di Fidenza, e ad ovest di Carpaneto, ma, per quel che si è detto, non è dato poter bene precisare il loro comportamento a sud che, data la geologia della regione, può offrire qualche novità.

Un rapido rilievo infatti che condussi tra Fidenza, Alseno, Salsominore, mi portò a stabilire un raccordo netto e piuttosto regolare, a sinclinale, prima di raggiungere le colline, con forte incremento della gravità nei pressi di Salsominore–Scipione.

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

Potei precisare così che la sinclinale rimonta oltre che a nord–est e sud-ovest, verso est, a mo' di doccia, spingendosi fino a Borghetto.

Questa definizione offre uno speciale interesse se si pensa che l'asse longitudinale della doccia, parallelo all'andamento medio appenninico, cade tra Fontevivo e la nota dislocazione petrolifera di argille scagliose Salsomaggiore–Miano–Fornovo.

Il fenomeno di Carpaneto interessa un'area piuttosto vasta, di circa 300 km.^{2} e delimita fenomeni gravimetrici importanti, anche dal punto di vista petrolifero, com'è stato dimostrato, quali quello di Fontevivo ad est, Podenzano ad ovest, Salsomaggiore a sud.

Recentissimi studi hanno portato poi a stabilire un altro fatto di notevole importanza e cioè che la depressione di Carpaneto, che risale verso nord-est, si raccorda con una ruga gravimetrica pur essa parallela al crinale appenninico, che da Casalpusterlengo si protende fin verso Busseto (sviluppo dell'asse longitudinale di circa 40 km.).

I gradienti di gravità nella zona Carpaneto-Fidenza, sono piuttosto uniformi e piccoli, dell'ordine di 10 U. E., in media, orientali verso nord–est.

Le curvature eötvössiane risultano anch'esse relativamente piccole, sulle 20 U. E., con direzione nord nord–est.

Poche anomalie di comportamento di queste grandezze si riscontrano nella regione, compresa tra lo Stirone, il Nure e il Po.

In vicinanza di questi fiumi le anomalie, causate da disturbi dell'immediato sottosuolo, sono, come si sa, più frequenti che altrove, ma ci è riuscito facile in alcuni casi effettuare la correzione topografica dei rilievi sepolti nell'immediato sottosuolo, valutata approssimativamente con un vecchio metodo oggi pubblicato dal Koenigsberger (1).

Si tratta di poter stabilire la profondità del disturbo nel punto di stazione e ad una certa distanza di esso con piccole apposite trivelle; la differenze tra queste due profondità da, per quel tratto, l'altezza dell'inomogeneità in grado di perturbare i gradienti normali orizzontali di gravità. Tenuto conto che il baricentro della bilancia di torsione dev'essere riferito al piano orizzontale passante per la struttura inomogenea subito sotto la stazione, si applicano le solite formole, o meglio i soliti metodi grafici di correzione.

Risulta, tracciate le isogamme, un incremento di gravità da Carpaneto a Busseto di circa di $9 \cdot 10^{-3}$ c. g. s., e le isogamme sono equidistanti con una equidistanza di $10 \cdot 10^{-4}$ c. g. s. su m. 1250 circa in direzione sud-ovest, nord-est.

Le isogamme rivelano, per di più, una morfologia di depressione gravifica che, data la regolarità del rilievo, non dovrebbe essere molto dissimile

(1) J. Koenigsberger, *Ueber die Mitteilung von Gradienten und Krümmungswerten und die Anwendung einer Undulationsmethode auf Schwerkraftmessungen.* « Ergäuz.-Hefte für angew. Geophysik ». Bd. 1, Heft 3, 1931.

dalla morfologia della reale depressione dei terreni attualmente ricoperti dall'alluvione.

Condizione di queste corrispondenze sono sopratutto le simmetrie di andamento delle curve dei gradienti relative agli assi maggiore o minore della morfologia.

Le curvature massime (tendenze direttrici orizzontali) delle superfici equipotenziali passanti per ciascuna stazione sono in direzione nord nord–est; le curvature minime, in direzione normale alla precedente, segnano la giacitura dei terreni perturbanti.

Anche quest'aspetto di corrispondenza tra T. D. O. e caratteristiche degli strati (direzione e pendenza) è bene rilevare.

Considerando, quale causa della configurazione della gravità della zona in esame, una depressione tettonica che risale naturalmente in direzione normale all'andamento medio delle isogamme, costituita da materiali più densi dei terreni di copertura, che la colmano fino alla superficie pianeggiante dove si sono effettuate le misure, è possibile calcolare la profondità minima dei terreni costituenti la depressione nella zona dei minimi di gravità.

Per profondità minima della depressione intendo precisamente la profondità minima dei terreni costituenti la depressione nei punti maggiormente depressi.

Ponendoci esteriormente all'influenza, in una stazione, cioè, che risenta l'influenza limite del disturbo, si ricava per $\Delta\sigma = 1$, una profondità minima della depressione di km. 4 subito, a km. 4 circa est di Carpaneto.

Non sempre è possibile, per il calcolo, mettersi in queste condizioni di privilegio perchè le strutture sono collegate tra loro e bisogna tener conto delle influenze reciproche, ma se la struttura di cui interessa stabilire le caratteristiche quantitative è discosta sufficientemente da altre, per di più poco accentuate inquanto ad influenze, allora i calcoli si semplificano notevolmente.

La depressione risale verso nord–est come si è detto di m. 500 ogni m. 1250 in media.

Non potrei dire di più dati gli elementi sperimentali a disposizione e dato anche il tipo della configurazione della gravità nella zona. Se le possibilità teoriche di studio prescindono da questi tipi, quelle pratiche, che permettono di venire ai numeri, ch'è l'essenziale poi per questi studi, sono del tutto subordinate ai tipi che si hanno da esaminare.

Posso concludere che questi terreni a doccia, causando le perturbazioni di cui è oggetto la presente Nota, rimontano ad ovest, nord, nord–est, est fino astaccarsi verticalmente di qualche chilometro dalla profondità massima della fossa.

La Ditta Massarenti di Piacenza ha potuto constatare, in una perforazione presso Carpaneto, per ricerca d'idrocarburi, una potente pila di terreni riferibili al piacenziano secondo il prof. Sacco che ha esaminato i testimoni.

Il rinvenimento di questa pila, più potente di un chilometro, non meraviglia dato quel che si è detto. Come pure il rinvenimento di terreni antichi poco profondi a nord-ovest di Carpaneto, o meglio della depressione gravimetrica di Carpaneto, più volte constatati con sonde per ricerche d'acqua, è in perfetto accordo col fenomeno da noi rilevato. Se si riuscisse per di più a stabilire l'età dei terreni costituenti la depressione, si potrebbe allora facilmente prevedere l'entità dei terreni posteriori a quelli.

Geofisica. — *Considerazioni geometriche per l'analisi periodale*[1]. Nota di M. LOMBARDINI, presentata[2] dal Socio F. ENRIQUES.

È noto che ogni diagramma continuo si può sempre considerare somma di onde sinusoidali, perchè una funzione di variabile reale, può decomporsi in serie di Fourier, e quindi, nell'ordine di approssimazione richiesto per il disegno, in somma di un numero finito di seni e coseni. Proprietà geometrica caratteristica e praticamente importante di una speciale classe di diagrammi è di potersi decomporre in un *numero piccolo* di onde sinusoidali o quasi sinusoidali; se ne hanno esempi frequentissimi nelle Scienze fisiche, biologiche e statistiche.

Lo studio matematico di tali diagrammi, e la ricerca delle onde che li compongono, si presenta perciò di grande interesse, e ha dato origine, in questi ultimi tempi, all'elaborazione di molti metodi che vanno sotto il nome di *analisi periodale*[3].

Per rendere sicura l'applicazione dei metodi più semplici, e più in uso, sarebbe necessario uno studio rigoroso, se pure elementare, delle proprietà fondamentali relative alle curve somme di (poche) sinusoidi. Come primo passo su questa via, in un nostro precedente lavoro, pubblicato tempo fa[4], abbiamo studiato le proprietà degli zeri estremi e flessi della somma di due sinusoidi; nella presente Nota ci proponiamo di ricavare da questo studio delle *condizioni (necessarie) semplici a cui deve soddisfare la distribuzione degli zeri, degli estremi e dei flessi di una curva perchè possa considerarsi somma di due sinusoidi*; esse permettono di determinare il periodo delle sinusoidi com-

(1) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(3) Una esposizione chiara e sintetica dello stato del problema ci è offerta dalla dotta conferenza del prof. G. CASSINIS, *L'analisi periodale dei fenomeni ciclici*, « Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni », Roma, 1929.

(4) *Considerazioni geometriche per l'analisi periodale*, « Atti della R. Accademia di Torino », vol. LVIII; 1923, pp. 19–38.

ponenti, oppure di escludere *a priori* che un dato diagramma possa essere ottenuto come somma di due sinusoidi.

1. Richiamiamo le proprietà più caratteristiche dimostrate nel nostro precedente lavoro.

Sia una curva somma di due sinusoidi

$$y = s(x) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right)$$

e supponiamo per semplicità che i periodi T_1, T_2 abbiano rapporto razionale e sia $T_1 > T_2 > 0$. La curva $s(x)$ è perciò periodica e sia T il periodo. Nel caso generico avviene che tra un massimo ed un minimo consecutivi della $s(x)$ cada un solo flesso; *allora una delle due sinusoidi componenti ha in ogni periodo della* $s(x)$ *lo stesso numero di massimi e di minimi della* $s(x)$; per cui il semplice computo dei massimi e dei minimi permette di calcolare esattamente uno dei due periodi.

Anche se la curva ha più di un flesso fra due estremi consecutivi (un massimo e un minimo) vale la regola precedente, che cade in difetto soltanto se il numero degli zeri, nel periodo T, non è uguale al numero degli estremi. Ma quest'ultimo caso è il più favorevole perchè ci permette di completare l'analisi dei periodi; più precisamente abbiamo che *la sinusoide a periodo maggiore ha in ogni* T *tanti zeri quanti la* $s(x)$, *la sinusoide a periodo minore tanti zeri quanti sono i flessi della* $s(x)$; per cui il semplice computo degli zeri e dei flessi permette di determinare entrambi i periodi.

Nel citato lavoro abbiamo anche studiato il caso che i periodi delle due sinusoidi non siano a rapporto razionale ed abbiamo dimostrato che il computo precedente, eseguito per un tratto sufficientemente lungo, serve a determinare in modo analogo i periodi delle sinusoidi con la voluta approssimazione.

2. Ritornando per semplicità alla $s(x)$ indicata precedentemente, i cui periodi $T_1 > T_2$ siano in rapporto razionale, precisiamo le regole ora accennate. Nelle proposizioni delle pp. 34–36 (della nostra precedente Nota) si considerano le relazioni fra i periodi T_1, T_2 e il numero degli zeri degli estremi e dei flessi della $s(x)$ contenuti in un segmento δ qualunque. Se la $s(x)$ è periodica si può assumere $\delta = KT$ dove K è un numero intero positivo.

Sia m il numero degli zeri distinti della $s(x)$ in ogni periodo T, n il numero degli estremi, p il numero dei flessi. Nell'intervallo δ considerato saranno contenuti Km zeri, Kn estremi, Kp flessi. Facendo tendere K a $+\infty$ gli intervalli

$$(1) \quad \left(\frac{2\delta}{Km+3}, \frac{2\delta}{Km-2}\right), \left(\frac{2\delta}{Kn+3}, \frac{2\delta}{Kn-2}\right), \left(\frac{2\delta}{Kp+3}, \frac{2\delta}{Kp-2}\right)$$

che compaiono nei citati teoremi tendono rispettivamente ai punti

$$\frac{2T}{m}, \frac{2T}{n}, \frac{2T}{p},$$

quindi nei detti enunciati si può al posto degli intervalli (1) scrivere rispettivamente $\frac{2T}{m}, \frac{2T}{n}, \frac{2T}{p}$.

Facciamo ora variare il rapporto $\frac{a_2}{a_1}$ da 0 a $+\infty$ (non si avrebbe maggior generalità supponendo i valori negativi, Nota cit., p. 21). Si trova che:

1° per $0 < \frac{a_2}{a_1} \leq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$ è $T_1 = \frac{2T}{m} = \frac{2T}{n} = \frac{2T}{p}$ onde $m = n = p$;

2° per $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3 < \frac{a_2}{a_1} \leq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$ è $T_1 = \frac{2T}{m} = \frac{2T}{n}$ onde $m = n \leq p$;

3° per $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 < \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{T_2}{T_1}$ è $T_2 = \frac{2T}{p}$, $T_1 = \frac{2T}{m}$ onde m, n, p sono vincolati soltanto dalla relazione fondamentale $m \leq n \leq p$;

4° per $\frac{T_2}{T_1} < \frac{a_2}{a_1} \leq 1$ è $T_2 = \frac{2T}{p} = \frac{2T}{n}$ onde $m \geq n = p$;

5° per $\frac{a_2}{a_1} > 1$ è $T_2 = \frac{2T}{p} = \frac{2T}{n} = \frac{2T}{m}$ onde $m = n = p$.

Da ciò possiamo dedurre le seguenti *regole*:

I, se $m < n < p$ è $T_1 = \frac{2T}{m}$, $T_2 = \frac{2T}{p}$;

II, se $m = n < p$ è $T_1 = \frac{2T}{n}$;

III, se $m < n = p$ è $T_2 = \frac{2T}{n}$;

IV, se $m = n = p$ uno dei due periodi è uguale a $\frac{2T}{n}$.

Se il rapporto $\frac{a_2}{a_1}$ non è razionale e quindi se la $s(x)$ non è periodica, facendo variare $\frac{a_2}{a_1}$ da 0 a $+\infty$ si presentano i casi analoghi ai pre-

cedenti colla sola differenza essenziale che ai valori $\frac{2T}{m}, \frac{2T}{n}, \frac{2T}{p}$ vanno sostituiti gli intervalli

$$\left(\frac{2\delta}{m'+3}, \frac{2\delta}{m'-2}\right), \left(\frac{2\delta}{n'+3}, \frac{2\delta}{n'-2}\right), \left(\frac{2\delta}{p'+3}, \frac{2\delta}{p'-2}\right)$$

essendo m', n', p' rispettivamente gli zeri, gli estremi e i flessi della $s(x)$ nel segmento δ (1).

3.) Completando i risultati ottenuti nel nostro precedente lavoro dimostriamo i seguenti lemmi:

LEMMA I. - *Se un intervallo contiene quattro zeri di una* $s(x)$ *è sempre maggiore di* $\frac{T_2}{2}$.

Sia δ la distanza fra il primo e l'ultimo di quattro zeri consecutivi. Per il teorema di p. 34 (Nota cit.) abbiamo che se $\frac{a_2}{a_1} > 1$ è $T_2 \leq \delta$; se $\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{T_2}{T_1}$ è $T_1 \leq \delta$. Quindi in entrambi i casi è $\frac{T_2}{2} < \delta$. Se $\frac{a_2}{a_1}$ è compreso nell'intervallo $\left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$ questo teorema non si può applicare.

Per completare la dimostrazione osserviamo che fra i quattro zeri consecutivi vi sono certamente tre estremi; sia δ_1, la distanza fra il primo e l'ultimo di tre estremi consecutivi compresi nel segmento δ. Quando è $\frac{a_2}{a_1} > \frac{T_2}{T_1}$ dal teorema delle pp. 35-36 abbiamo $T_2 \leq 2\delta_1$ quindi $T_2 < 2\delta$.

LEMMA II. - *La distanza fra due zeri consecutivi di una* $s(x)$ *è sempre minore di* T_1.

Questa proposizione è stata sostanzialmente dimostrata nelle pp. 31-32 della nostra precedente Nota, ove si stabilisce che « una $s(x)$ ammette ∞ zeri di multiplicità dispari ». Siano $x_0 < x_1$ due zeri consecutivi della $s(x)$ e poniamo $\delta = x_1 - x_0$. Seguendo l'indicata dimostrazione consideriamo separatamente i tre casi possibili:

1° $\frac{a_2}{a_1} < 1$. In tal caso x_0, x_1 non possono essere estremi della $s_1(x) = a_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T_1}$. Indichiamo con b_1, b_2 i due estremi consecutivi della $s_1(x)$ che comprendono nel loro intervallo x_0, e sia $b_1 < b_2$. Se anche x_1

(1) Nelle pp. 36-37 della citata Nota abbiamo stabilito, nel caso della $s(x)$ non periodica, quattro regole analoghe alle precedenti che necessariamente sono di enunciato alquanto più complesso. Prendiamo questa occasione per correggere una svista in cui siamo incorsi: a p. 36 riga 16 la frase « A seconda che a non è interno a: » deve essere corretta nell'altra: « Se a è esterno a $\left(1, \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3\right)$ allora A, B, C, comprendono tutti e tre o il periodo T_1, o il periodo T_2; se a è interno a: ».

è compreso nell'intervallo (b_1, b_2) è certamente $\delta < \frac{T_1}{2}$, quindi a maggior ragione $\delta < T_1$.

Se x_1 non è compreso nell'intervallo (b_1, b_2), è però certamente compreso nell'intervallo $\left(b_2, b_2 + \frac{T_1}{2}\right)$ perchè in quest'ultimo intervallo cade almeno uno zero della $s(x)$; quindi è $\delta < 2\frac{T_1}{2}$.

2° $\frac{a_2}{a_1} > 1$. In modo analogo si dimostra che in questo caso è $\delta < T_2$ quindi anche $\delta < T_1$.

3° $\frac{a_2}{a_1} = 1$. Se nè x_0, nè x_1 sono estremi della $s(x)$ questo caso non differisce dal primo considerato. Se x_0 è estremo della $s_1(x)$ vi è certamente almeno uno zero nell'intervallo $(x_0, x_0 + T_2)$ quindi è $\delta < T_2$ e a maggior ragione $\delta < T_1$.

Così pure se x_1 è estremo della $s_1(x)$ vi è certamente almeno uno zero nell'intervallo $(x_1 - T_2, x_1)$ quindi $\delta < T_2 < T_1$.

Risulta da questi due lemmi che:

la distanza fra due estremi consecutivi o due flessi consecutivi di una $s(x)$ è sempre minore di T_1;

se un intervallo contiene quattro estremi o quattro flessi è sempre maggiore di $\frac{T_2}{2}$.

4. Possiamo dedurre da ciò alcune condizioni necessarie a cui deve soddisfare una curva $y = f(x)$ perchè possa risultare somma di due sinusoidi. Risultano da queste condizioni alcuni criteri utili nell'analisi dei diagrammi sperimentali.

1° criterio – Sia una $f(x)$ e siano a_1 e a_2 due qualunque dei suoi zeri consecutivi: *la $f(x)$ non può essere ottenuta come somma di due sinusoidi entrambe a periodo minore di $a_2 - a_1$.*

Se a_1, a_2, a_3, a_4 sono quattro zeri consecutivi della $f(x)$, la curva non può essere ottenuta come somma di due sinusoidi entrambe a periodo maggiore di $2(a_4 - a_1)$.

Lo stesso dicasi per gli estremi e i flessi.

2° criterio - Ci conviene premettere qualche considerazione. Abbiasi una curva ad un sol valore $f(x)$ data in un intervallo δ sufficientemente grande perchè in esso cada un numero abbastanza grande di zeri (almeno > 5) e poniamo mente alle regole del nostro precedente lavoro (p. 37) e qui riportate nel § 1. Sia m' il numero degli zeri, n' il numero degli estremi, p' il numero dei flessi; calcoliamo i tre numeri

$$\tau_m = \frac{2\delta}{m'} \quad , \quad \tau_n = \frac{2\delta}{n'} \quad , \quad \tau_p = \frac{2\delta}{p'};$$

poniamo

$$\varepsilon_m = \frac{6\delta}{m'(m'-2)} \quad , \quad \varepsilon_n = \frac{6\delta}{n'(n'-2)} \quad , \quad \varepsilon_p = \frac{6\delta}{p'(p'-2)}$$

e consideriamo gli intervalli

$$\tau_m \pm \varepsilon_m \quad , \quad \tau_n \pm \varepsilon_n \quad , \quad \tau_p \pm \varepsilon_p .$$

Se δ è sufficientemente grande questi tre intervalli possono essere presi minori di 2ε, e uno almeno dei tre numeri τ_m , τ_n , τ_p rappresenta, a meno di $\pm \varepsilon$, uno dei periodi delle due sinusoidi che dovrebbero comporre la $f(x)$; in alcuni casi due di questi numeri rappresentano, a meno di $\pm \varepsilon$, i periodi di entrambe le sinusoidi. Questi periodi così determinati li chiameremo *periodi medi dedotti dalla* $f(x)$. Dal teorema di identità (Nota cit., p. 24) risulta che:

Una curva non può essere ottenuta come somma di due sinusoidi entrambe con periodi che differiscano per più di ε *dai periodi medi dedotti da essa.*

3° **criterio.** – *Una* $f(x)$ *non può essere scomposta nella somma di due sinusoidi se ha alcuni zeri troppo vicini ed altri troppo lontani* e cioè se ha quattro zeri consecutivi più vicini del semiperiodo medio (a meno di $\pm \varepsilon$) e contemporaneamente altri due zeri consecutivi più lontani del periodo medio (a meno di $\pm \varepsilon$).

Se dalla $f(x)$ si sono potuti determinare i due periodi medi basta verificare che quattro zeri consecutivi siano più vicini del semiperiodo minore (a meno di $\pm \varepsilon$) per escludere che il diagramma si possa rappresentare come somma di due sinusoidi; oppure basta verificare che due zeri consecutivi siano più lontani del periodo medio maggiore (a meno di $\pm \varepsilon$).

Quanto si dice degli zeri vale anche per gli estremi e i flessi.

4° **criterio.** – *Punti di simmetria e zeri multipli.* Come è noto il punto x_0 è detto di simmetria per la curva $f(x)$ se per ogni x vale la relazione $f(x - x_0) = f(x_0 - x)$; oppure l'altra $f(x - x_0) = -f(x_0 - x)$.

Nel primo caso il punto è detto di *simmetria semplice,* nel secondo caso di *simmetria doppia.* Se queste relazioni valgono solo nell'intorno di x_0 si può dire che il punto è di simmetria solo per il suo intorno. Come è noto ogni funzione analitica non può avere un punto che risulti di simmetria nel suo intorno senza che lo sia anche per l'intera curva. Abbiamo così che *se una curva ammette un punto che risulti di simmetria nel suo intorno e che non lo sia per tutta la curva non può essere somma di due o più sinusoidi.*

Nel caso di due sinusoidi questo teorema vale talvolta anche per l'intorno infinitesimo nel senso che i punti di simmetria possono essere messi in relazione con gli zeri multipli.

Ricordiamo che uno zero multiplo di ordine dispari è caratterizzato dal fatto che la curva attraversa l'asse delle x ed è tangente ad esso; uno

zero multiplo di ordine pari è caratterizzato dal fatto che la curva ammette in esso un massimo o un minimo.

Dal lavoro più volte citato (pp. 29, 30, 31) abbiamo che la somma di due sinusoidi può ammettere zeri multipli di ordine dispari (precisamente tripli) soltanto se $\frac{a_2}{a_1} = \frac{T_2}{T_1}$; tali zeri cadono negli zeri comuni alle due sinusoidi e sono cioè punti di simmetria doppi per la curva. Abbiamo quindi:

una curva che abbia uno zero multiplo dispari che non sia punto di simmetria non può essere somma di due sinusoidi.

La somma di due sinusoidi può ammettere zeri multipli di ordine pari (precisamente doppi) soltanto quando $\frac{a_2}{a_1}$ è compreso nell'intervallo $\left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$ (estremo inferiore escluso) quindi abbiamo che:

una curva che presenti alternativamente zeri multipli pari e zeri multipli dispari non può essere somma di due sinusoidi.

Fisica. — *Spettro Raman dello jone* SO_4. Nota di Orazio Specchia, presentata [1] dal Socio Q. Majorana.

L'ipotesi di Brester [2] che attribuisce allo jone SO_4, come a tutti i gruppi del tipo xy_4, la struttura tetraedrica, permette di prevederne quattro frequenze caratteristiche: 1 inattiva semplice, 1 inattiva doppia e 2 attive triple. Di queste, le due attive, corrispondono alle due ben note lunghezze d'onda di riflessione, i cui valori si aggirano intorno ai 9 e ai 16$_\mu$; le due inattive, che possono essere determinate in base alle frequenze Raman cui danno origine, corrispondono a lunghezze d'onda intorno ai 10 e ai 24$_\mu$. Una conferma dell'ipotesi del Brester si ha nel fatto, che, conoscendo tre delle frequenze fondamentali, per esempio le due attive e l'inattiva a 10$_\mu$, cui corrisponde la Raman più intensa, un calcolo analogo a quello eseguito dal Dennison per la molecola CH_4 [3], conduce, per la seconda frequenza inattiva, a un valore non lontano da quello di 24$_\mu$, fornito dall'esperienza. I valori di 9, 10, 16 e 24$_\mu$, assegnati come caratteristici dello jone SO_4, vanno intesi come corrispondere, solo in ordine di grandezza, alle 4 frequenze fondamentali dello jone, potendo queste essere influenzate e dal catione, e dalla concentrazione ove si sperimenti su soluzioni, ecc.

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) Brester, « Diss. Utrecht », 1924; Schaefer und Matossi, *Das ultrarote Spektrum*, p. 352.

(3) Dennison, « Astrophys. Journ. », 1925.

Per l'acido solforico puro, lo spettro Raman è costituito, come risulta dalle mie ricerche, che fan l'oggetto di questa Nota, oltre che dalle quattro righe corrispondenti alle quattro frequenze fondamentali dello jone SO_4, da altre tre righe: la diluizione dell'acido provoca spostamenti delle righe e variazioni nelle loro intensità relative. Questi risultati non sono tutti d'accordo con quelli ottenuti da Bell e Fredrickson [1] in un'ana-

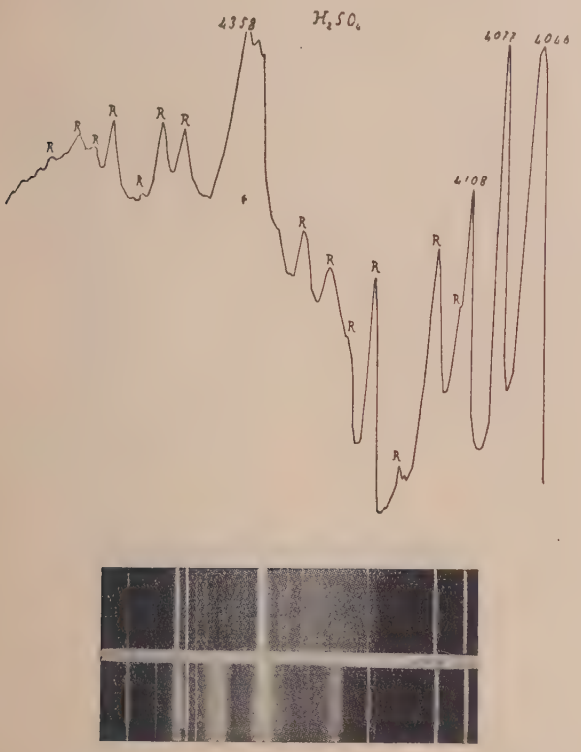


Fig. 1.

loga ricerca. Tali autori osservano, per l'acido solforico concentrato, in luogo di sette frequenze Raman, solo cinque eccitate dalla 4358 Å, e sei eccitate dalla 4047 Å; e in questo secondo gruppo, non notano la riga analoga alla 4438 Å del primo gruppo, che sarebbe, come questa, relativa a una lunghezza d'onda infrarossa tra i 24 e i 25μ, e corrisponderebbe proprio ad una delle frequenze fondamentali dello jone SO_4. Le variazioni di concentrazione provocano, oltre all'apparire delle due bande Ra-

(1) Bell e Fredrickson, «Nature», vol. 125, n. 3163, p. 892.

man caratteristiche dell'acqua nella regione spettrale tra la 4047 Å e la 4916 Å dell'arco a mercurio, eccitate rispettivamente dalla 3650 Å e dalla 4547 Å, spostamenti delle Raman dell'acido, e modificazioni nella distribuzione delle intensità. Delle Raman dell'acqua, quella eccitata dalla 3650 Å si sovrappone ad alcune delle Raman dell'acido, eccitate dalla 4047 Å; l'altra però, corrispondendo la sua componente di maggiore frequenza alla

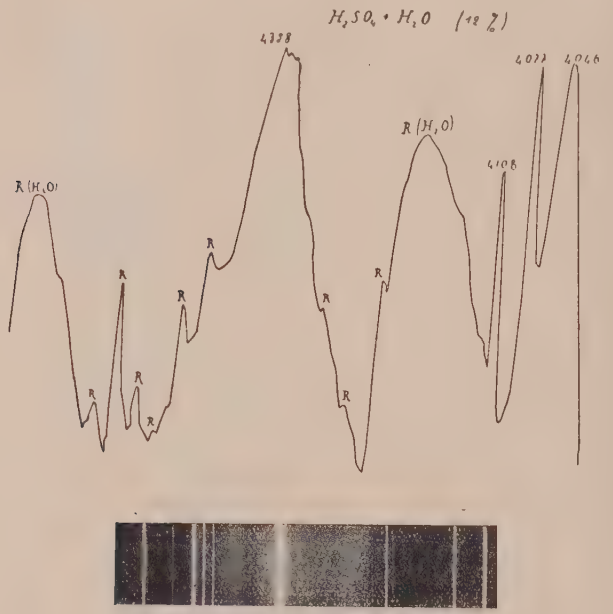


Fig. 2.

lunghezza d'onda di 4657 Å [1] non perturba in nessun modo l'esame dello spettro Raman dell'acido, eccitato dalla 4358 Å. Nè può avere, a tal riguardo, alcuna influenza l'esistenza di una debolissima banda dell'acqua a 4480 Å, comparendo questa in condizioni eccezionali di eccitazione [2].

Infine, a deboli concentrazioni (12 vol. di H_2SO_4 a 1.84 di densità su 88 vol. di H_2O), contrariamente a quanto asseriscono i due autori citati, non si osservano modificazioni essenziali nelle caratteristiche generali dello spettro Raman dell'acido.

Oltre che sull'acido solforico concentrato (di varie provenienze, d: 1.84) ho esteso questa mia ricerca sulle sue soluzioni a varie concentrazioni e

(1) Specchia, « Nuovo Cimento », anno VII, n. 10.
(2) Specchia, loc. cit.

su soluzioni sature dei solfati di litio, di magnesio e di manganese. Data la piccola luminosità dello spettrografo adoperato (apertura: $\frac{1}{10}$ circa) e le dimensioni della sorgente, per una migliore utilizzazione del flusso luminoso, ho adottata la disposizione seguente: la lampada a mercurio era collocata nel fuoco di uno specchio ellittico (semiellissoide di rivoluzione;

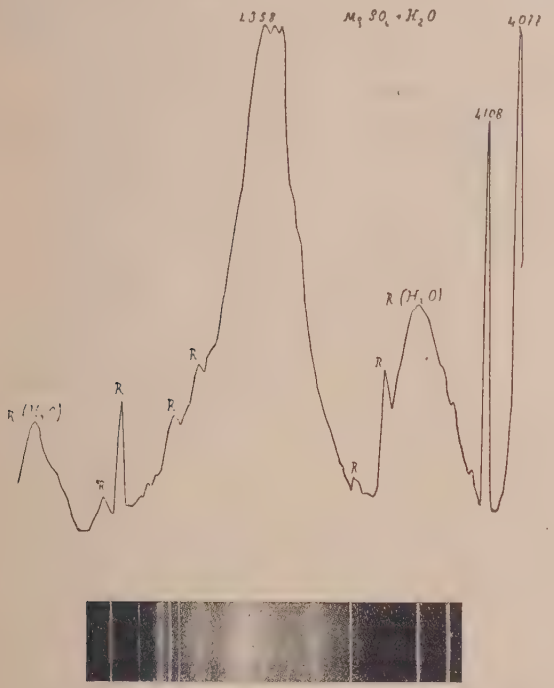


Fig. 3.

lunghezza dei semiassi: 24 cm. e 18 cm.); nel fuoco coniugato era posto il tubo Raman. Questa disposizione presenta su quella di Dadier Kolrausch e Daure, la possibilità di effettuare ricerche Raman su piccole quantità di sostanza, la concentrazione del flusso luminoso avendosi, con sorgente di dimensioni opportune, in una piccolissima regione.

Naturalmente, ad evitare un eccessivo riscaldamento della sostanza in esame, occorre attivare una circolazione d'acqua intorno al tubo che la contiene. Se si tratta di soluzioni acquose, può essere però vantaggioso non far uso di raffreddamento; perchè l'azione depolimerizzante della temperatura, aggiungendosi a quella del soluto, attenua una delle tre componenti della banda Raman dell'acqua.

Nella tabella seguente sono riportate le lunghezze d'onda delle righe Raman dell'H_2SO_4 da me osservate; inoltre son confrontati i valori da me ottenuti con quelli di Bell e Fredrickson.

H_2SO_4 *concentrato*

Eccitatrice		Raman λ	Intensità	λ ultrarossa μ	Valori ottenuti da Bell e Fredrickson
	a	• 4438 Å	media	24.3	4438 Å
	b	• 4468	media	17.7	4470
	c	4491	debolissima	14 7	—
4358.6 Å	*d*	4535	forte	11.2	4542
	e	• 4568	debole	9.5	4566
	f	• 4590	media	8.6	4585
	g	4640	debolissima	7.19	—
	a'	• 4111 Å	media	24.3	—
	b'	• 4140	media	17.9	4142 Å
	c'	4165	debolissima	14.2	1171
4046.8 Å	*d'*	4196	forte	11.3	4203
	e'	• 4225	debole	9.5	4224
	f'	• 4244	media	8 7	4252
	g'	4282	debole	7.3	4276

Il punto indica le Raman caratteristiche dello jone.

Data la dispersione dello spettrografo (27 Å per mm. tra la 4108 Å e la 4358 Å; 40 Å per mm. tra la 4558 Å e la 4916 Å) e la larghezza delle Raman, le lunghezze d'onda di queste, determinate per comparazione con lo spettro del ferro, presentano un'incertezza non inferiore ai 5 Å, che porta, per le corrispondenti lunghezze d'onda ultrarosse, a incertezze che, per le maggiori λ, possono essere notevoli.

Per le soluzioni di H_2SO_4 e per quelle dei solfati è stato esaminato soltanto lo spettro Raman eccitato dalla 4358 Å, perchè la banda dell'acqua, eccitata dalla 3650 Å, si sovrapponeva su alcune delle Raman eccitate dalla 4046 Å.

Si nota nelle soluzioni di H_2SO_4, un progressivo spostamento, con la diluizione, delle Raman verso le maggiori lunghezze d'onda; tale spostamento raggiunge per la concentrazione al 12 % il valore di qualche Å. Correlativamente, si verifica una diminuzione d'intensità della Raman a 4535 Å e un aumento per la Raman a 4568 Å.

In tutte le soluzioni dei solfati esaminate, compaiono, oltre le bande dell'acqua, quattro righe Raman corrispondenti alle frequenze fondamentali dello jone SO_4 le cui lunghezze d'onda sono riportate nella seguente tabella:

Solfati di Mg, Mn, Li *in soluzione*

λ eccitatrice	λ Raman	λ ultrarosse
4358.6 Å	4443 Å	22.9 μ
	4475 Å	16.8 μ
	4556 Å	10 μ
	4580 Å	9 μ

Di tali quattro bande la più intensa è quella a 4556 Å che corrisponde alla frequenza semplice inattiva dello jone SO_4, Inoltre, mentre nei solfati cristallini, come è stato osservato da Krisnamurti [1], il paramagnetismo del catione ha una netta influenza sulle intensità delle righe Raman dello jone SO_4, tale influenza sembra scompaia, come indica il confronto fra gli spettrogrammi Raman da me eseguiti su soluzioni di solfato di litio o di magnesio, e su soluzioni di solfato di manganese, quando il sale paramagnetico è in soluzione.

Le fotografie e le microfotometrie sono relative all'H_2SO_4 concentrato, all'H_2SO_4 in soluzione, e alle soluzioni di solfato di magnesio e di solfato di manganese.

(1) « Nature », vol. 126, n. 3170.

Fisica. — *Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di dimensioni comunque variabili.* Nota III di R. Zoja, presentata [1] dal Corrisp. C. Guidi.

In possesso delle espressioni delle componenti di tensione per il caso nel quale fosse variabile con z la sola altezza del rettangolo, tensioni prodotte da un sistema di sollecitazioni

$$\mathfrak{M}_1 \ , \ \mathfrak{M}_1 \ , \ \mathfrak{M}'_1 \ , \ \mathfrak{T}_1 \ , \ \mathfrak{T}'_1, \ \text{(Nota II)},$$

ho cercato di estendere tali formole al caso della variabilità simultanea delle due dimensioni del rettangolo.

In quanto segue quindi h e b sono due funzioni di z, soddisfacenti alle solite restrizioni, ma del resto completamente arbitrarie ed indipendenti una dall'altra.

Questo problema per la sua notevole complessità (notare tra l'altro che non vi è più alcuna componente di tensione che sia identicamente nulla), non può evidentemente essere affrontato direttamente. Ho potuto giungere alla sua risoluzione partendo invece dalla soluzione del precedente caso, mediante le seguenti considerazioni.

Le espressioni di σ_z e τ_{yz}

$$(1) \qquad \sigma_z = \frac{1}{A}\mathfrak{N} + \frac{y}{J}\mathfrak{M} + \frac{x}{J'}\mathfrak{M}'$$

$$(2) \quad \tau_{yz} = \frac{1}{A}\frac{y}{h}\frac{dh}{dz}\mathfrak{N} - \frac{1}{8}\frac{h}{J}\left(1 - 12\frac{y^2}{h^2}\right)\frac{dh}{dz}\mathfrak{M} + \frac{x}{J'}\frac{y}{h}\frac{dh}{dz}\mathfrak{M}' + \frac{M}{bJ}\mathfrak{T}$$

determinate quando b era costante, devono ovviamente rimanere invariate anche per b variabile con z; d'altra parte in questo caso la τ_{zx} è senz'altro deducibile dalla τ_{yz} col semplice scambio tra gli assi x ed y:

$$(3) \quad \tau_{zx} = \frac{1}{A}\frac{x}{b}\frac{db}{dz}\mathfrak{N} - \frac{1}{8}\frac{b}{J'}\left(1 - 12\frac{x^2}{b^2}\right)\frac{db}{dz}\mathfrak{M}' + \frac{y}{J}\frac{x}{b}\frac{db}{dz}\mathfrak{M} + \frac{M'}{bJ'}\mathfrak{T}'.$$

È inoltre logico generalizzare l'espressione $\tau_{xy} = \frac{M'}{bJ'}\frac{y}{h}\frac{dh}{dz}\mathfrak{T}'$ valida per $b = \text{cost.}$, nella nuova:

$$(4) \qquad \tau_{xy} = \frac{M'}{bJ'}\frac{y}{h}\frac{dh}{dz}\mathfrak{T}' + \frac{M}{bJ}\frac{x}{b}\frac{db}{dz}\mathfrak{T}$$

che dovrà aversi se anche b è funzione di z.

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

A questo punto il problema è già virtualmente risolto, ed infatti mentre è facile constatare che le (1), (2), (3), soddisfano la terza equazione indefinita, la terza equazione ai limiti e le sei relazioni esprimenti l'equilibrio tra le tensioni interne e la sollecitazione esterna relative alla sezione, sarà d'altra parte possibile dedurre la σ_y dalla

$$\sigma_y = -\int\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)dy + \text{cost.}$$

Dopo aver determinata la costante colla seconda equazione ai limiti, ed aver eseguite opportune semplificazioni si deduce

$$(5)\quad \sigma_y = \frac{1}{A}\left[\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{db}{dz}\right)^2 - \frac{1}{b}\frac{M}{A}\frac{db}{dz}\frac{db}{dz} + \frac{M}{A}\frac{d^2b}{dz^2}\right]\mathfrak{M} -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{y}{J}\left[\left(1 - 8\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)^2 + 4\frac{1}{b}\frac{M}{A}\frac{db}{dz}\frac{db}{dz} - 4\frac{M}{A}\frac{d^2b}{dz^2}\right]\mathfrak{M} +$$

$$+ \frac{x}{J'}\left[\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{db}{dz}\right)^2 - 3\frac{1}{b}\frac{M}{A}\frac{db}{dz}\frac{db}{dz} + \frac{M}{A}\frac{d^2b}{dz^2}\right]\mathfrak{M}' +$$

$$+ 2\frac{M}{bJ}\frac{y}{b}\frac{db}{dz}\mathfrak{C}.$$

Si avrà infine scambiando tra loro gli assi x ed y

$$(6)\quad \sigma_x = \frac{1}{A}\left[\frac{x^2}{b^2}\left(\frac{db}{dz}\right)^2 - \frac{1}{b}\frac{M'}{A}\frac{db}{dz}\frac{db}{dz} + \frac{M'}{A}\frac{d^2b}{dz^2}\right]\mathfrak{M} -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{x}{J'}\left[\left(1 - 8\frac{x^2}{b^2}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)^2 + 4\frac{1}{b}\frac{M'}{A}\frac{db}{dz}\frac{db}{dz} - 4\frac{M'}{A}\frac{d^2b}{dz^2}\right]\mathfrak{M}' +$$

$$+ \frac{y}{J}\left[\frac{x^2}{b^2}\left(\frac{db}{dz}\right)^2 - 3\frac{1}{b}\frac{M'}{A}\frac{db}{dz}\frac{db}{dz} + \frac{M'}{A}\frac{d^2b}{dz^2}\right]\mathfrak{M} +$$

$$+ 2\frac{M'}{bJ'}\frac{x}{b}\frac{db}{dz}\mathfrak{C}'.$$

Per verifica si può constatare che le (6), (4), (3), soddisfanno la prima equazione ai limiti.

Le espressioni generali ora trovate si presterebbero ad una particolareggiata discussione; per brevità mi limiterò alle seguenti osservazioni:

1) La σ_z ha la stessa forma che per il solido prismatico.

2) La τ_{yz} (e analogamente per τ_{zx}) oltre al noto termine in $\mathfrak{C}$, il quale dipende solo dalle dimensioni della sezione trasversale, contiene termini in $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, tutti moltiplicati per $\frac{db}{dz}$.

3) La τ_{xy} consta di due termini il primo con $\frac{dh}{dz}\mathcal{T}'$ il secondo con $\frac{db}{dz}\mathcal{T}$.

4) La σ_y (e analogamente per la σ_x) dipende da $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ e $\mathcal{T}$ ma mentre il termine in $\mathcal{T}$ è funzione di $\frac{dh}{dz}$ solamente, tutti gli altri contengono $\left(\frac{dh}{dz}\right)^2, \frac{dh}{dz}\frac{db}{dz}, \frac{d^2h}{dz^2}$, e quindi in molti casi pratici potranno essere trascurati.

5) Riguardo alla distribuzione delle diverse componenti di tensione in funzione di x ed y noterò solamente che particolarmente interessante si presenta la legge di variazione di σ_y, in quanto che limitandoci a considerare il caso $b = \text{cost.}$ e per le sollecitazioni $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ e $\mathcal{T}$, dovrebbe essere possibile una verifica sperimentale col metodo della luce polarizzata dei risultati ottenuti.

Fisica (Fisica teorica). — *Sopra le relazioni che intercedono fra le equazioni variazionali di Eulero e le equazioni canoniche della Meccanica.* Nota di R. EINAUDI, presentata [1] dal Corrisp. A. POCHETTINO.

È noto che le equazioni di Maxwell delle onde elettromagnetiche e le equazioni di Dirac delle onde di materia si possono ottenere da un principio variazionale; e cioè esiste una funzione L (delle componenti Φ_1, Φ_2, Φ_3 del potenziale vettore, del potenziale scalare Φ_0, delle soluzioni ψ delle equazioni di Dirac e delle complesse coniugate ψ^*, nonchè delle derivate di queste grandezze rispetto alle coordinate spaziali x_1, x_2, x_3 e alla coordinata tempo t), tale che le equazioni di Maxwell e quelle di Dirac si ottengono imponendo che sia nulla la variazione dell'$\int_{t_0}^{t_1}\int_V L\, dV\, dt$, colla condizione che al contorno le variazioni delle Φ e delle Ψ siano nulle. Le Φ e le Ψ soddisfano allora le equazioni di Eulero:

$$(1) \qquad \frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial t}} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_i}} = 0\,, \quad (\mu = 1,2,3,0)$$

e analoghe per le Ψ.

Data l'importanza delle equazioni (1) nel problema della quantizzazione delle onde elettromagnetiche e materiali, non credo inopportuno rilevare

(1) Nella seduta del 17 maggio 1931.

una relazione intima che intercede tra *le più generali equazioni del tipo* (1) *e le equazioni canoniche della Meccanica Razionale.*

Siano Q_a delle funzioni di x_1, x_2, x_3, t (distinte l'una dall'altra coll'indice a), soddisfacenti le equazioni:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial L\left(Q_a, \frac{\partial Q_a}{\partial t}, \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}\right)}{\partial Q_a} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial t}} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} = 0 .$$

Posto:

$$\text{(II)} \qquad P_a = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial t}}$$

e

$$\text{(II')} \qquad H = \sum_a P_a \frac{\partial Q_a}{\partial t} - L$$

supponiamo: 1° che dalle (II) si possano ricavare le $\frac{\partial Q_a}{\partial t}$ in funzione delle Q_a, delle P_a e delle $\frac{\partial Q_a}{\partial x_i}$ o almeno che la H si possa scrivere come funzione delle sole $Q_a, P_a, \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}$; 2° che esista l'$\int_{S_\infty} H\,dV$ esteso a tutto quanto lo spazio e che le $\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}}$ si annullino all'infinito di ordine $> \frac{1}{2}$. (Osservo che queste ipotesi sono, per ragioni fisiche, verificate nel caso delle onde elettromagnetiche e materiali).

Con queste ipotesi, mi propongo di dimostrare che: se si sviluppano le Q_a e le P_a in serie di funzioni $u^r(x_1, x_2, x_3)$ ortogonali e normalizzate in tutto lo spazio[1] $\left(\int_{S_\infty} u^r u^s\,dV = \delta_s^r\right)$, secondo lo schema:

$$\text{(III)} \quad Q_a = \sum_r q_a^r(t)\,u^r(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad \text{(III')} \quad P_a = \sum_r p_a^r(t)\,u^r(x_1, x_2, x_3),$$

(1) Come funzioni ortogonali si possono assumere, per esempio, le funzioni

$$U_{pqr}(x_1, x_2, x_3) = e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}} H_p(x_1) H_q(x_2) H_r(x_3),$$

essendo H_n l'ennesimo polinomio di Hermite. Per lo sviluppo in serie delle U_{pqr} è sufficiente che le Q_a e le P_a siano continue colle derivate prime e seconde e che siano integrabili col loro quadrato in tutto quanto lo spazio. Queste condizioni sono verificate nel caso delle onde elettromagnetiche e materiali.

le variabili q_a^r *e* p_a^r *sono variabili canoniche coll'Hamiltoniana* $\overline{\mathrm{H}} = \int_{S_\infty} \mathrm{H}\, dV$,

e le equazioni $\frac{dq_a^r}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial p_a^r}$; $\frac{dp_a^r}{dt} = -\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial q_a^r}$ formano così un sistema di equazioni equivalenti a (1).

Calcoliamoci a tal uopo il $\delta\mathrm{H}$; da (II′) ricaviamo:

$$\delta\mathrm{H} = \sum_a \left(\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t}\delta\mathrm{P}_a + \mathrm{P}_a\,\delta\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Q}_a}\delta\mathrm{Q}_a - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t}}\delta\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}}\delta\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i} \right).$$

Ricordando la (II), questa relazione diventa:

$$(2) \qquad \delta\mathrm{H} = \sum_a \left(\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t}\delta\mathrm{P}_a - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Q}_a}\delta\mathrm{Q}_a - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}}\delta\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i} \right).$$

D'altra parte dalla ipotesi che H sia solo funzione delle $\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}$, P_a e Q_a si deduce che

$$(2') \qquad \delta\mathrm{H} = \sum_a \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{P}_a}\delta\mathrm{P}_a + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Q}_a}\delta\mathrm{Q}_a + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}}\delta\frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i} \right).$$

Dal confronto di (2) e (2′) si deduce:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{P}_a} = \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Q}_a} = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Q}_a} \qquad (3') \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}} = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}}.$$

Ciò posto, osserviamo che, tenendo conto di (3) (3′) e (II), possiamo scrivere la (I) nella forma:

$$(\mathrm{IV}') \qquad \frac{\partial \mathrm{P}_a}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Q}_a} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial x_i}} \right].$$

Calcoliamoci ora, tenendo conto di (III′) e (IV), la $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_a^r}$; si ottiene:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_a^r} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{P}_a}\frac{\partial \mathrm{P}_a}{\partial p_a^r} = \frac{\partial \mathrm{Q}_a}{\partial t}u^r = \sum_s \frac{dq_a^s}{dt}u^s u^r.$$

Integriamo ambo i membri della precedente relazione in tutto quanto lo spazio, tenendo conto delle relazioni di ortogonalità e di normalizzazione delle u; si ottiene:

$$(V) \qquad \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_a^r} = \sum_s \frac{dq_a^s}{dt} \int_{S_\infty} u^s u^r \, dV = \sum_s \frac{dq_a^s}{dt} \delta_s^r = \frac{dq_a^r}{dt} .$$

Così resta dimostrato che le q_a^r e le p_a^r soddisfano la prima delle equazioni canoniche.

Calcoliamoci ora la $\frac{\partial H}{\partial q_a^r}$; si ottiene:

$$(4) \qquad \frac{\partial H}{\partial q_a^r} = \frac{\partial H}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \frac{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}}{\partial q_a^r} .$$

Osserviamo che, tenendo conto di (III), si può scrivere:

$$\int_{S_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} \right) dV = \int \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} \frac{dx_i}{dn} d\sigma -$$

ove l'integrazione va estesa a una superficie all'∞, sia Σ_∞

$$- \int_{S_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} dV = \int_{\Sigma_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} u^r \frac{dx_i}{dn} d\sigma - \int_{S_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} dV .$$

Ma dalla condizione di ortogonalità e di normalizzazione delle u, si deduce che all'infinito esse debbono annullarsi di ordine $\geqq 3/2$; e siccome le $\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}}$ si annullano *per ipotesi* di ordine $> \frac{1}{2}$, se ne deduce che $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} u^r$ si annulla di ordine > 2 e quindi che si annulla l'$\int_{\Sigma_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} u^r \frac{dx_i}{dn} d\sigma$. Si ottiene così:

$$(4') \qquad \int_{S_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} \right) dV = - \int_{S_\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} dV .$$

Integriamo ambo i membri di (4) in tutto quanto lo spazio, tenendo conto del risultato (4′); si ottiene:

$$(4'') \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_a^r} = \int_{S_\infty} \left[\frac{\partial H}{\partial Q_a} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_a}{\partial x_i}} \right] \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} \, dV .$$

Applichiamo la (IV′) alla (4″); si ottiene:

$$(V') \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_a^r} = - \int_{S_\infty} \frac{\partial P_a}{\partial t} \frac{\partial Q_a}{\partial q_a^r} \, dV = - \sum_s \frac{dp_a^s}{dt} \int_{S_\infty} u^s \, u^r \, dV = - \sum_s \frac{dp_a^s}{dt} \delta_s^r = - \frac{dp_a^r}{dt} .$$

Così resta dimostrato che le q_a^r e le p_a^r soddisfano anche la seconda delle equazioni canoniche relative all'Hamiltoniano $\bar{H}$.

Questo risultato mi pare offra interesse in parecchi problemi di Fisica per quanto riguarda il passaggio alla loro interpretazione quantistica. Ogniqualvolta infatti si presentino in un problema di Fisica delle grandezze Q_a soddisfacenti la (I), si può senz'altro passare allo studio quantistico del problema, introducendo delle grandezze P_a definite da (II), sviluppando in serie secondo lo schema (III) e (III′), associando alle q_a^r e alle p_b^s delle matrici (od operatori) soddisfacenti la condizione:

$$(VI) \qquad p_b^s \, q_a^r - q_a^r \, p_b^s = \frac{h}{2\pi i} \delta_a^b \delta_s^r$$

e assumendo come Hamiltoniana quantistica la funzione $\bar{H}$ definitiva da (II′) e (II″), in cui alle q_a^r e p_b^s si sostituiscano i corrispondenti operatori soddisfacenti la VI.

Si osservi inoltre che la quantizzazione delle onde elettromagnetiche eseguita col metodo sopra esposto, tenendo conto però della possibilità recentemente dimostrata di annullare il potenziale scalare, differisce dalla quantizzazione effettuata col metodo di Fermi, in quanto il Fermi giunge a stabilire delle equazioni canoniche per i potenziali nell'ipotesi restrittiva che i potenziali siano sviluppabili in serie del tipo $\Phi_i = \sum_s Q_{si} \cos \Gamma_{si}$, cioè che il campo elettromagnetico sia il prodotto della sovrapposizione di onde piane, mentre è sufficiente che i potenziali siano sviluppabili in serie di funzioni ortogonali in tutto lo spazio, per giungere alla quantizzazione del campo e alla relativa equazione di Schrödinger.

Si noti finalmente che dalla (VI) si deducono in modo naturale le relazioni di permutazione per gli operatori associati alla Q_a e alle P_a:

$$P_a(x, y, z, t)\, Q_b(x', y', z', t) - Q_b(x', y', z', t)\, P_a(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} \delta_b^a\, \delta(x - x')\, \delta(y - y')\, \delta(z - z'), \ldots$$

relazioni stabilite da Heisenberg e Pauli per altra via e poste a base della loro elettrodinamica quantistica.

Fisica (Ottica). — *Sul calcolo di una lente.* Nota di GOFFREDO VITALI, presentata [1] dal Corrisp. P. BURGATTI.

Il metodo seguito da G. B. Pacella per il calcolo di una lente piano-convessa asferica [2] porta a risultati molto semplici quando si sostituisce alla faccia piana una superficie sferica avente il centro nel fuoco della lente.

Poichè i raggi che convergono nel fuoco sono normali alla superficie sferica e quindi attraversando questa superficie non subiscono alcuna deviazione, il problema si riduce alla determinazione della superficie di separa-

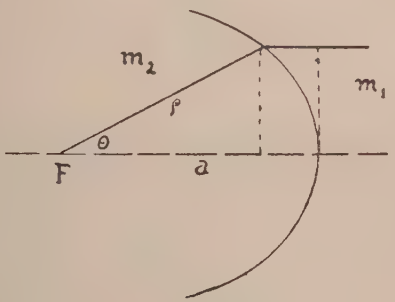


Fig. 1.

zione di due mezzi trasparenti m_1 e m_2 attraverso i quali un fascio di raggi paralleli monocromatici si trasforma in un fascio di raggi convergenti in un punto prefissato F.

Consideriamo una sezione meridiana di questa superficie riferendola alle coordinate polari aventi per polo il punto F e per asse polare la retta passante per F parallela alla direzione dei raggi che attraversano il mezzo m_1. Indichiamo con a la distanza di F dall'intersezione della curva meridiana con l'asse polare, con ρ e θ le coordinate di un punto della curva meridiana e con v_1 e v_2 rispettivamente le velocità di una data luce monocromatica nei due mezzi m_1 ed m_2 (fig. 1).

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) G. B. PACELLA, *Metodo semplice per il calcolo di una lente piano-convessa asferica*, « Atti della R. Acc. dei Lincei », 1930, p. 436.

Se i raggi paralleli attraversano il mezzo m_1 e dopo la rifrazione passano nel mezzo m_2 concorrendo nel punto F, i cammini ottici fra una superficie d'onda piana perpendicolare all'asse del mezzo m_1 ed il punto F devono essere uguali e quindi si deve avere:

$$\frac{a - \rho \cos\theta}{v_1} + \frac{\rho}{v_2} = \frac{a}{v_2}$$

da cui:

$$\rho = \frac{a\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)}{1 - \frac{v_2}{v_1}\cos\theta}.$$

Indicando con n l'indice di rifrazione del mezzo m_1 relativamente al mezzo m_2, cioè ponendo:

$$n = \frac{v_2}{v_1}$$

si ha:

$$\rho = \frac{a(1 - n)}{1 - n\cos\theta}.$$

La curva meridiana è quindi una conica avente per eccentricità l'indice di rifrazione del mezzo m_1 relativamente al mezzo m_2, e precisamente per n positivo minore di 1 la curva meridiana è un'ellisse avente un fuoco in F e per eccentricità n. Il valore massimo di θ perchè la superficie di separazione dei due mezzi sia investita dai raggi paralleli e l'angolo il cui coseno è n perchè in questo caso la corda che congiunge gli estremi della curva meridiana e il diametro minore dell'ellisse.

Per n maggiore di 1 e per $\cos\theta$ maggiore di $\frac{1}{n}$ la curva meridiana è un ramo di iperbole avente un fuoco in F e che rivolge la convessità verso F.

Come caso particolare si può facilmente risolvere il problema di determinare le due superficie di una lente stigmatica per due punti coniugati A_1 e A_2 posti sull'asse a distanza finita. Infatti se per semplicità supponiamo che la lente sia immersa nell'aria e che, per il raggio di luce che si considera, l'indice di rifrazione della sostanza di cui è formata la lente relativamente all'aria sia n (maggiore di 1) le superficie che limitano la lente hanno per sezione meridiana due rami di iperboli aventi per eccentricità n ed un fuoco rispettivamente in A_1 ed in A_2. Attraverso questa lente i raggi uscenti da A_1 sono paralleli e, uscendo dalla lente convergono

in A_2 (fig. 2). Le superficie della lente risultano ben determinate quando sono noti i punti A_1 e A_2 e le intersezioni della retta che li congiunge con le superficie che limitano la lente. Fissati questi punti si può dedurre qual'è il diametro massimo che può essere raggiunto dalla lente.

Il problema non si presenta in modo sostanzialmente diverso quando si voglia determinare la superficie che limita con una superficie sferica una lente capace di trasfosmare un fascio di raggi paralleli in un fascio di raggi divergenti i cui prolungamenti passino tutti per il centro F della superficie sferica.

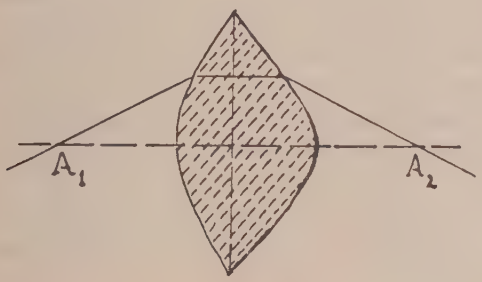


Fig. 2.

In questo caso il punto F deve appartenere al mezzo m_1 attraversato dai raggi paralleli ed il raggio della sfera deve essere maggiore della massima distanza di F dai punti dell'altra superficie.

Riferendo una sezione meridiana della superficie cercata alle coordinate polari aventi per polo il punto F e per asse polare la retta passante per F parallela ai raggi che attraversano il mezzo m_1, indicando con n l'indice di rifrazione del mezzo m_1 relativamente al mezzo m_2, e con a il raggio della superficie sferica, si ha:

$$na = n\rho \cos\theta + (a - \rho)$$

cioè

$$\rho = \frac{a(1-n)}{1 - n\cos\theta}.$$

Si ottiene quindi la stessa relazione del primo caso considerato.

Fisica (Fisica teorica). — *Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità.* - III. *Ancora qualche conseguenza delle equazioni unitarie.* Nota di PAOLO STRANEO presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In due recentissime Note di questi Rendiconti ho trattato il *problema unitario* nell'ordine di idee secondo il quale da molti anni lo aveva perseguito la fisica teorica *macroscopica*, fino a porre un sistema di equazioni che soddisfa a *tutti* i requisiti che allora erano stati posti: 1° *di costituire una sintesi geometrica dei fenomeni fisici;* 2° *di ridursi* **rigorosamente** *alle equazioni della gravitazione einsteiniana in assenza di elettricità*; e 3° *di esser nel più perfetto accordo possibile colla teoria elettromagnetica di Maxwell.*

In questa Nota, in attesa di poter pubblicare una trattazione sistematica abbastanza diffusa di tutta la teoria, mi permetto di esporre ancora qualche considerazione, per brevità prevalentemente solo qualitativa, oltre che su alcune delle più immediate e semplici *conseguenze* della nuova teoria, anche sulla sua *portata generale.*

LE EQUAZIONI E LO SPAZIO-TEMPO DELLA TEORIA UNITARIA.

1. Da un punto di vista puramente formale coteste equazioni e la connessione del rispettivo continuo, colle notazioni delle precedenti Note sono:

$$(1) \qquad L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} ,$$

$$(A) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} + \delta^{\alpha}_{\mu} \psi_{\nu} .$$

Più esplicitamente, e in forma più adatta all'interpretazione fisica, abbiamo sostituito la prima di esse col sistema:

$$(I) \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = - k (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu})$$

$$(II) \qquad \frac{\partial \psi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Psi_{\mu\nu}$$

$$(III) \qquad \Psi^{\mu\nu}{}_{\nu} = J^{\mu} ,$$

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

del quale è stata rilevata la caratteristica di ridursi alle equazioni einsteiniane:

$$(2) \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = - k T_{\mu\nu}$$

quando sia $\Psi_{\mu\nu} = 0$, oppure, ciò che è nel nostro caso equivalente, $\psi_\nu =$ *gradiente di uno scalare*. Di qui la *duplice* interpretazione *geometrica e fisica*, nelle quali gli eventuali tensori (a divergenza nulla) $T_{\mu\nu}$ e J^μ funzionano da arbitrari dati geometrici o da arbitrari dati fisici.

2. Lo spazio–tempo in questa teoria è caratterizzato dalla sua metrica e dal vettore ψ_ν. Qualunque sia quest'ultimo, tutte le connessioni rappresentate dalla forma (*A*) hanno lo stesso parallelismo (Eisenhart, *Non Riemanian Geometry*, p. 30, equazioni 12,1). Reciprocamente, data la connessione, risultano sempre determinate [1], nella peggiore ipotesi a meno di un fattore costante, le $g_{\mu\nu}$ e quindi senz'altro completamente determinati i simboli $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}$ e il vettore ψ_ν.

La sola indeterminazione è quella sulla quale abbiamo insistito nelle Note precedenti, e che è in fondo nella natura della questione geometrica e fisica: che formalmente tutto rimane invariato quando alle ψ_ν si aggiungesse il gradiente di uno scalare qualsiasi.

Moto di un punto libero materiale e elettrizzato.

3. È noto che in uno spazio a connessione asimmetrica non si ha in generale la coincidenza fra le *linee a direzione costante* (autoparallele, cammini, *paths*, rette generalizzate) e le *geodetiche* (linee di minima distanza).

Ragionamenti perfettamente analoghi, ma solamente alquanto più generali di quelli che, nella teoria della sola gravitazione, conducono a stabilire che la *linea oraria* rappresentativa del moto di un *punto puramente materiale e libero* debba esser la *geodetica* passante per il luogo occupato dal punto in un dato istante, e avente in quel luogo la direzione coincidente con quella dell'elemento rappresentativo del moto del punto stesso in quell'istante, conducono nel nostro caso più generale ad assumere che la corrispondente linea oraria debba essere l'analoga *autoparallela*; la quale, solo in assenza della torsione (fisicamente solo in assenza di fenomeni elettrici) coinciderà colla precedente geodetica.

(1) E. Bompiani, *Trasformazioni puntuali che conservano il parallelismo di Levi–Civita*. Questi « Rendiconti », vol. XXIX, 1° sem. 1920.

Coteste *autoparallele*, (dipendendo essenzialmente dalla parte simmetrica della connessione) soddisfano alle equazioni differenziali parametriche, (Eisenhart, op. cit., p. 14):

$$\frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\lambda\end{matrix}\right\}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\right)-\frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{d^2x^\mu}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \nu\lambda\end{matrix}\right\}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\right)=0,$$

che devono venir considerate in generale in luogo delle corrispondenti classiche equazioni delle geodetiche.

4. Le equazioni poi caratteristiche del moto di un *punto materiale e elettrizzato* potranno altrettanto semplicemente dedursi generalizzando le analoghe espressioni classiche valevoli nel campo gravitazionale ove esista anche un campo elettromagnetico, per es. quelle del § 80 della *Relativitätstheorie* di Eddington:

$$-\rho^*\left\{\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right\}=F^\mu{}_\nu\rho_0\frac{dx^\nu}{ds},$$

nelle quali ρ^* sta a indicare la densità invariante della massa, e ρ_0 le densità della carica elettrica. Basterà infatti sostituire alle $F^\mu{}_\nu$ le Ψ^μ_ν, che loro corrispondono nella nostra teoria, e alle quantità fra parentesi, il cui significato in rapporto colle geodetiche è evidente, la corrispondente quantità *generalizzata* in rapporto alle autoparallele. E ciò non presenta alcuna difficoltà, specialmente usando l'accorgimento di porre, come è sempre possibile (p. 57 della citata opera di Eisenhart) l'equazione differenziale delle autoparallele sotto la forma delle geodetiche:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0,$$

tenendo però il debito conto del fatto che il parametro s non significa più affatto la lunghezza dell'arco, relativo alla metrica di cui $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}$ rappresentano i simboli di Christoffel.

Il problema statico analogo a quello di Schwarzschild e il corrispondente moto planetario.

5. Anche nella nostra teoria presenta un particolare interesse il *caso statico* a cagione della sua notevole maggior semplicità rispetto al caso generale. Tutti i teoremi valevoli per esso nella teoria einsteiniana hanno qui il loro riscontro generalizzato.

In particolare il caso della simmetria attorno ad un punto dello spazio fisico (centro), che rappresenta la più immediata generalizzazione del notissimo problema di Schwarzschild, si risolve con notevole facilità.

Dovranno in primo luogo esser nulli i dati del problema $T_{\mu\nu}$ e J^{μ} fuori del punto di singolarità.

In tali condizioni il vettore ψ_{ν} è costituito dalle sole componenti ψ_4 che, come anche le $g_{\mu\nu}\,(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ potrà esser ridotto a dipendere da una sola coordinata r.

A cagione della (II) sussisterà solamente una $\Psi_{,4} = -\frac{\partial \psi_4}{\partial r}$ nella direzione delle r. Il tensore energetico elettromagnetico risulta allora senz'altro identico a quello del caso einsteiniano. Ne segue che per le (1) la metrica e quindi il potenziale gravitazionale saranno einsteiniani. Lo *spazio–tempo* però sarà distorto a cagione del vettore ψ_4, funzione decrescente di r.

6. L'effetto di cotesta distorsione su di un punto materiale (pianeta), rotante intorno al centro (sole), è senz'altro intuitivo, perchè, per quanto abbiamo detto or ora, dobbiamo concludere che siano rimaste invariate *tutte le geodetiche* e in particolare quella in forma di elica ellittica e leggermente deformata (rotazione del perielio) che, nel caso puramente gravitazionale rappresentava la linea oraria del moto del punto.

Tale linea però non è ormai più la linea oraria del punto mobile. La linea oraria è invece una *autoparallela*, una *paths* che potremo approssimativamente dedurre componendo la geodetica precedente colla distorsione ψ_4.

La nuova linea oraria avrà quindi un passo più rapido o meno rapido e conseguentemente il punto si muoverà più lento o più veloce che nel caso puramente einsteiniano. Anche lo spostamento del perielio potrà risultare leggermente alterato. Ma ci manca lo spazio per sviluppare i calcoli relativi.

Brevi considerazioni generali.

7. Come fu ripetutamente detto, la nuova teoria esposta rappresenta una conseguente teoria unitaria svolta in un ordine di idee che può riguardarsi la più semplice generalizzazione di quello in cui fu posta la teoria einsteiniana della sola gravitazione.

Per coloro che sono abbastanza addentro nello spirito di quella precedente teoria, il complesso dei caratteri essenziali e della portata della nuova dovrebbero apparire senz'altro chiari.

Ma per coloro che non si sono dedicati particolarmente a coteste questioni, ci si consenta un breve richiamo fondamentale.

Le equazioni einsteiniane della gravitazione (2), quando si consideri *nullo* il tensore a destra, esprimono, come è notissimo, l'insieme dei fenomeni gravitazionali di masse *puntiformi disgregate*, le quali troverebbero la loro *localizzazione* in *singolarità* dello *spazio–tempo* e la loro *determinazione quantitativa* nelle costanti di integrazione delle equazioni differenziali stesse.

Il problema degli n corpi costituirebbe un caso particolarissimo di quelli contenuti virtualmente nelle equazioni considerate.

Ed è sotto quella forma che le utilizza la meccanica celeste.

Se quindi la nostra fisica dei corpi materiali si potesse veramente ricondurre a forze di tipo gravitazionale fra le molecole, noi dovremmo poterne esaurire, almeno concettualmente, *tutto* lo studio senza ricorrere all'ausilio di nessun tensore più o meno artificiosamente introdotto nel membro a destra delle equazioni di Einstein.

Ma disgraziatamente le cose non sono tanto semplici.

Ed è così che, per ovviare alle infinite difficolta che si presenterebbero quando si volesse applicare in modo assoluto il criterio, che abbiamo detto convenire le masse disgregate, e per ottemperare con discreta facilità ai grandi principi conservativi della nostra meccanica, si è introdotto nelle equazioni gravitazionali il tensore energetico materiale $T_{\mu\nu}$.

In forma ancora più impellente si presenta l'analoga difficoltà per i fenomeni di tipo elettromagnetico, e ad essa si ovvia solamente colla introduzione del vettore ausiliario *ipercorrente* J^{μ}.

Ora nessuno vorrà certo dubitare che la sintesi geometrica dei fenomeni fisici non avrebbe un carattere nettamente superiore se in essa potessero intervenire, come rappresentanti della materia e dell'elettricità, *le sole singolarità geometriche del continuo* (colle rispettive costanti di integrazione), come abbiamo detto potersi realizzare nel caso della sola gravitazione di masse puntiformi disgregate.

Ma nell'attuale impossibilità di raggiungere questo, forse ancora assai lontano, ideale, come si è affermata la teoria einsteiniana della materia, dovrebbe potersi affermare l'attuale teoria unitaria che rappresenta un'analoga sintesi, dello stesso tipo e ordine.

Chimica. — *I solfati doppî del bismuto coi metalli alcalini.* II. *Solfati doppî del bismuto e litio* [1]. Nota di L. Malossi, presentata [2] dal Socio F. Zambonini.

Dopo le ricerche fondamentali di G. Bodman, estese in seguito, da Urbain e Lacombe, che misero bene in evidenza l'isomorfismo del bismuto con i metalli delle terre rare, appariva interessante lo studiare alcune serie di composti di bismuto, in relazione con quelli corrispondenti dei metalli delle terre rare.

Nel nostro Istituto [3] è stato intrapreso uno studio sistematico dei solfati doppî dei metalli delle terre rare con i metalli alcalini, ed è per questo che indagini parallele sono state rivolte a definire più esattamente, di quanto non si sia fatto prima, le condizioni di esistenza dei solfati doppî del bismuto con i metalli alcalini.

L'esame dei solfati doppî del bismuto con i metalli alcalini è stato intrapreso da vari sperimentatori [4], ma costoro si sono limitati a prendere in esame solo quelli del bismuto con il sodio, potassio ed ammonio, ed inoltre hanno ottenuto questi sali in condizioni speciali e del tutto differenti dal metodo seguito nel nostro Istituto [5].

Con i metodi usati per i solfati doppî dei metalli delle terre rare Caglioti e Stolfi [6] e poi Caglioti ed io [7] abbiamo preparato e studiato i solfati doppî di bismuto e potassio, e di bismuto ed ammonio.

Nella presente Nota io descriverò brevemente i risultati ottenuti dallo studio parziale del sistema $Bi_2(SO_4)_3 - Li_2SO_4 - H_2O$, sistema che presentava uno speciale interesse, perchè solfati doppi di bismuto e litio non risultano descritti, almeno nella bibliografia che ho potuto consultare.

Ho cominciato con l'eseguire alcune esperienze preliminari.

A tale scopo, a due soluzioni sature di nitrato di bismuto, acide per acido nitrico, messo nella quantità appena sufficiente per evitare l'idrolisi,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 16 maggio 1931.

(3) Zambonini ed allievi, *Ricerche sui solfati doppî dei metalli delle terre rare coi metalli alcalini*, pubblicate dal II sem. 1924 in poi « Rend. R. Accad. Lincei », serie 5ª e 6ª.

(4) Heintz, « Pogg. », 63, (1884) 82; Remsen e Brigham, « Am. Chem. J. », 14, (1892), 170.

(5) Loc. cit.

(6) « Rend. R. Accad. Lincei », vol. V, serie 6ª, 1° sem., p. 806.

(7) « Rend. R. Accad. Lincei », vol. X, serie 6ª, 2° sem., p. 92.

ho aggiunto soluzioni sature di solfato di litio nelle proporzioni stechiometriche per ottenere i composti 1 : 1 e 1 : 3.

Dopo qualche giorno, dalle due soluzioni si sono separati dei cristalli che apparivano identici al microscopio, e che all'analisi hanno dato la stessa composizione centesimale.

Si tratta di cristalli aghiformi, sovente con una coppia di facce parallele dominanti sulle altre della zona di allungamento dotati in massa di

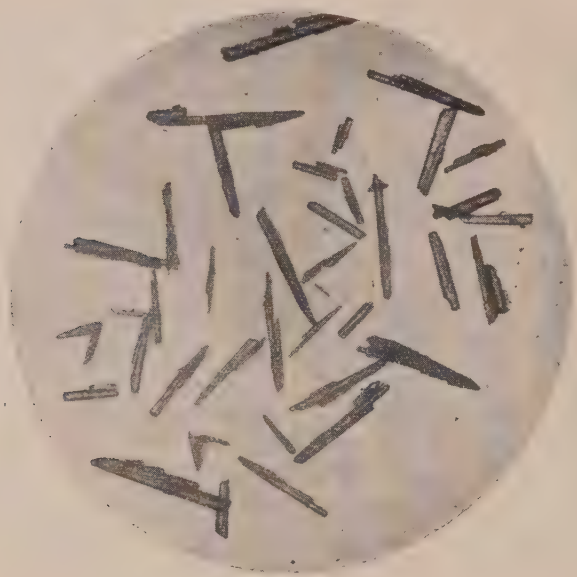


Fig. 1.

un nitido splendore setaceo, e che possono raggiungere anche la lunghezza di 3 mm.

Presentano forte birifrangenza ed estinguono parallelemente alla direzione di allungamento, che è otticamente positiva.

Nella zona di allungamento, che possiamo considerare come [001], sono presenti le due faccie di un pinacoide e le quattro di un prisma, che può assumersi come {110}.

Le faccie del prisma fanno con quella adiacente del pinacoide un angolo di 67°26′, (media di parecchie misure concordanti, prese al goniometro, ad onta delle condizioni poco favorevoli presentate dai cristalli).

L'angolo di due faccie adiacenti del prisma è risultato uguale a 45°10′.

In alcuni cristalli si sono notate delle faccette terminali, ma la loro piccolezza e lo scarso splendore non hanno permesso misure attendibili.

All'analisi i due depositi cristallini hanno dato:

	Trovato Deposito dalla soluzione nel rapporto 1 : 1	1 : 3	Calcolato per $Bi_2O_3SO_3 \cdot Li_2SO_4 \cdot 2H_2O$
Bi	60.10	60.30	60.39
Li	1.95	2.10	2.02
SO_4	27.88	27.65	27.76
H_2O	5.37	5.20	5.20

Lo studio sistematico del sistema $Bi_2(SO_4)_3 — Li_2SO_4 — H_2O$ è stato fatto mettendo a contatto di una stessa quantità di solfato di bismuto soluzioni di solfato di litio da soprassature a gradatamente diluite.

Questi miscugli vennero messi in tante beute che furono poste in un termostato a rotazione e mantenute alla temperatura di 25°.

I metodi analitici furono i seguenti: il bismuto fu dosato come solfuro, il litio come solfato, il residuo solforico con cloruro di bario.

L'acqua fu determinata in istufa per perdita di peso, anzi avendo, come si vedrà in seguito, ottenuti sali basici, ho potuto eliminarla completamente alla temperatura di 180°.

I risultati ottenuti per l'isoterma di 25° sono riuniti nella seguente

Tabella I

N. esperienza	Composizione fase liquida				Composizione fase solida					Costituenti del corpo di fondo
	$Bi_2(SO_4)_3$	Li_2SO_4	H_2O	$\frac{Li_2SO_4}{H_2O}$	Bi	Li	SO_4	H_2O	$\frac{Bi}{Li}$	
1	0.16	36.20	63.64	0.568	36.50	4.10	52.70	6.75	0.294	
2	0.16	32.50	67.34	0.482	36.90	3.93	52.50	6.60	0.310	$Li_3Bi(SO_4)_3 \cdot 2H_2O$
3	0.15	29.42	71.45	0.411	37.55	3.78	52.20	6.52	0.329	
4	0.15	26.10	73.75	0.353	37.70	3.74	52.10	6.40	0.334	
5	0.15	25.75	74.10	0.347	60.10	2.35	28.10	5.50	0.849	
6	0.14	22.97	76.89	0.298	60.10	2.30	27.90	5.52	0.867	
7	0.13	19.52	80.21	0.243	60.15	2.20	27.90	5.54	0.905	
8	0.13	19.05	80.75	0.235	60.20	2.18	27.82	5.35	0.917	$Bi_2O_3SO_3 \cdot$
9	0.12	17.67	82.11	0.215	60.28	2.15	27.71	5.26	0.932	$\cdot Li_2SO_4 \cdot 2H_2O$
10	0.11	16.79	83.10	0.202	60.35	2 10	27.63	5.21	0.953	
11	0.11	15.60	84.29	0.183	60.38	2.10	27.60	5.17	0.953	
12	0.09	14.92	84.99	0.175	60.40	2.06	27.70	5.15	0.972	

La composizione centesimale dei composti ottenuti è:

	Bi	Li	SO_4	H_2O
$Li_3Bi(SO_4)_3 \cdot 2H_2O$	37.72	3.75	52.02	6.50
$Bi_2O_3 \cdot SO_3Li_2SO_4 \cdot 2H_2O$	60.39	2.02	27.76	5.20

Il composto $Li_3Bi(SO_4)_3 2H_2O$ o 1 — 3 — 4 si presenta sotto forma di una polvere bianca, pesante, che al microscopio risulta costituita da minutissimi cristallini birifrangenti. Questo composto è stabile in contatto di soluzioni che contengono intorno a 0.15 % $Bi_2(SO_4)_3$ e da 36 a 26 % circa il solfato di litio.

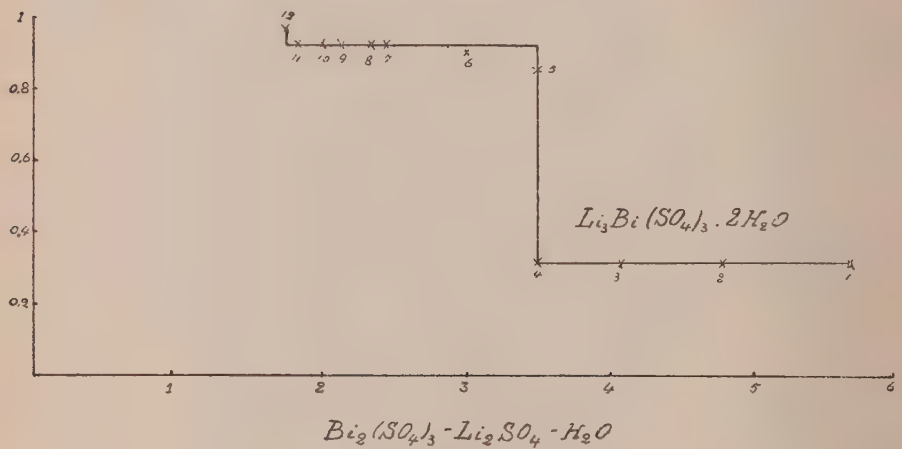


Fig. 2.

È da notare che nelle esperienze n. 1 e 2 il composto era leggermente inquinato da solfato di litio.

Il composto $Bi_2O_3 \cdot SO_3 \cdot Li_2SO_4 \cdot 2H_2O$, che si può scrivere $Li(BiO)SO_4 \cdot H_2O$, ha un campo di esistenza molto più esteso: io l'ho ottenuto in presenza di soluzioni che contenevano da 0.19 a 0.09 % $Bi_2(SO_4)_3$ e da circa 25 a circa 15 % Li_2SO_4.

Nelle esperienze 5 e 6 il composto era, anche qui, impuro del composto precedente, come lo dimostsa la maggiore percentuale di litio e di SO_4.

Per la rappresentazione grafica dei risultati ottenuti mi sono un po' allontanato da quello adoperato nelle ricerche sui solfati doppi delle terre rare coi metalli alcalini segnando sulle ascisse il rapporto $\frac{Li_2SO_4}{H_2O}$ della fase liquida e sulle ordinate il rapporto $\frac{Bi}{Li}$ della fase solida.

Con i dati sperimentali si è costruito il diagramma della fig. 2.

Non ho creduto opportuno estendere la ricerca al di sotto del valore 0.17 dell'ascissa, poichè, come si vede dal grafico, siamo già nel campo di esistenza dei solfati basici, che hanno scarsa importanza per lo scopo principale delle nostre indagini, non ottenendosi nel campo delle nostre ricerche, composti analoghi con i metalli delle terre rare.

Come era da aspettarsi, il litio si comporta in modo nettamente diverso dal potassio e dall'ammonio. Mentre, infatti, con i solfati di questi due ultimi, il solfato di bismuto dà dei composti 1 : 3 e 1 : 1 anidri, col solfato di litio quello di bismuto dà un composto di 1 : 3 tetraidrato, a prescindere dai composti basici.

È notevole, sotto questo punto di vista, che dalle soluzioni acquose, alla temperatura ordinaria, i solfati di potassio e di ammonio cristallizzano anidri, quello di litio, invece, monoidrato.

Chimica. — *Sulle reazioni di addizione ai composti organici non saturi*[1]. Nota di P. Pratesi, presentata[2] dal Corrisp. M. Betti.

È noto che saturando il doppio legame degli idrocarburi non saturi con acidi alogenati, l'alogeno si fissa all'atomo di carbonio più povero d'idrogeno (regola di Markownikow). Ma questa regola, che è generale per gli idrocarburi, non lo è affatto per altre serie di composti non saturi, le quali, come ad esempio gli alcooli, le aldeidi e gli acidi, si comportano in modo perfettamente opposto.

Esempio:
$$CH_2=CH—CH_2OH + H—X = CH_2X—CH_2—CH_2OH$$
$$CH_2=CH—CHO + H—X = CH_2X—CH_2—CHO$$
$$CH_2=CH—COOH + H—X = CH_2X—CH_2—COOH$$

dove H—X è l'acido alogenato.

Quanto agli acidi, per questi vale la regola di Ipatiew, secondo la quale l'atomo di alogeno si lega al carbonio più lontano dal carbossile. Il modo di addizionarsi degli acidi alogenati ai composti non saturi, che è così diverso per diverse serie di composti, ma che avviene con grande uniformità per quelli appartenenti ad una stessa serie, si spiegava almeno per gli idrocarburi col fatto che i calori di formazione degli alogeno-derivati terziari sono assai più alti di quelli dei secondari e primari[3]. Gli alcooli si comportano analogamente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(3) Kablukow, « Ber. », *21*, Ref. 179. A tale proposito vedi anche Michael, « Ber. », *39*, p. 2138 (1906).

Tralasciamo qui di parlare della applicazione della teoria elettronica della valenza [1], che del resto considera le addizioni al legame olefinico sotto un punto di vista prettamente formale.

Le regole di Markownikow e di Ipatiew sono regole empiriche parziali che valgono ognuna per determinati gruppi di composti non saturi. Inoltre, come si sa dalle esperienze di Ipatiew [2] e di Michael [3], non si forma sempre soltanto il composto alogenato saturo « normale », ma spesso anche una piccola quantità del composto isomero « anomalo ». Questo in certi casi (come p. es. col 3-metilbutene

$$CH_3—\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}—CH=CH_2$$

in soluzione acetica) può però raggiungere anche il 50 % del prodotto finale. Ora ci si può chiedere perchè la presenza di certi atomi o di certi aggruppamenti atomici (alogeni, ossidrile, carbossile, ecc.) inverta il modo di addizione dell'acido alogenato al composto non saturo e d'altra parte si può anche osservare che le regolarità che si manifestano nelle addizioni cogli acidi alogenati si verificano anche con altre sostanze di natura assai diversa da essi, come l'acqua, gli alcooli, gli acidi ipocloroso e ipobromoso, l'acido cianidrico, l'acido acetico, il fenolo e tiofenolo, l'ammoniaca, l'idrazina, l'idrossilammina, ecc. Infatti anche in queste addizioni si nota una netta tendenza dei diversi gruppi atomici ad assumere posizioni preferite.

Questa tendenza è logico pensare che stia in rapporto con una causa orientatrice che può dipendere dal senso (+ ··· —) dei momenti elettrici permanenti delle molecole che reagiscono. Mi sembra perciò non privo d'interesse esaminare la questione da tale punto di vista.

Per potere prescindere dalle complicazioni che possono derivare dai momenti elettrici delle molecole del solvente quando si opera allo stato di soluzione, consideriamo prima per maggiore semplicità il caso di una reazione fra una sostanza non satura gassosa ed un idracido parimente allo stato gassoso.

Quando le due molecole vengono a trovarsi vicine si eserciteranno fra loro reciproche azioni che dipenderanno dalla grandezza e dal senso dei loro dipoli. In seguito all'intensificarsi di tali azioni si raggiungerà la formazione di un aggregato molecolare che si può considerare preceda la reazione vera e propria. Tale stato di precombinazione viene oggi ammesso per ogni reazione di chimica organica da molti autori (v. per es. Pfeiffer, Reddelien, Rice). In virtù delle reciproche azioni di natura elettrostatica, il dipolo di

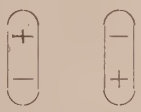
(1) E. Cuy, « Journ. Am. Soc. », *42* A, p. 503 (1920).

(2) Ipatiew e Ogonowsky, « Ber. », *36*, p. 1988 (1903); Ipatiew e Dechanow, « C. B. », II, p. 691 (1904).

(3) Michael, loc. cit.

una delle molecole si orienterà rispetto a quello dell'altra, in modo che i baricentri delle cariche elettriche dell'uno si avvicinano ai baricentri rispettivamente di segno opposto dell'altro.

I due dipoli tendono infatti a neutralizzarsi mutuamente poichè è a questa disposizione che corrisponde il minimo di energia potenziale [1].

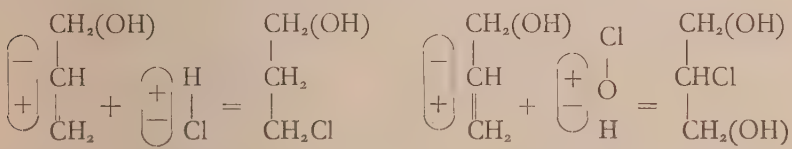


Quando poi l'energia dell'aggregato di precombinazione è giunta al valore critico, avrà luogo la formazione del composto finale alogenato, mantenendosi quell'orientamento che l'associazione dipolare aveva determinato.

Applicando questo modo di vedere a molecole non sature di natura la più svariata, possiamo constatare che si trovano verificate tutte quelle regolarità che Markownikow e Ipatiew avevano stabilito per particolari classi di composti. Riporto qui alcuni esempi tipici fra i moltissimi offerti dalla bibliografia.

Alcooli.

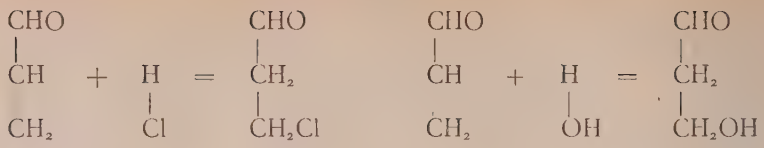
L'ossidrile, come in genere ogni aggruppamento atomico contenente l'ossigeno, ha carattere elettrico negativo e un considerevole momento elettrico, superiore a quello degli alogeni [2]. Ora nelle addizioni di idracidi agli alcool non saturi, l'alogeno dovrà disporsi simmetricamente all'ossidrile alcoolico, mentre nelle addizioni di HO—Cl, HO—Br, HCN, ecc., vi si disporrà l'aggruppamento atomico più polarizzato (l'OH, nei primi due acidi). Esempio:



Quanto si è detto per la funzione alcoolica, vale per le altre funzioni costituite da un radicale avente momento elettrico, come si verifica p. es. nelle *aldeidi* (e nei *chetoni*):

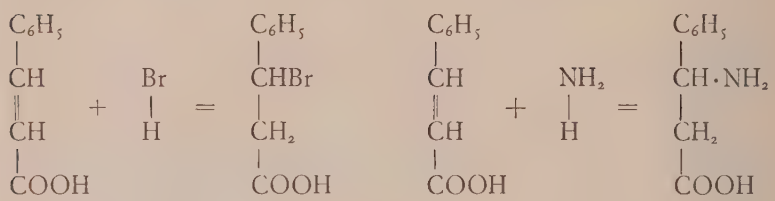
(1) Cfr. J. Errera, *Polarisation diélectrique*; V. Henry, *Structure des molécules.*

(2) J. Warren Williams, *Molekulare Dipolmomente und ihre Bedeutung für die chemische Forschung*, « Forsch. der Chemie, Physik und physik. Chemie », Bd. 20, Heft 5 (1930), p. 33 e seguenti. Anzi secondo A. Eucken e L. Meyer (« Phys. Zeitschr. », *30*, p. 397, [1929]) tale momento non si deve ascrivere ai singoli atomi o gruppi, ma ai diversi legami C—O, C=O, ecc.



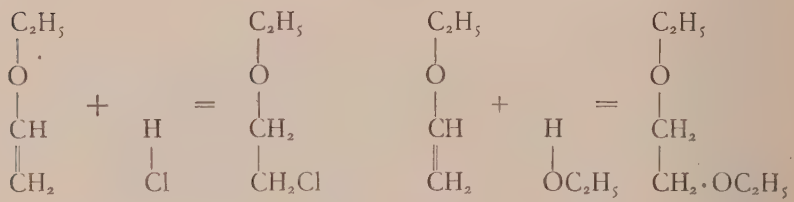
Acidi:

Esempio:



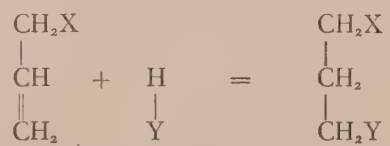
Eteri:

Esempio:



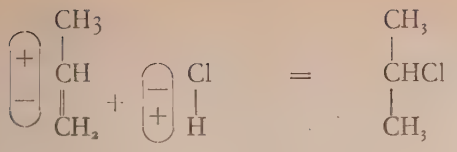
Alogeno–derivati

del tipo $CH_2X—CH=CH_2$.



Infine anche gli *idrocarburi*, per quanto non contengano aggruppamenti tipici polari, nondimeno quando sia presente un doppio o un triplo legame anch'essi posseggono un momento elettrico permanente e quindi possono essere presi in considerazione alla stessa stregua dei composti sopraricordati.

Per la concentrazione di cariche elettroniche nell'intorno del doppio legame, le molecole di idracido si orienteranno rispetto a quelle dell'idrocarburo in un modo tale che conduce alla fissazione dell'alogeno all'atomo di carbonio meno idrogenato. Esempio:



Tenendo presente il momento elettrico permanente delle molecole si può così comprendere l'azione orientatrice esercitata da particolari atomi o gruppi atomici di spiccata polarità elettrica (come gli alogeni, l'$-NO_2$, l'$-OH$, il $-CHO$, il $-COOH$, ecc.) presenti nel composto non saturo, nelle reazioni di addizione al doppio legame sia degli idracidi degli alogeni, sia di altre molecole polari: acqua, alcool, acido ipocloroso, ammoniaca, ecc.

Nelle addizioni di queste molecole il gruppo atomico più polarizzato va nella molecola non satura al posto in cui si addizionerebbe l'alogeno nelle reazioni cogli idracidi degli alogeni.

Quello che abbiamo detto fin qui riferendoci a reazioni fra composti tutti allo stato gassoso, vale necessariamente anche per lo stato liquido e per le soluzioni, ma in questo caso per le azioni che le molecole esercitano le une sulle altre (trascurabili per lo stato gassoso) e per quelle che le molecole del solvente esercitano su di esse, come pure per eventuali fenomeni di associazione molecolare, vengono influenzati la grandezza e il senso dei singoli dipoli, di guisa che in certi casi può essere favorita la formazione del composto finale così detto « anomalo ». È quindi necessario esaminare caso per caso se e come ciò avvenga, e questo mi propongo di sottoporre ad un esame ulteriore.

Riguardo all'influenza che su questi processi può avere l'azione associante del solvente, possiamo ricordare le esperienze di Ipatiew sulle addizioni di acidi alogenati ai butileni e agli amileni isomeri [1].

Mentre in assenza di solvente o con soluzioni acquose concentrate di acidi alogenati si ha sempre il composto alogenato saturo normale:

$$(CH_3)_2C{=}CH_2 + HBr = (CH_3)_2CBr{-}CH_3$$
$$(CH_3)_2C{=}CH{-}CH_3 + HBr = (CH_3)_2CBr{-}C_2H_5$$

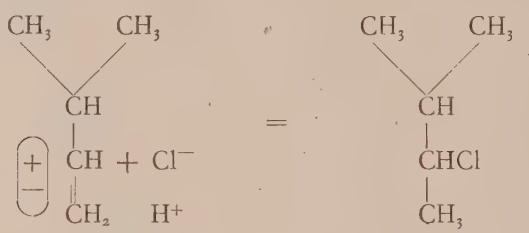
impiegando l'acido alogenato disciolto in acido acetico glaciale (che notoriamente ha forte potere associante) si ottengono quantità variabili dell'isomero anomalo, che dal 7 % nel caso del 3-metilpropene, raggiungono il 15 % per il trimetiletilene e il 50 % per l'isopropiletilene.

Ho voluto provare se facendo la detta reazione in presenza di solventi non associanti e senza momento elettrico, quali il benzolo e il tetracloruro di carbonio, la formazione dell'isomero anomalo fosse del tutto ostacolata. Infatti facendo agire l'acido bromidrico gassoso su soluzioni al 50 % di tri-

(1) Ipatiew e Ogonowsky, loc. cit.; Ipatiew e Dechanow, loc. cit.

metiletilene nei due solventi (previamente saturati con gas acido bromidrico) per una intera giornata, ho ottenuto in entrambi i casi il solo isomero normale $(CH_3)_2CBr—CH_2—CH_3$ a p. e. 108°–109° con rendimenti quasi quantitativi.

Dobbiamo infine tener presente che in quei casi nei quali le reazioni di addizione degli idracidi degli alogeni vengono effettuate impiegando le loro soluzioni acquose – come spesse volte è il caso - gli idracidi sono ionizzati. Siamo allora in presenza di un sistema costituito da molecole polari non ionizzate (le molecole non sature) e da ioni idrogeno e ioni alogeno. È evidente che essendo le attrazioni di natura elettrostatica, queste si svolgeranno fra i baricentri dei dipoli e gli ioni di carica rispettivamente opposta. Un esempio valga ad illustrarlo:



Le considerazioni svolte per i derivati etilenici si possono estendere anche a quelli acetilenici, pei quali risultano analoghe regolarità, come pure si può ricollegare con esse il comportamento del tutto singolare dei derivati alogenati non saturi aventi l'alogeno direttamente unito al carbonio non saturo, questione pure che intendo di sottoporre ad uno speciale esame.

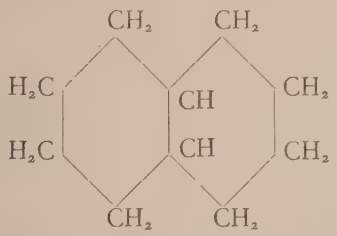
Chimica (Chimica fisica). — *Spettro Raman di derivati idrogenati della naftalina*[1]. Nota di G. B. Bonino e P. Cella, presentata[2] dal Corrisp. M. Betti.

Lo spettro Raman della naftalina ha già attirato l'attenzione di vari autori. Così la naftalina in soluzione (in benzolo o in tetracloruro di carbonio) è stata studiata da Petrikaln prima[3] e da Kohlrausch e Dadieu più recentemente[4], mentre R. Bar[5] studiò lo spettro Raman della naftalina allo stato cristallino. Onde portare un contributo alla conoscenza delle manifestazioni dei gruppi CH_2 legati in catene chiuse nei riguardi dell'effetto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.
(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.
(3) « Zeitschr. f. Phys. Chem. », *3*, p. 222 (1929).
(4) « Phys. Zeitschr. », *30*, p. 384 (1929); « Monatsh. », *52*, p. 379 (1929).
(5) « Nature », *124*, p. 692 (1929).

Raman abbiamo studiato lo spettro Raman della decaidronaftalina e della tetraidronaftalina. Il dispositivo sperimentale da noi adottato è quello già descritto in altri lavori [1]. I prodotti erano acquistati dal commercio e purificati con grande cura fino a che davano perfette le caratteristiche chimico-fisiche per ciascuni da essi segnate nella bibliografia.

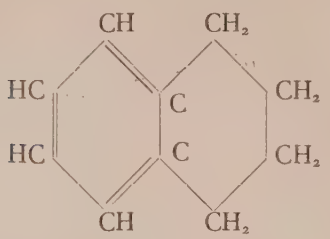
Spettro Raman della decaidronaftalina



N. d'ord.	ν in cm^{-1}	I	Riferimento [1]	N. d'ord.	ν' in cm^{-1}	I	Riferimento [1]
1	20015	4	*e* — 2923	19	22532	2	*e* — 406
2	20084	3	*e* — 2854	20	23260	5	*k* — 1445
3	21486	5	*e* — 1452	21	23347	2	*k* — 1358
4	21575	2	*e* — 1363	22	23443	3	*k* — 1262
5	21628	0	*f* — 1367	23	23544	1	*k* — 1161
6	21680	4	*e* — 1258	24	23661	3	*k* — 1044
7	21770	1	*e* — 1168	25	23699	00	*k* — 1006
8	21780	5	*k* — 2925	26	23720	1	*k* — 985
9	21846	5	*k* — 2859	27	23772	0	*k* — 933
10	21890	4	*e* — 1048	28	23833	1	*k* — 872
11	21921	1	*e* — 1017	29	23855	2	*k* — 850
12	21948	1	*e* — 990	30	23905	0	*k* — 800
13	22045	00	*e* — 893	31	23952	2	*k* — 753
14	22087	3	*e* — 851	32	24113	3	*k* — 592
15	22130	1	*e* — 808	33	24151	2	*k* — 554
16	22185	4	*e* — 753	34	24219	2	*k* — 486
17	22344	2	*e* — 594	35	24307	2	*k* — 398
18	22445	2	*e* — 493				

(1) Questi «Rendiconti», XIII, 275 (1931).

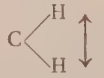
Spettro Raman della tetraidronaftalina



N. d'ord.	ν′ in cm^{-1}	I	Riferimento (1)	N. d'ord.	ν′ in cm^{-1}	I	Riferimento (1)
1	20018	4	*e* — 2920	22	22215	5	*e* — 723
2	20071	3	*e* — 2867	23	22355	3	*e* — 583
3	21336	3	*e* — 1602	24	22426	3	*e* — 512
4	21355	3	*e* — 1583	25	22508	3	*e* — 430
5	21480	3	*e* — 1458	26	22673	3	*e* — 265
6	21505	3	*e* — 1433	27	22780	3	*e* — 158
7	21565	5	*e* — 1373	28	23251	2	*k* — 1454
8	21600	1	*e* — 1338	29	23329	4	*k* — 1376
9	21656	5	*k* — 3049	30	23363	2	*k* — 1342
10	21656	2	*e* — 1282	31	23421	2	*k* — 1284
11	21712	1	*f* — 1283	32	23500	4	*k* — 1205
12	21735	4	*e* — 1203	33	23544	1	*k* — 1116
13	21755	5	*k* — 2950	34	23668	5	*k* — 1037
14	21780	4	*k* — 2925	35	23888	1	*k* — 817
15	21848	2	*k* — 2857	36	23943	1	*k* — 762
16	21900	5	*e* — 1038	37	23979	4	*k* — 726
17	21960	2	*f* — 1035	38	24118	3	*k* — 587
18	22000	0	*e* — 938*	39	24138	2	*k* — 567
19	22090	0	*e* — 848	40	24190	3	*k* — 515
20	22124	2	*e* — 814	41	24270	2	*k* — 435
21	22182	1	*e* — 756				

*) *g* — 1039?

(1) V. nota 1 p. 785.

Cicloesano (1)	Naftalina (2)	Decalina	Tetralina	Gruppo a cui è riferibile la riga
—	3046 (1)	—	3049 (5)	
2930 (3)	—	2922 (4)	2922 (4)	
2848 (3)	—	2856 (4)	2862 ($2^1/_2$)	id.
—	—	—	1602 (3)	C=C
—	1573 (3)	—	1583 (3)	C=C
1446 (3)	—	1448 (5)	1456 (3)	
—	—	—	1433 (3)	id.
—	1412 (0)	—	—	
1343 (2)	1377 (4)	1360 (2)	1374 ($4^1/_2$) 1340 ($1^1/_2$)	
1269 (3)	1245 (0)	1260 (4)	1283 (2) 1204 (4)	
1170 (3)	1142 (0)	1165 (1)	1160 (1)	
1027 (2)	1023 (2)	1046 ($3^1/_2$) 1017	1038 (5)	
992 (2)	936 (0)	990 (1)	938 (0)	
—	—	851 ($2^1/_2$)	848 (0)	
800 (4)	—	804 ($1^1/_2$)	815 ($1^1/_2$)	
—	—	753 (3)	759 (1) 724 (4)	
606 (0)	610 (0)	593 ($2^1/_2$)	585 (3)	
—	—	554 (2)	567 (2) 513 (3)	
—	505 (2)	490 (2)		
425 (2)	—	—	432 (2)	
—	—	402 (2)	—	
383 (2)	—		—	
			265 (3)	
			158 (4)	

(1) Ganesan and Venkateswaran, « Ind. J. Phys. », *4*, p. 195 (1929).
(2) V. nota 4 a p. 784.

Discussione dei risultati.

Onde facilitare la discussione dei spettri ottenuti poniamo nella precedente tabella le righe della decaidronaftalina e della tetraidronaftalina in confronto con quelle della naftalina e del cicloesano.

Lo spettro Raman della decaidronaftalina mostra innanzi tutto nettissime le due righe $\nu' = 2922$ e $\nu' = 2856$ cm^{-1} caratteristiche del legame CH nei gruppi $>CH_2$; quindi la riga $\nu' = 1448$ cm^{-1} dovuta alle oscillazioni di deformazione dei gruppi CH_2 contenuti in molecola. Le righe $\nu' = 1360$, 1260, 1165, 1046, 990, 593, sono analoghe a righe corrispondenti nello spettro della naftalina e del cicloesano. La tetraidronaftalina presenta uno spettro più complesso specialmente in relazione alla presenza in molecola di doppi legami aromatici. Così abbiamo nella tetralina la riga a $\nu' = 3049$ cm^{-1} caratteristica del CH aromatico e la riga $\nu' = 1583$ cm^{-1} caratteristica del C=C aromatico (righe queste pure presenti nella naftalina). Una netta distinzione con lo spettro della naftalina è data dalla presenza di tutte le righe dei gruppi CH_2 presenti nello spettro della tetraidronaftalina. Notiamo pure come nello spettro della tetraidronaftalina sia doppia la riga relativa al doppio legame C=C (1583 e 1602 cm^{-1}). (Come del resto si osserva nello spettro del benzolo [1]). È pure doppia nella tetraidronaftalina la riga relativa alle oscillazioni di deformazione del CH_2 a 1450 cm^{-1} circa. In tale posizione invero osserviamo due righe, una 1456 cm^{-1} e una a 1433 cm^{-1}. Di tale sdoppiamento si hanno altri esempi in tutti i casi che esistono in molecola due gruppi CH_2 legati in modo diverso e specialmente quando si hanno dei gruppi CH_2 legati a distanze diverse da un doppio legame tra carbonio e carbonio. Valgano questi esempi [2]:

$Cl_2HC-CH_2-CH_3$	1,1-dicloropropano	$\nu' = 1438$ cm^{-1}
$ClH_2C-CHCl-CH_3$	1,2-dicloropropano	$\nu' = 1429$ e 1449 cm^{-1}
$ClHC=CH-CH_3$	1-cloropropilene	$\nu' = \ldots 1441$ cm^{-1}
$H_2C=CCl-CH_3$	2-cloropropilene	$\nu' = 1409 \ldots 1445$ cm^{-1}
$H_2C=CH-CH_2OH$	alcool allilico	$\nu' = 1412 \ldots 1458$ cm^{-1}

Si potrebbe supporre nel nostro caso che esista una differenza nelle oscillazioni di deformazione dei CH_2 in α più vicini al C=C aromatico del

(1) Kohlrausch e Dadieu, «Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien», II, *138*, p. 610 (1929).

(2) Pestemer, «Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien», II, *139*, p. 667 (1930).

nucleo non idrogenato e i CH_2 in posizione β più lontani nella tetraidronaftalina del detto aggruppamento C=C. È nostra intenzione di esaminare dei derivati bialogenati sia in α sia in β onde approfondire meglio questo punto. È da notare a tale proposito che nello spettro della tetraidronaftalina sono sdoppiate anche altre righe: per es. al posto della $\nu' = 1377$ (4) della naftalina e $\nu' = 1360$ (2) nella decalina, osserviamo nella tetralina un doppietto $\nu' = 1374$ ($4\,^1/_2$) e $\nu' = 1340$ ($1\,^1/_2$); al posto della $\nu' = 1260$ (4) della decalina abbiamo il doppietto $\nu' = 1283$ (2) e $\nu' = 1204$ (4); al posto della $\nu' = 753$ (3) della decalina si osserva nella tetralina il doppietto $\nu' = 759$ (1) e $\nu' = 724$ (4); corrispondentemente alla $\nu' = 554$ della decalina le $\nu' = 567$ (2) e $\nu' = 513$ cm^{-1} nella tetralina.

Chimica (Chimica fisica). — *Sullo spettro Raman del dicloro-bromometano*[1]. Nota di G. B. Bonino e L. Brüll, presentata[2] dal Corrisp. M. Betti.

Mentre la bibliografia dell'effetto Raman è assai ricca di riferimenti a studi fatti su composti organici clorosostituiti e su composti bromosostituiti non son frequenti le notizie relative a composti che contengano in molecola due alogeni differenti. Abbiamo perciò iniziato una serie di ricerche in questa direzione e ci proponiamo di riferire brevemente in questa Nota i risultati ottenuti dallo studio dello spettro Raman nel dicloro–bromometano ($CHCl_2Br$). Invero mentre gli spettri Raman del $CHCl_3$ e del $CHBr_3$ vennero studiati da varî autori[3] e si possono dire ben conosciuti, mancano dati relativi al $CHCl_2Br$.

Il dispositivo sperimentale, il modo di procedere, il simbolismo usato sono identici a quelli registrati in una precedente nostra Nota[4]. Il prodotto impiegato era di provenienza Kahlbaum e venne opportunamente seccato e ridistillato sottoponendo all'esame un campione perfettamente neutro e che presentava le caratteristiche chimico–fisiche date dalla bibliografia per questo composto.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(3) Vedi una completa bibliografia in S. Bhagavantam, *The Raman Effect its significance for Physics and Chemistry*, Calcutta, « University Press », 1930.

(4) Questi « Rendiconti », XIII, 275 (1931).

Spettro Raman del dicloro-bromometano.

N. d'ord.	ν' in cm^{-1}	I	Riferimento	N. d'ord.	ν' in cm^{-1}	I	Riferimento
1	21680	3	e — 3025	11	23915	2	i — 601
2	21755	0	e — 1183	12	23942	2	k — 763
3	22179	2	e — 759	13	23984	3	k — 721
4	22218	3	e — 720	14	24100	5	k — 605
5	22331	5	e — 607	15	24180	3	i — 336
6	22603	5	e — 335	16	24265	2	q — 3028
7	22713	5	e — 225	17	24288	2	i — 228
8	22767	2	f — 228	18	24374	4	k — 331
9	23260	2	e + 322	19	24480	3	k — 225
10	23525	1	k — 1180	20	24925	1	k + 220

ν' cm^{-1} = 3025 (3); 1181 (1 1/2); 760 (2); 720 (3); 606 (5); 330 (4); 225 (5).

Onde discutere brevemente questo spettro mostrato dal diclorobromometano è utile paragonarlo nella seguente tavola con gli spettri Raman del cloroformio e del bromoformio (assumiamo per questi due composti i dati pubblicati da Kohlrausch e Dadieu [1]).

Composto	Autori	a	b	c	d	e	f	g
$CHCl_3$ . . .	K. D.	3016 (3)	1214 (2)	—	756 (4)	664 (5)	366 (4)	259 (5)
$CHCl_2Br$ . .	B. B.	3025 (4)	1181 (6)	760 (2)	720 (4)	606 (5)	330 (5)	225 (5)
$CHBr_3$ . . .	K. D.	3021 (4)	1144 (2)	—	653 (5)	539 (6)	321 (5)	154 (5)

Mentre il cloroformio ed il bromoformio presentano 6 frequenze di cui 5 intense il diclorobromometano ne presenta una di più che potrebbe spiegarsi col fatto che nel $CHCl_2Br$ abbiamo la possibilità di oscillazioni Cl—Br che manca invece negli altri due composti. A prescindere dalla $\nu' = 3020$ cm^{-1} circa che corrisponde al legame CH e la cui posizione nei tre composti pressochè coincide, le altre frequenze variano da composto a composto dimi-

(1) « Monatsh. f. Chem. », 55, p. 58 (1930).

nuendo coll'aumento del peso molecolare (v. fig. 1). Si potrebbe rilevare anche una certa regolarità in queste variazioni: così la $\nu' = 1181$ cm^{-1} del $CHCl_2Br$ dista di quantità pressochè eguali dalle corrispondenti righe del cloroformio e del bromoformio, mentre p. es. la 720 cm^{-1} e la 225 cm^{-1} del

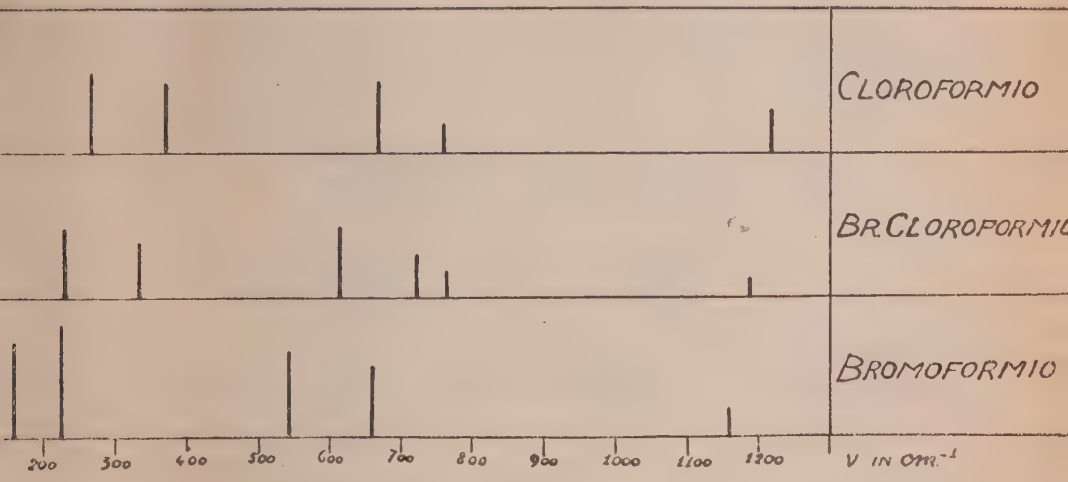


Fig. 1.

$CHCl_2Br$ distano dalle corrispondenti del cloroformio di un numero d'onde metà della rispettiva distanza dalle righe corrispondenti del bromoformio.

Recentemente Kohlrausch e Dadieu [1] riprendendo un calcolo di Dennison [2] sui periodi propri di oscillazione di sistemi paragonabili ad una molecola tetratomica, data la grande differenza di massa tra l'idrogeno e gli atomi di alogeno cercavano di rappresentare la molecola di cloroformio e di bromoformio con sistemi costituiti da quattro masse legate fra di loro e capaci di oscillare attorno alle rispettive posizioni di equilibrio. Una di

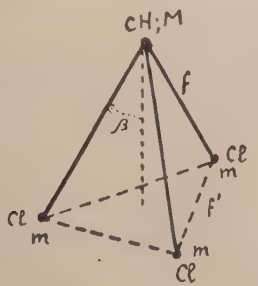


Fig. 2.

(1) « Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien », II, *139*, p. 178 (1930).
(2) « Phil. Mag. », VII, *1*, p. 195 (1926).

queste masse si considera costituita dall'insieme CH come si vede nella figura 2.

Le equazioni del Dennison porterebbero in tal caso alle seguenti relazioni:

$$n_1 n_2 = \frac{3f'}{m} \cdot \frac{f}{m} p \cos^2 \beta$$

$$n_1 + n_2 = \frac{3f'}{m} \frac{f}{m} [1 - (1 - p) \cos^2 \beta]$$

$$4 n_3 n_4 = \frac{3f'}{m} \frac{f}{m} [p + (2 - p) \cos^2 \beta]$$

$$2(n_3 + n_4) = \frac{3f'}{m} + \frac{f}{m} [1 + p + (1 - p) \cos^2 \beta]$$

dove

$$n_i = \frac{4\pi^2 c^2}{6.06 \ 10^{23}} \nu_i^2 = 5.863 \ 10^{-2} \nu_i^2$$

essendo ν_i le frequenze proprie di oscillazione del sistema e $p = \frac{3m + M}{M}$ con m peso atomico dell'alogeno e M la somma dei pesi atomici del gruppo CH; β come si vede nella figura sarebbe l'angolo che la direzione della valenza carbonio alogeno fa colla perpendicolare portata dall'atomo di carbonio al piano sul quale giacciono i tre atomi di alogeno considerati come equidistanti dall'atomo di carbonio (angolo che come si sa nel modello tetraedrico è di circa 70°). Le quantità f e f' rappresentano le rispettive forze di legame. Sostituendo nelle formule citate in via di approssimazione i valori numerici relativi al $CHCl_2Br$ $\left(\nu_1 = 225, \ \nu_2 = 606, \ \nu_3 = 330, \ \nu_4 = 720 \text{ cm}^{-1}; \ p = \frac{2Cl + Br + CH}{CH}, \ m = \frac{2Cl + Br}{3}\right)$ si hanno per β, f dei valori intermedi a quelli del cloroformio e del bromoformio. Per f' viceversa si ha un valore eguale a quello coincidente per i due detti composti come si può vedere nella seguente tabella:

	$CHCl_3$	$CHCl_2Br$	$CHBr_3$
β	72°,30′	73°,50′	74°
f dine . .	2,47.10⁵	1,97.10⁵	1,81.10⁵
f' dine . .	2,13.10⁵	2,11.10⁵	2,1.10⁵

I valori dell'angolo β anche nel $CHCl_3$ e nel $CHBr_3$ si avvicinano al valore di 70° ma superano di una quantità troppo sensibile tale valore che compete al caso del modello tetraedrico, fatto questo che potrebbe forse rilevare la natura di larga approssimazione del calcolo. È interessante però notare la coincidenza che il rapporto tra i quadrati dei coseni di β (che è la funzione dell'angolo β che entra nei calcoli) che si ottengano dal calcolo soprariferito per il cloroformio e per il bromoformio risulta eguale al rapporto inverso dei momenti elettrici permanenti delle due molecole degli stessi composti. Infatti:

$$\frac{\cos^2 \beta\,(CHCl_3)}{\cos^2 \beta\,(CHBr_3)} = \frac{\cos^2 72°,30'}{\cos^2 74°} = 1.21$$

$$\frac{\mu\ CHBr_3}{\mu\ CHCl_3} = \frac{1,30 \cdot 10^{-18}}{1.05 \cdot 10^{-18}} = 1.23\ (1).$$

Se la coincidenza dovesse verificarsi anche per il $CHCl_2Br$ si calcolerebbe dai dati spettroscopici ricavati dall'effetto Raman per il momento elettrico della molecola di questo composto:

$$\mu = 1.3 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{0.0744}{0.077} = 1.25 \cdot 10^{-18}.$$

È nostra intenzione verificare sperimentalmente questo valore dato che non siamo riusciti a trovare nella bibliografia il valore del momento elettrico del diclorobromometano.

(1) Per il momento elettrico del cloroformio vedi S. C. Sircar, « Ind. Journ. of Phys. », *3*, p. 197 (1928), e C. P. Smyth e S. Morgan, « Journ. Amer. Chem. Soc. », *50*, p. 1547 (1928), e per il bromoformio vedi Debye, *Polarer Molekeln*, I. Nachtrag zur *Tab. El. Mom.*, 1930.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 giugno 1931 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Analisi). — *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche.* Nota [1] del Socio F. SEVERI.

Mi son già occupato del problema in questione e della teoria delle funzioni biarmoniche, in due Memorie della R. Accademia d'Italia [2], nell'ultima delle quali le condizioni al contorno, che dànno luogo ad un teorema di esistenza e di unicità per una funzione che debba esser biarmonica (olomorfa) in una data quadricella Γ, di contorno Δ, dello S_4, sono state ridotte a due equazioni differenziali del 3° ordine e ad un'equazione integro-differenziale, cui è sottoposta la traccia sul contorno della costruenda funzione.

Ho potuto ora concluder la ricerca, provando che si può far a meno dell'equazione integro-differenziale, la quale è conseguenza delle due equazioni differenziali. Il risultato ha un valore inaspettato, in quanto pur essendo, come ogni questione al contorno, di natura integrale, deriva da pure condizioni locali; e perchè da esso consegue inoltre (in forza di sviluppi contenuti nella Memoria B) che la derivata normale, al contorno Δ, di una funzione biarmonica in Γ, può esprimersi con soli elementi intrinseci differenziali della traccia della funzione stessa su Δ, e che le traccie sul contorno di due funzioni biarmoniche associate U, V, olomorfe in Γ, sono legate da sole condizioni differenziali. Tutti fatti, questi, completamente difformi da quelli

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) *Il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche* [Memoria A] (seduta del 28 novembre 1930-IX); *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche* [Memoria B] (seduta del 27 marzo 1931-IX). Ricordo che una funzione dicesi, con Poincaré, *biarmonica*, quando è la parte reale (o il coefficiente di i) di una funzione analitica di due variabili complesse.

che si presentano nell'analogo problema per le funzioni armoniche e per le funzioni analitiche di una variabile complessa.

Le difficoltà che, da Poincaré in poi, hanno finora indotto a porre da banda il punto di vista riemanniano (determinazione delle funzioni analitiche mediante dati al contorno) nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse, e per le quali non ho potuto che avvicinarmi a tappe al risultato definitivo, vengono di colpo superate mediante l'idea informatrice del semplicissimo metodo esposto in questa Nota; il quale, a prescinder dall'alleggerimento formale apportato dall'uso simultaneo delle coppie di variabili complesso–coniugate, trova la sua forza maggiore nell'estensione dal campo reale al campo complesso e da una varietà subordinata, allo spazio che la contiene, delle funzioni olomorfe, che entrano in giuoco.

Lo spirito del *metodo*, che può chiamarsi *dell'estensione dal reale al complesso*, vien subito lumeggiato dalla sua applicazione all'ordinario problema locale di Cauchy, per l'equazione di Laplace. Invero, sia $x_2 = x_2(x_1)$ (x_1, x_2 coordinate cartesiane reali) l'equazione di un arco piano (analitico, regolare) l e $f(x_1) = u(x_1) + iv(x_1)$ una funzione complessa olomorfa del punto di l (cioè tale che le u, v sieno serie di potenze della variabile reale x_1, convergenti attorno ad un valore di x_1). Posto $x = x_1 + ix_2$, $\bar{x} = x_1 - ix_2$, nello S_4 che rappresenta le coppie (x_1, x_2) prolungate al campo complesso, eseguiamo la sostituzione omografica:

$$x_1 = \frac{x + \bar{x}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{x - \bar{x}}{2i}.$$

Allora $f(x_1)$ mutasi in una funzione $\Phi(x, \bar{x})$ delle variabili *indipendenti* $x, \bar{x}$, olomorfa in un certo intorno della superficie σ imagine di l. Similmente la funzione $x_2 - x_2(x_1)$ mutasi in una $\Theta(x, \bar{x})$, olomorfa in un intorno di σ, cioè $\Theta(x, \bar{x}) = 0$ è l'equazione di σ (o di l) nelle nuove variabili. E siccome la

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2}\left(i - \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

non è mai nulla nell'intorno considerato, dalla $\Theta = 0$ si ricava $\bar{x}$ come funzione olomorfa di x. Questa funzione, sostituita nella $\Phi(x, \bar{x})$, la muta in una funzione olomorfa $F(x)$, che, lungo l, riducesi ad f.

Resta così dimostrato, con pochi tratti di penna, il teorema locale di Cauchy, senza far appello a teoremi di esistenza concernenti le equazioni differenziali, ma poggiando soltanto sulla più elementare proprietà delle serie di potenze [1] e sul teorema delle funzioni implicite.

(1) Se i valori dei termini di una serie di potenze delle variabili complesse $z_1, z_2, \cdots, z_n$, per $z_1 = z_1^0, \cdots, z_n = z_n^0$, colle z^0 *reali* o complesse, formano un insieme limitato (il che

L'unicità della $F(x)$ consegue senz'altro dal principio d'identità per le serie di potenze [1].

1. Conservo in quel che segue le notazioni e le ipotesi delle Memorie A, B. Sia data una funzione complessa f del punto del contorno Δ (analitico, regolare) della cella Γ dello $S_4(x_1, x_2, y_1, y_2 ; x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2)$, la quale sia olomorfa attorno ad un punto P di Δ (uguale cioè ad $u + iv$, ove u, v son in quell'intorno serie di potenze assolutamente convergenti e reali delle tre coordinate interne di un punto mobile in Δ). Poichè P è semplice per Δ, l'equazione di Δ attorno a P potrà risolversi rispetto a qualcuna delle quattro coordinate dell'ambiente. Così essa presentasi sotto la forma:

$$\theta \equiv y_2 - \psi(x_1, x_2, y_1) = 0, \tag{1}$$

ed x_1, x_2, y_1 posson assumersi a coordinate interne del punto di Δ [2].

La $f(x_1, x_2, y_1)$, riguardata come funzione del punto dell'ambiente *complesso* S_4, è olomorfa; onde mediante la sostituzione omografica:

$$x_1 = \frac{x + \bar{x}}{2}, \quad x_2 = \frac{x - \bar{x}}{2i}, \quad y_1 = \frac{y + \bar{y}}{2}, \quad y_2 = \frac{y - \bar{y}}{2i}$$

essa mutasi in una $\Phi(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ olomorfa nell'intorno del punto imagine di P (nello S_8 rappresentativo). Similmente per θ. Sicchè la (1) vien sostituita da un'equazione del tipo:

$$\Theta(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{2}$$

E siccome:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y_1} + i\frac{\partial \theta}{\partial y_2}\right) = \frac{1}{2}\left(i - \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right),$$

così, nell'intorno considerato, è $\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} \neq 0$. Perciò la (2) può risolversi rispetto ad $\bar{y}$, ricavandosi $\bar{y}$ come funzione olomorfa di $x, y, \bar{x}$. Sostituita tale

accade sempre se, per $n = 1$, la serie è in z^0 convergente e, per $n > 1$, se è in z^0 *assolutamente* convergente), la serie è uniformemente e assolutamente convergente per $|z_h| < |z_h^0|$.

(1) Il metodo della estensione dal reale al complesso può, in un certo senso, ravvicinarsi ad un *metodo delle imagini*. Così, nel caso semplice addotto ad esempio, la f data su l s'estende fuori dell'arco passando allo spazio reale $S_4\left(x_1', x_1'', x_2', x_2'' ; x_1 = x_1' + ix_1'', x_2 = x_2' + ix_2''\right)$. La l vien allora a giacere sul piano $\pi\left(x_1'' = x_2'' = 0\right)$ e la f definisce attorno ad l una funzione olomorfa Φ dell'ambiente, mutata in sè dalla simmetria rispetto al piano $x_2 = 0$, e subordinante su π il prolungamento di f.

(2) Gli sviluppi che seguono potrebbero esser svolti anche a partire da coordinate intrinseche generali, ma i calcoli sarebbero più complicati.

espressione nella Φ, questa mutasi in una funzione $F(x, y, \bar{x})$, olomorfa attorno all'imagine di P [1], e che riducesi sopra Δ alla f.

La F non risulta qui senz'altro funzione di x, y: donde la prima divergenza essenziale rispetto all'ordinario problema di Cauchy. Perchè F non dipenda da $\bar{x}$, occorre e basta che nell'intorno considerato sia

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}}\right) : \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}} = 0. \tag{3}$$

Or è facile constatare che il primo membro della (3) riducesi ad una funzione delle sole x_1, x_2, y_1 (questo è il punto fondamentale!); onde esso è nullo nell'intorno suddetto, quando sia nullo sopra Δ. Si ha invero:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right), \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{2}\left(i - \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right).$$

È dunque necessario e sufficiente, perchè $F(x, y, \bar{x})$ riducasi, nello $S_4(x, y, \bar{x}, \bar{y})$, ad una $F(x, y)$, che la f soddisfaccia sopra l'imagine di Δ, considerata come varietà complessa, all'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\left(i - \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = 0. \tag{4}$$

Ma affinchè quest'equazione sia verificata sulla Δ complessa, cioè per *tutti i valori complessi* di x_1, x_2, y_1 nell'intorno di P, occorre e basta che lo sia per *tutti i valori reali* delle medesime variabili nell'intorno del punto reale P [2]. La condizione che cercavamo riducesi pertanto a ciò: che la (4) è soddisfatta sopra la Δ reale.

(1) Una sostituzione analitica qualunque, operata su una funzione analitica di quante si vogliano variabili, conserva l'analiticità rispetto alle nuove variabili. Cfr. p. es. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie* (Leipzig, Teubner, 1929, II. Bd., I. Lief., pp. 8, 49).

(2) Infatti, se una funzione di n variabili complesse $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, olomorfa attorno al punto *reale* $P(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_n^0)$, si annulla nell'*intorno reale* di P, si annulla anche nell'*intorno complesso*. Per $n = 1$ la proprietà consegue dal principio d'identità delle serie di potenze. Per $n > 1$ si dimostra p. es. ammettendola per $n - 1$ variabili e stabilendola per n variabili, così: Se $(z_1', z_2, \cdots, z_n)$ è un punto variabile dell'intorno complesso di P, con z_1' reale dato, la $f(z_1', z_2, \cdots, z_n)$ si annulla nell'intorno reale di $(z_2^0, \cdots, z_n^0)$ e

2. Un facile calcolo mostra che la (4) può altresì scriversi sotto la forma compatta

$$\frac{\partial(f, x, y)}{\partial(x_1, x_2, y_1)} = 0,$$

nella quale x, y si considerino sopra Δ (tenendo cioè conto che y_2 è funzione di x_1, x_2, y_1). Quest'equazione esprime che, sul pezzo considerato di Δ, la f è funzione delle variabili complesse x, y, nel senso di Riemann-Beltrami (delle funzioni di variabile complessa sopra una superficie) esteso dal Wirtinger alle funzioni di più variabili complesse [1]. Dal modo geometrico e concettuale, com'io introduco le funzioni di due variabili complesse, sopra una varietà a tre dimensioni, nella Memoria B (ove dimostro altresì la coincidenza della definizione cui alludo con quella formale di Wirtinger), risulta senz'altro l'invarianza, rispetto ai cangiamenti delle variabili interne a Δ, dell'equazione precedente (il che segue pure dal modo di comportarsi di un jacobiano rispetto ai cangiamenti di variabili). Pertanto la condizione trovata nel numero precedente, in coordinate intrinseche generali $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, può scriversi:

$$\frac{\partial(f, x, y)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \theta_3)} = 0. \tag{5}$$

Il problema della ricerca delle condizioni locali necessarie e sufficienti perchè una f complessa e olomorfa del punto di Δ sia ivi la traccia di una funzione olomorfa $F(x, y)$ dell'ambiente, è così risoluto nel senso che la f deve soddisfare su Δ all'equazione (5).

3. Una seconda differenza essenziale, rispetto al problema per una variabile, è che la risoluzione locale trae di conseguenza la risoluzione in grande su tutta la cella Γ; e ciò in virtù di un teorema classico di Hartogs [2]. Il problema di Cauchy per le funzioni di una variabile complessa x, permette di costruire, per prolungamento analitico lungo una linea chiusa regolare l, una funzione olomorfa $F(x)$ subordinante su l una data funzione olomorfa f. Ma $F(x)$ resta definita, come funzione olomorfa, soltanto lungo una strisciolina, comprendente l all'interno, giacchè in generale nell'interno della superficie delimitata da l, $F(x)$ presenta punti singolari.

quindi anche nell'intorno complesso di questo punto. Cioè f si annulla in ogni punto dell'intorno di P che abbia z_1 reale e $z_2, \cdots, z_n$ complesse. Questi zeri dipendono da $2n-1$ parametri reali, mentre gli zeri di una f olomorfa, non identicamente nulla, dipendono da $2n-2$ parametri reali. Dunque f è identicamente nulla.

(1) *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen*, « Mathematische Annalen », Bd. 97, p. 364 (1926).

(2) Cfr. p. es. Osgood, loc. cit., p. 206. Il teorema afferma l'olomorfismo di una funzione analitica $F(x, y)$ nell'interno di una quadricella Γ, non appena si sappia che F è olomorfa attorno al contorno Δ.

Invece, nel caso di due variabili complesse x, y, se f è una funzione olomorfa del punto di Δ (olomorfa, nel senso precisato nella Memoria B)[1], soddisfacente su tutto il contorno alla (5), nell'intorno di ogni punto di Δ si vien a definire, nel modo indicato, una funzione olomorfa di x, y, che su Δ coincide con f. Onde le varie funzioni di x, y, così ottenute, dànno luogo ad un'unica funzione $F(x, y)$, olomorfa in uno strato quadridimensionale comprendente Δ all'interno; e ciò perchè due funzioni olomorfe di x, y, che coincidano sopra un pezzo a tre dimensioni, son identiche. Ma allora, in forza del teorema di Hartogs, la $F(x, y)$ può prolungarsi, come funzione olomorfa, in tutta la cella Γ. La conclusione è che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione complessa olomorfa $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ *del punto* $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ *variabile sul contorno* Δ (*analitico, regolare*) *di una quadricella* Γ, *sia ivi subordinata da una funzione analitica* $F(x, y)$ *delle due variabili complesse* x, y, *olomorfa in tutta la quadricella, è che* f *soddisfaccia all'equazione differenziale* (5).

È chiaro che la $F(x, y)$ determinata da f è *unica*, sempre perchè due funzioni olomorfe di x, y non posson assumere gli stessi valori nei punti di un campo a tre dimensioni, senza coincidere.

4. A posteriori si vede che il ragionamento svolto può ulteriormente semplificarsi nella forma. Interpretiamo ancora, secondo il metodo di estensione dal reale al complesso, le $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ come variabili indipendenti complesse, considerando dunque Δ come una varietà complessa. Questo è lecito, perchè le serie di potenze $u(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $v(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $x_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $x_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $y_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $y_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ son convergenti nell'intorno reale del punto reale P e quindi anche nell'intorno complesso dello stesso punto [cfr. la nota 1 a pie' della p. 796]. Allora, atteso che x, y sono funzionalmente indipendenti su Δ, la (5), interpretata nel campo complesso, esprime la condizione perchè sia, nell'intorno di P, $f = F(x, y)$, con F funzione olomorfa delle variabili indipendenti x, y, che si riduce alla f data su Δ. Abbiamo già osservato [cfr. la nota 2 a pie' della p. 798] che alla condizione (5) considerata nel campo complesso, può esser sostituita la medesima condizione nel campo reale. E da ciò la conclusione.

Ma la forma di applicazione del metodo dell'estensione dal reale al complesso, da me seguita originariamente, ha una più larga portata, come già risulta dalla sua applicazione al problema di Cauchy e come è confermato dal successivo n. 8 e da altre applicazioni, che s'intravvedono. D'altronde l'ultima forma di deduzione, che si presenta così naturale a posteriori, non

(1) In sostanza, una f del punto di Δ è olomorfa quando, scelto ivi comunque un punto P e risoluta l'equazione (analitica) di Δ attorno a P, rapporto ad una qualunque delle x_1, x_2, y_1, y_2, rispetto a cui la risoluzione sia possibile, f è esprimibile attorno a P con una serie di potenze convergente delle altre tre variabili. Si può allora, in infiniti modi, costruire una $f_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$ olomorfa attorno a P, che si riduca nel detto intorno di Δ, alla f.

è a priori spontanea: tanto è vero che il Wirtinger ha scritto la (5) come una pura estensione formale delle equazioni di Beltrami, caratterizzanti le funzioni di variabile complessa sopra una superficie, senza por mente al più profondo significato concettuale, ch'essa acquistava passando dal reale al complesso [1].

5. Nel caso di un iperplanoide si può passare addirittura, con una trasformazione pseudoconforme, all'iperpiano $x_1 = 0$ e assumere $\theta_1 = x_2$, $\theta_2 = y_1$, $\theta_3 = y_2$. La (5) riducesi allora, separato il reale dall'immaginario, alle equazioni di monogeneità della f, come funzione di y, sopra ogni piano $x_2 = \text{cost.}$ Pertanto (5) esprime ora la condizione perchè f possa porsi sotto la forma $F(ix_2, y)$, con F funzione olomorfa della variabile reale x_2 e della variabile complessa y. La funzione $F(x, y)$, considerata nello spazio ambiente, è olomorfa attorno al punto di $x_1 = 0$, sul quale si è fissata l'attenzione, e subordina nell'intorno di questo punto la $F(ix_2, y)$, cioè la f.

Però, siccome un iperplanoide non può mai essere una varietà chiusa a punti semplici, il teorema di Hartogs non è applicabile in questo caso, e non si va al di là, colla definizione di F, di uno strato comprendente all'interno i punti semplici dell'iperplanoide.

Le equazioni di Beltrami acquistan più largo significato dal nostro punto di vista: esse caratterizzano le funzioni di una variabile complessa sopra una superficie tracciata in un iperplanoide, che son subordinate da funzioni olomorfe di una variabile reale e di una variabile complessa sull'iperplanoide. Invero, la condizione perchè una funzione complessa f del punto di una superficie σ di equazione $x_2 = x_2(y_1, y_2)$ dell'iperpiano $x_1 = 0$, sia sopra σ funzione di y, vien espressa da $\frac{\partial(f, y)}{\partial(y_1, y_2)} = 0$, cioè dalle equazioni di monogeneità della f come funzione di y, le quali equivalgono alle equazioni di Beltrami, relative a due coordinate di un sistema ortogonale isotermo sopra σ. Il ragionamento svolto prova che, in tali condizioni, f è subordinata da una $F(y)$ dell'ambiente $x_1 = 0$.

6. La (5) dà luogo a due equazioni differenziali del 1° ordine:

$$\Lambda_1 v = \Lambda_2 u \quad , \quad \Lambda_2 u = -\Lambda_1 v \tag{6}$$

nelle u, v $(f = u + iv)$. Esclusa l'ipotesi che il sistema $\Lambda_1 u = 0$, $\Lambda_2 u = 0$ sia completo, nel qual caso si ricade in un iperplanoide (come trovasi am-

(1) Il WIRTINGER chiude la sua Memoria, contenente molti eleganti risultati formali, che gioverà cercar d'interpretare concettualmente, colle parole seguenti: «Dass hier die analogen Untersuchungen wie bei einer Variablen viel schwieriger und komplizierter sein werden, wenn sie überhaupt durchführbar sind, liegt an der Hand. Trotzdem habe ich die obigen formalen Entwicklungen nicht unterdrücken wollen, weil sie wenigstens die Schwierigkeiten aufzeigen, welche ein Weitergehen auf die Riemannschen Wege darbietet. Vielleicht hätte Riemann auch die Ideen zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten gehabt».

piamente spiegato nella Memoria B), la condizione d'integrabilità delle (6) conduce a due equazioni differenziali del 3° ordine:

$$(7) \qquad K_1 = 0 \quad , \quad K_2 = 0$$

nella u. Scelto un integrale (olomorfo in Δ) di queste equazioni, la v si calcola con una quadratura e resta dunque definita a meno d'una costante addittiva. Da questo segue agevolmente il *teorema generale di esistenza e di unicità per le funzioni biarmoniche*:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una funzione biarmonica U, *olomorfa nella quadricella* Γ, *che subordini sul contorno* Δ *una data* u (*olomorfa*), *è che* u *soddisfaccia alle due equazioni differenziali del 3° ordine* (7). *In quest'ipotesi la* U *è individuata* [1].

Quando la varietà Δ (non circondante però un campo chiuso) sia un iperplanoide, le (7) vengon sostituite da una sola equazione di 2° ordine (trasformata pseudoconforme di un'equazione di Laplace in due variabili), che caratterizza le traccie sull'iperplanoide delle funzioni biarmoniche olomorfe attorno a Δ. In tal caso la traccia *non individua* la corrispondente funzione biarmonica, perchè l'iperplanoide è esso medesimo di livello zero per una funzione biarmonica (ved. la Memoria B).

7. Se il contorno Δ di Γ, anzichè di una sola varietà analitica irriducibile, consta di pezzi di varietà (analitiche, regolari) distinte, formanti un poliedroide (come un poliedro o un bicilindro, le cui faccie son però iperplanoidi), e se ogni faccia S a tre dimensioni di Δ è contornata da una superficie (chiusa) non caratteristica o costituita da faccie σ a due dimensioni, non caratteristiche, che sieno altrettanti pezzi di superficie analitiche regolari, si hanno tante condizioni differenziali (due di 3° ordine od una sola di 2° ordine) per ciascuna S. Bisognerà dunque, per determinare con dati al contorno una funzione biarmonica U, olomorfa in Γ, dare sulle singole S una u olomorfa, verificante le debite condizioni differenziali e determinare con una quadratura la v associata (definita a meno di una costante addittiva o della scelta di una funzione olomorfa di una variabile reale, se la faccia è iperplanoidica). Infine occorrerà porre la condizione che sopra ogni σ comune a due faccie S', S'' le u, v relative ad S', S'' subordinino la medesima funzione f: il che si esprime mediante condizioni integrali (indicate, pel caso del bicilindro, nella Memoria A). *Queste condizioni integrali, aggiunte alle condizioni differenziali, risultan poi sufficienti*, a causa di un noto teorema di Levi–Civita (ved. il n. succ.).

8. La efficacia e la sintetica concisione del metodo di passaggio dal reale al complesso si manifestano anche quando si voglia trattare l'esten-

(1) Poichè la U, essendo biarmonica, è anche armonica, essa vien espressa mediante un integrale triplo, esteso a Δ, che opera sul prodotto della u per una funzione ben determinata, dipendente soltanto dalla forma del contorno (ved. la Memoria B).

sione alle funzioni di due variabili del punto di vista locale di Cauchy: estensione dovuta al Levi-Civita [1] e che qui ritroveremo in poche battute. Si tratta di provare che data in S_4 una superficie (analitica, regolare) σ ed una qualunque funzione complessa f, olomorfa, del punto di σ, esiste una ed una sola $F(x, y)$ olomorfa in un intorno di σ, che sopra la superficie si riduce ad f. Fa eccezione soltanto il caso in cui σ sia caratteristica.

Scelgasi all'uopo come piano $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ un piano caratteristico tale che i piani ad esso paralleli seghino σ, attorno a P, soltanto in un punto [2] (il che si ottiene, se occorre, senza alterare i termini della questione, con una rotazione pseudoconforme). Le equazioni di σ attorno a P assumono allora la forma:

$$(8) \qquad y_1 = \psi_1(x_1, x_2) \quad , \quad y_2 = \psi_2(x_1, x_2)$$

e, mediante le consuete sostituzioni ed estensioni del campo di variabilità, le (8) si trasformano nelle:

$$y + \bar{y} = 2\,\Psi_1(x, \bar{x}) \quad , \quad y - \bar{y} = 2\,i\,\Psi_2(x, \bar{x}),$$

dalle quali scende:

$$(10) \qquad y = \psi_1(x, \bar{x}) + i\,\psi_2(x, \bar{x}).$$

Ora, se in P (epperò in tutto un intorno di P su σ) è $\frac{\partial(\Psi_1 + i\,\psi_2)}{\partial \bar{x}} \neq 0$, la (10) consente di calcolare $\bar{x}$ come funzione olomorfa di x, y, epperò $\bar{x}, \bar{y}$ risultan funzioni olomorfe di x, y. Onde l'*estensione* $\Phi(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ della f data su σ, trasformasi in una $F(x, y)$ olomorfa, che in tutto l'intorno di P su σ s'identifica con f. Se invece in P e nell'intorno è $\frac{\partial(\Psi_1 + i\,\psi_2)}{\partial \bar{x}} = 0$, cioè $\psi_1 + i\,\psi_2$ indipendente da $\bar{x}, y$ è senz'altro sopra σ funzione olomorfa di x e quindi σ è caratteristica. Qualora infine esistano due distinte funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ subordinanti su σ la stessa f, la differenza $F_1 - F_2$ è nulla su σ, epperò anche in tal caso σ è caratteristica. Il teorema è così completamente dimostrato.

9. Il teorema concernente la possibilità del prolungamento analitico di una funzione biarmonica al di là di un contorno (analitico, regolare) ov'essa sia olomorfa, teorema che ho dimostrato nella Memoria B poggiandomi sull'analogo teorema di Schwarz per le funzioni armoniche, risulta qui un'ovvia conseguenza del teorema del n. 6.

(1) «Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei», 1905.

(2) Si tenga conto che per ogni retta tangente a σ in P passa un sol piano caratteristico, sicchè i piani caratteristici contenenti le tangenti in P sono ∞^1 (od uno solo, se il pian tangente in P è caratteristico); mentre i piani caratteristici per P sono ∞^2.

10. La teoria svolta può estendersi (e lo farò in seguito) alle funzioni di più variabili (per le quali vale evidentemente il teorema di Hartogs) e al corrispondente problema di Dirichlet. E si può estendere pure alle funzioni analitiche di più variabili reali e di più variabili complesse, analogamente a quanto s'è accennato per le funzioni di una variabile reale e di una complessa. Per queste ultime, che si rappresentano nello spazio ordinario, dopo fissato un fascio di piani paralleli come caratteristici, vale (come proverò altrove) un teorema analogo a quello di Hartogs: la funzione è olomorfa all'interno del campo circondato da una superficie chiusa (analitica, regolare) quando è olomorfa attorno al contorno.

Meccanica. — *Sulla variabilità della massa.* Nota [1] del Socio C. SOMIGLIANA.

Il concetto di variabilità della massa viene ora generalmente collegato colla forma relativistica delle equazioni del moto di un punto. La massa risulta così dipendente dal quadrato della velocità secondo una funzione analitica ben determinata [2]. E si è trovato che molte proposizioni fondamentali della dinamica ordinaria continuavano a sussistere anche con questa forma generalizzata delle equazioni del movimento.

Si presenta allora naturale la domanda se non sia parimenti possibile costruire una dinamica, la quale conservi pure i lineamenti generali della dinamica classica, senza prescrivere *a priori* una forma determinata di dipendenza della massa dalla velocità.

La risposta a questa domanda è affermativa. È ciò che mi propongo di dimostrare nella presente Nota.

Ammettiamo che le equazioni del moto di un punto possano dedursi dall'annullare la variazione di un integrale Hamiltoniano,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \tag{1}$$

nel quale la funzione L di Lagrange ha la forma seguente:

$$L = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{v^2} f(v^2)\, dv^2 - U \tag{2}$$

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) Altre forme, ma sempre determinate, per la dipendenza della massa dalla velocità, si trovano nella Memoria di M. ABRAHAM, *Principien der Dynamik des Elektrons* («Annalen der Physik», Bd. 10, 1903, s. 152). V. anche dello stesso autore: *Theorie der Elektrizität*, II. Bd. (zweite Auflage), Kap. III: *Die Mechanik der Elektronen.*

ove $f(v^2)$ è una funzione arbitraria del quadrato v^2 della velocità, α è una costante ed U l'energia potenziale del campo, in cui il punto si muove.

Dalla (1) ricaviamo subito le equazioni del movimento nella forma solita, cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

essendo q_1, q_2, q_3 le coordinate del punto e q_1', q_2', q_3' le loro derivate rispetto al tempo t.

Dalla (2) si ha poi

$$\frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{1}{2} f(v^2) \frac{\partial v^2}{\partial q_i'}$$

per cui se le coordinate sono le ordinarie cartesiane e quindi

$$v^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

si ha

$$\frac{\partial L}{\partial q_1'} = x_1' f(v^2) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_2'} = x_2' f(v^2) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_3'} = x_3' f(v^2) . \tag{4}$$

Le equazioni del movimento prendono così la forma

$$\frac{d}{dt}(x_1' f(v^2)) = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \quad , \quad \frac{d}{dt}(x_2' f(v^2)) = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{d}{dt}(x_3' f(v^2)) = -\frac{\partial U}{\partial x_3} . \tag{5}$$

È chiaro allora che basta porre

$$f(v^2) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

per avere immediatamente dalle equazioni precedenti quelle che sono considerate come le equazioni del moto nella relatività, m e c avendo i significati soliti.

Ora è ben noto che dalle equazioni (3) quando la $f(v^2)$ ha la forma (5) è possibile ricavare una relazione, la quale equivale al teorema dell'equivalenza fra forza viva e lavoro delle forze applicate, cioè è possibile dimostrare che esiste una funzione di v^2, il cui differenziale equivale al lavoro elementare delle forze esterne. Una tale proprietà sussiste anche per le equazioni generali (3), in cui $f(v^2)$ è una funzione qualsiasi.

Consideriamo infatti l'espressione

$$W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' - L \tag{6}$$

e decidiamo rispetto al tempo. Si ha

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'}q_i' + \frac{\partial L}{\partial q_i'}q_i''\right) - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}q_i' + \frac{\partial L}{\partial q_i'}q_i''\right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

e tenendo conto delle equazioni (3) e della definizione (2) di L

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

per cui se la funzione U potenziale non contiene il tempo esplicitamente, sarà

(7) $$W = \text{cost.}$$

Ora per la (2) abbiamo

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial q_i'}q_i' = \frac{1}{2}f(v^2)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v^2}{\partial q_i'}q_i'$$

Perciò se noi ammettiamo, come ordinariamente avviene, che v^2 sia una funzione omogenea di 2° grado delle q_i', quest'ultima somma avrà per valore $2v^2$, e quindi W prende la forma

$$W = v^2 f(v^2) - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{v^2} f(v^2)\,dv^2 + U.$$

Perciò se poniamo

(8) $$\tau = v^2 f(v^2) - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{v_2} f(v^2)\,dv^2$$

qualunque sia la costante α, dalla (7) abbiamo

(9) $$d\tau = -dU.$$

È la relazione che si trattava di dimostrare. Si verifica poi immediatamente che nei casi noti la espressione (8) di τ, generalizzazione della forza viva, riproduce le espressioni ordinariamente accettate. Per $f(v^2) = m$, caso newtoniano, si ha da (8)

$$\tau = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\alpha$$

ove α è una costante arbitraria, da porsi uguale a zero, se vogliamo che la forza viva si annulli colla velocità.

Se invece supponiamo valida la (5) si ha dalla (8)

$$\mathcal{T} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + c^2 m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \text{cost.}$$

e quindi, se supponiamo nulla la costante,

$$\mathcal{T} = \frac{c^2 m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

che è l'espressione ordinariamente ammessa. Da essa, per $v = 0$, si ha $\mathcal{T} = c^2 m$; ma basterebbe prendere per la costante d'integrazione il valore $-c^2 m$, perchè $\mathcal{T}$ acquisti il valore nullo per $v = 0$, anche nella teoria relativistica. In questo caso si ha $\alpha = 0$ nella espressione (8) di $\mathcal{T}$.

L'annullarsi, o no, di $\mathcal{T}$ per $v = 0$ è quindi una pura quistione di convenzione, che, *volendo*, può essere collegata con qualche ragione intrinseca di carattere meccanico (Cfr. Levi-Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica*, § 5, p. 13, ove la costante additiva della forza vien messa in relazione col concetto di una energia intrinseca della particella in movimento).

Noterò infine che il procedimento di calcolo, seguito da noi, corre parallelo a quello usato da L. De Broglie nel primo capitolo della sua *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, per ritrovare l'equazione della forza viva nella teoria relativistica del moto di un punto.

Parimenti considerando l'energia come espressa in funzione delle q_i, p_i, invece delle q_i, q_i' e calcolandone le derivate rispetto alle p_i e q_i in questa ipotesi, si giunge subito alle equazioni canoniche del moto

$$(10) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \qquad i = 1, 2, 3$$

ove $H = H(q_i, p_i, t)$ è ciò che diviene la W colla sostituzione indicata.

Le equazioni canoniche Hamiltoniane del moto continuano perciò a valere anche nella nostra ipotesi generale di una massa variabile colla velocità, secondo una funzione arbitrariamente fissata.

Supponiamo ora che non esista campo di forza e consideriamo la rappresentazione cartesiana (5). Si hanno allora gli integrali

$$x_1' f(v^2) = a_1 \quad , \quad x_2' f(v^2) = a_2 \quad , \quad x_3' f(v^2) = a_3$$

ove le a_1, a_2, a_3 sono delle costanti. Se sono dati i valori iniziali delle componenti della velocità, e quindi anche la velocità iniziale v_0, queste costanti sono determinate, e le x_1, x_2, x_3 risultano funzioni lineari del tempo.

Ma se fossero dati i valori delle componenti delle quantità di moto iniziale, cioè i valori delle a_1, a_2, a_3, la velocità iniziale v_0 dovrebbe essere determinata dalla equazione

$$v_0^2 f(v_0^2) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2 . \tag{11}$$

Se questa equazione ha una sola radice v_0^2, le equazioni del moto sono

$$x_i = \frac{at}{f(v_0^2)} + b_i \qquad i = 1, 2, 3$$

ove le b_1, b_2, b_3 sono costanti. Il principio newtoniano del moto *uniformiter in directum*, quando non esiste campo di forza è ancora salvo, ma l'unicità del moto è vincolata all'unicità delle radici dell'equazione (11). Nel caso della relatività la (11) ha la forma

$$\frac{mv_0^2}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = a^2$$

da cui

$$v_0^2 = \frac{a^2}{m + \frac{a^2}{c^2}} .$$

L'unicità della soluzione è verificata.

Un altro caso analogo si avrebbe ponendo

$$f(v^2) = me^{\frac{v^2}{k^2}}$$

con k^2 costante.

Scomparirebbe allora ogni limite superiore per la velocità, e sarebbe

$$\tau(v^2) = m\left(v^2 - \frac{k^2}{2}\right)e^{\frac{v^2}{k^2}} - \frac{1}{2}mc^{\frac{a^2}{k^2}} = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{3}{2}\frac{v^2}{k^2} + \frac{5}{6}\frac{v^4}{k^4} + \cdots\right) + \text{cost.}$$

Notiamo infine che invece della funzione $f(v^2)$, si potrebbe supporre data arbitrariamente la $\tau(v^2)$. Posto in questo caso

$$\xi = v^2 \qquad , \qquad \psi(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\xi} f(\xi)\, d\xi .$$

La determinazione della ψ risulta subito dall'equazione

$$2\xi\frac{d\psi}{d\xi} - \psi = \tau(\xi) .$$

da cui

$$\psi = \frac{1}{2}\xi^2 \int_{\beta}^{\xi} \bar{\tau}(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2} \quad , \quad f(\xi) = 2\frac{d\psi}{d\xi} \cdot$$

L'arbitrarietà che così risulta per queste funzioni f o $\bar{\tau}$, apre una larga possibilità di generalizzazione per le equazioni del movimento. Fenomeni che non rientrino nella forma ordinaria delle equazioni del moto, potranno condurre a scoprire le forme più opportune per queste funzioni.

Quando si vogliano generalizzare le equazioni che stanno a base delle teorie meccaniche, la via della pura generalizzazione analitica è probabilmente la più opportuna e la meno pericolosa, in confronto alla introduzione di concetti nuovi ed ipotesi fondamentali nuove, che raramente resistono alla critica. La generalizzazione analitica è infatti sempre legittima, salvo naturalmente a discuterne in seguito le conseguenze in base ai fatti osservati.

Meccanica. — *I corpi aerodinamici a resistenza negativa* (*Corpi portanti*). Nota del Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ditiocarbammati e Nitroso-ditiocarbammati di ferro* [1]. Nota [2] del Corrisp. L. Cambi e di A. Cagnasso.

Ho comunicato recentemente i risultati delle prime indagini intraprese sui ditiocarbammati di ferro che mi hanno condotto alla scoperta di una nuova ed interessante classe di nitroso–solfosali [3].

Lo studio dei ditiocarbammati e dei nitroso–derivati corrispondenti, principalmente della loro suscettibilità magnetica, ha offerto un comportamento saliente ed inatteso, che mi ha indotto ad estendere le ricerche ad una vasta serie di derivati dalle ammine secondarie.

Vennero finora preparati i solfosali seguenti, con i metodi già indicati nella Nota precedente, isolandoli con trattamenti, adeguati ad ogni singolo caso, che verranno descritti altrove.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 17 maggio 1931.

(3) Questi «Rendiconti», (6) XIII, 254, 1931.

	Ditiocarbammati	Nitroso-ditiocarbammati
N·N-Dimetil	$[(CH_3)_2N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(CH_3)_2N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N·N-Dietil	$[(C_2H_5)_2N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(C_2H_5)_2N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N·N-Diisobutil	$[(C_4H_9)_2N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(C_4H_9)_2N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N-Piperidil	$[(C_5H_{10})N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(C_5H_{10})N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N·N-Etil-cicloesil	$[(C_2H_5)(C_6H_{11})N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(C_2H_5)(C_6H_{11})N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N·N-Dibenzil	$[(C_7H_7)_2N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(C_7H_7)_2N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N·N-Metil-fenil	$[(CH_3)(C_6H_5)N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(CH_3)(C_6H_5)N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$
N·N-Etil-fenil	$[(C_2H_5)(C_6H_5)N\cdot CS_2]_3Fe$	$[(C_2H_5)(C_6H_5)N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$

I composti delle due serie qui indicate sono in generale caratterizzati allo stato di purezza da elevato grado di stabilità. I nitroso-derivati sono assai più stabili dei corrispondenti sali ferrici semplici. Le soluzioni dei derivati delle due serie presentano rispettivamente colore pressochè identico:

$[(R'R'')N\cdot CS_2]_3Fe$ nero-rossastro $[(R'R'')N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$ verde-giallo cupo

Nonostante tale relativa omogeneità di comportamento dirò, anticipando su quanto verrà esposto in una prossima Nota, che la suscettibilità magnetica dei sali della prima serie varia col variare dei radicali del gruppo R'R''N-. Cioè, risulta che l'intima struttura elettronica, in questa vasta classe di composti omeopolari, è dipendente dallo stato di affinità degli aggruppamenti omologhi congiunti all'atomo metallico centrale.

Ma l'influenza del residuo R'R''N- sui caratteri dei ditiocarbammati è posta in ancora maggiore rilievo nei derivati dalle ammine primarie. Questi si differenziano nettamente dai precedenti non solo per la suscettibilità magnetica e per il colore

$[RHN\cdot CS_2]_3Fe$ nero-violaceo $[RHN\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$, rosso-arancio cupo

ma anche per i caratteri chimici.

I sali ferrici sono autossidabili, tanto solidi quanto in soluzione: si scindono all'aria generando prodotti ferrici basici e di demolizione del residuo ditiocarbammico. Si distinguono per la solubilità, limitata ai solventi non acquosi a più elevata costante dielettrica, quali l'acetone, la piridina, l'acetonitrile, ecc.

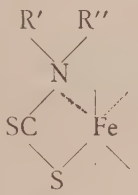
I derivati ferrici dalle ammine a più basso peso molecolare reagiscono con l'NO generando i nitroso-solfosali analogamente a quanto ho osservato con L. Szegö per l'etil-xantogenato ferrico [1], ma con probabile formazione di ditiocarbammato di nitrosile:

$$(C_2H_5HN\cdot CS_2)_3Fe + 2\,NO \rightarrow (C_2H_5HN\cdot CS_2)_2Fe\cdot NO + C_2H_5HN\cdot CS_2\cdot NO$$

Anche in questo caso, all'accresciuta reattività del solfosale ferrico con l'ossigeno corrisponde analoga attività con l'NO.

Debbo aggiungere che pure in queste serie si nota una maggiore stabilità nei nitroso-solfosali i quali posseggono, a differenza dei primi, alta solubilità nei solventi a più bassa costante dielettrica.

In una prossima Nota verranno discussi i delicati problemi sulla struttura dei composti omeopolari che vengono sollevati da queste ricerche. Lo schema semplice



appare come tale insufficiente a chiarire le variazioni dei caratteri osservate nelle serie dei composti in parola.

Espongo ora i dati che riguardano i derivati dalle ammine primarie, ignoti fin qui, che ho isolato con grado di purezza sufficiente.

I risultati sperimentali cui accenno, di interesse generale per le teorie delle valenze, superano le quistioni sulla struttura dei nitroso-solfosali, ma chiudendo farò il rilievo che non sussiste in generale quella dipendenza fra colore di nitrosil-composti del ferro e stato di ionizzazione dei complessi stessi, voluta da alcuni autori [2], poichè i due tipi

$$[(R'R'')N\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO \qquad [RHN\cdot CS_2]_2Fe\cdot NO$$

verde — rosso-aranciato

presentano appunto le notevoli differenziazioni di colore indicate, pur non essendo ionizzati.

L. Cambi.

(1) Questi «Rendiconti» (6) XIII, 93, 1931.
(2) W. Manchot, «Berichte», *47* (1914), p. 1601.

Parte sperimentale.

1. *N-monoetil-ditiocarbammato*: $(C_2H_5HN \cdot CS_2)_3Fe$. Venne preparato per doppio scambio dal ditiocarbammato ammonico o di monoetilammonio. Alla soluzione diluita del ditiocarbammato, a freddo, in atmosfera inerte, con viva agitazione venne aggiunta lentamente quella di allume ferrico ammonico al 5 %, in debole difetto. Il sale precipitato venne raccolto su filtro, lavato rapidamente, essicato nel vuoto. Di fresco preparato si presenta in minuti cristalli nero-ardesia untuosi al tatto.

All'analisi ha dato i risultati:

	Fe	N	S
Calcolato	13.42 %	10.10	46.22
Trovato	13.36 %	10.08	46.33

È insolubile in cloroformio, benzolo, solfuro di carbonio, estremamente solubile in acetone, piridina, acetonitrile con colore violaceo intenso volgente al verde.

All'aria si ossida già allo stato solido: le soluzioni acetoniche, piridiche, ecc. sono estremamente ossidabili. Fra i prodotti di decomposizione allo stato solido è facile avvertire l'isosolfocianuro di etile.

Sospeso in acqua assorbe NO e genera il nitroso-solfosale.

2. *Nitroso-N-monoetil-ditiocarbammato*: $(C_2H_5HN \cdot CS_2)_2Fe \cdot NO$. La preparazione venne condotta col metodo su accennato oppure analogamente a quella descritta nelle nostre Note precedenti per altri nitroso-derivati. Di fresco preparato il sale si presenta in grumi pastosi rossastri; dopo essicamento nel vuoto venne purificato mediante ripetute dissoluzioni a freddo in benzolo e precipitazione con etere di petrolio (p. e. 40°–60°). Si ottiene generalmente oleoso. Nel vuoto si solidifica in scagliette bruno-rossastre.

Al controllo analitico è risultato:

	Fe	N	S
Calcolato	17.13 %	12.89	39.35
Trovato	17.03 %	12.95	39.00

Il peso molecolare è stato determinato in benzolo:

solvente gr. 15.97 ; sostanza gr. 0.1474 ; $\Delta = 0.13$

peso molecolare calcolato 326 ; trovato 348

Il nitroso-solfosale è solubilissimo in cloroformio, solfuro di carbonio, benzolo, con colore rosso-aranciato. Tali soluzioni si autossidano con assai maggiore lentezza di quelle del sale ferrico precedente.

Trattato, in atmosfera inerte, con solfato di rame o d'argento a caldo sviluppa pressochè quantitativamente NO.

3. N-*monobenzil-ditiocarbammato*: $(C_7H_7HN \cdot CS_2)_3Fe$. Preparato analogamente al precedente da un eccesso di benzil-ditiocarbammato ammonico, si presenta in massa nera peciosa, che si discioglie in cloroformio dal quale precipita in minuti cristalli neri. Allo stato di purezza è quasi insolubile in questo solvente.

L'analisi ha dato:

	Fe	N	S
Calcolato	9.27 %	6.97	31.95
Trovato	9.03 %	6.79	32.18

È più stabile del precedente, ma è analogamente autossidabile: possiede colore e caratteri analoghi di solubilità. Sospeso in acqua non reagisce con NO.

4. *Nitroso*-N-*monobenzil-ditiocarbammato*: $(C_7H_7HN \cdot CS_2)_2Fe \cdot NO$. È stato preparato col metodo generale da noi descritto. Anch'esso si presenta in masse peciose rosso-brune e si purifica con procedimento analogo al nitrososale precedente. Puro si presenta in scaglie brune-rossastre solubili con caratteristico colore rosso-aranciato, in benzolo, cloroformio, solfuro di carbonio.

I risultati dell'analisi sono:

	Fe	N	S
Calcolato	12.40 %	9.34	28.50
Trovato	12.26 %	9.60	28.62

Il peso molecolare in benzolo risulta semplice.

solvente gr. 21.93 ; sostanza gr. 0.4632 ; $\Delta = 0.215$

peso molecolare calcolato 450 ; trovato 479.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie integrali di due o più equazioni a derivate parziali del 3° ordine.* Nota di E. Bompiani, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

1. Sia dato un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee in una funzione incognita di due variabili indipendenti u, v.

Un gruppo qualsiasi di soluzioni linearmente indipendenti di detto sistema può assumersi come quello delle coordinate proiettive omogenee di un punto variabile sopra una superficie che si dice *integrale* del sistema di equazioni dato.

Questa interpretazione proiettiva del sistema è giustificata e resa naturale dal fatto che una trasformazione proiettiva fa passare da una superficie integrale ad una superficie integrale.

Ma non è affatto vero in generale che due superficie integrali dello stesso sistema siano omografiche. L'equivalenza, o meno, rispetto alle omografie, di due qualsiansi superficie integrali è strettamente legata al fatto che l'integral generale del sistema dipenda da costanti arbitrarie o da funzioni arbitrarie; solo nel primo caso è determinata la dimensione dell'ambiente delle superficie integrali e queste riescono omografiche.

Nel secondo, che è quello generale, tale dimensione *non* è determinata dal sistema dato (e può esser benissimo diversa per due diverse superficie integrali) e non si ha equivalenza come nel caso precedente.

Sicchè sembrerebbe impossibile, nel caso generale, costruire una teoria geometrica di un tal sistema di equazioni.

2. Ciò non è: infatti ad ogni punto della superficie sono associati certi spazi – che io chiamo *osculatori* – e in essi certe configurazioni che subiscono una trasformazione omografica quando si passi da una ad un'altra qualsiasi delle superficie integrali del sistema dato. Queste proprietà invarianti costituiscono la *geometria proiettiva del sistema di equazioni a derivate parziali.*

Risulta da queste considerazioni che quando l'ambiente di tutte le superficie integrali non sia determinato dal sistema stesso, esso è un elemento affatto estraneo alla questione; e che il caso in cui sia determinato è affatto particolare (l'integral generale dipende da sole costanti arbitrarie) e in un certo senso banale potendosi le superficie integrali in tal caso studiarsi direttamente in detto ambiente; ciò che non è possibile nel caso generale.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

Allo svolgimento di queste idee ho dedicato, per il caso di un sistema di ordine qualsiasi, un lavoro del 1919 [1]; e, a titolo d'esemplificazione, ho trattato in esso delle superficie integrali di una o due equazioni a derivate parziali del 3° ordine.

3. Un elemento geometrico essenziale è la dimensione dello spazio che contiene gli S_k osculatori in un punto alle curve della superficie uscenti da esso, o spazio k - - osculatore alla superficie nel punto, che indico con $S(k)$ [2]. Essa dipende unicamente dal sistema dato, per valori di $k \leq$ all'ordine del sistema, e non dalla particolare superficie integrale che si considera: è un carattere proiettivo del sistema.

È possibile ottenere risultati generali relativi ad un sistema d'ordine qualsiasi mediante i due lemmi seguenti [3].

Lemma I. – *Se gli* $S(\nu)$ *ed* $S(\nu+1)$ *osculatori alla superficie in un suo punto generico hanno dimensione* ρ *la superficie appartiene ad un* S_ρ.

Lemma II. – *Se in un punto generico di una superficie* $S(\nu) \equiv S_\rho$ *e* $S(\nu+1) = S_{\rho+1}$ *o la superficie sta in* $S_{\rho+1}$ *oppure possiede* ∞^1 *curve negli* $S_{\rho-\nu}$ *di una sviluppabile* [4].

Questi due Lemmi permettono di metter subito da parte alcuni tipi di superficie che si presentano come elementari nella discussioue dei sistemi di equazioni. Vediamolo, come nel lavoro citato, per il caso di due equazioni a derivate parziali del 3° ordine che non siano conseguenze differenziali di una stessa equazione a derivate parziali del 2° ordine (sempre lineare ed omogenea).

4. Per le superficie in esame è $S(2) = S_5$, $S(3) \equiv S_7$. Quanto alla dimensione di $S(4)$, potendosi dalle due equazioni del 3° ordine ricavarsi *almeno tre* equazioni del 4° ordine indipendenti, essa non potrà superare 9. Sicchè i casi da discutere saranno

$$S(4) \equiv S_7 \quad , \quad S(4) \equiv S_8 \quad , \quad S(4) \equiv S_9 .$$

I primi due casi sono appunto quelli considerati nei due lemmi precedenti. Rimane il caso essenzialmente nuovo $S(4) \equiv S_9$. *In questo caso* ho

(1) *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*, « Rend. R. Istit. Lombardo », vol. LII (1919), parte I, pp. 610-625; parte II, pp. 626–636. Citerò questo lavoro con l'indicazione D. S. I.

(2) Questa nozione risale, almeno per $k = 2$, al Del Pezzo. Essa trovasi insieme ad altre più generali di spazi collegati proiettivamente ad un punto di una superficie e ad elementi di curve per esso nella mia Nota, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Atti R. Accad. di Torino », vol. XLVIII, pp. 393–410.

(3) D. S. I., pp. 614-615.

(4) Ciò significa che gli spazi caratteristici di questi $\infty^1 S_{\rho-\nu}$ hanno dimensione $\rho - \nu - 1$.

dimostrato [1] che il sistema dato può, con opportuna scelta di variabili u, v ridursi all'uno o all'altro dei due tipi

$$\text{I} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 x}{\partial u^3} = \cdots \\ \dfrac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = \cdots \end{cases}, \qquad \text{II} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = \cdots \\ \dfrac{\partial^3 x}{\partial u \partial^2 v} = \cdots \end{cases}$$

ove i puntini indicano un complesso di termini lineari nella x e nelle sue derivate prime e seconde.

Sicchè riassumendo:

Le superficie integrali di due equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee del 3° ordine (e di nessuna equazione del 2° ordine) appartengono necessariamente ad uno dei tipi seguenti:

1) *Superficie di* S_7.
2) *Superficie di* S_8 *con* $S(3) \equiv S_7$.
3) *Superficie con* ∞^1 *curve negli* S_4 *di una sviluppabile.*
4) *Superficie soddisfacenti al sistema* I.
5) *Superficie soddisfacenti al sistema* II.

Tutto ciò, insieme alle proprietà geometriche delle linee u e v definite sulle superficie degli ultimi due tipi e ad una trasformazione analoga a quella di Laplace per le superficie dell'ultimo tipo, si trova nel mio lavoro del 1919.

5. Il sig. E. P. Lane [2], dell'Università di Chicago, ed un suo allievo Ch. F. Bowles [3], hanno ripreso recentemente in esame le superficie che formano oggetto di questa Nota: la quale ha appunto per iscopo di confutare alcune affermazioni inesatte del Lane riguardanti il mio lavoro citato.

Infatti il Lane alla fine della sua Nota ritiene opportuno istituire un confronto fra i suoi ed i miei risultati e crede di scoprire in questi una lacuna che non esiste.

Parrebbe infatti, leggendo il suo lavoro, che io avessi scoperto soltanto i tipi 4) e 5), corrispondenti ad $S(4) \equiv S_9$: ciò indica soltanto che il Lane non si è reso conto del contenuto della prima parte del mio lavoro [4] nè

(1) D. S. I., p. 631. La limitazione $\nu > 3$ (riferita al numero delle equazioni $\frac{\nu(\nu-1)}{2} - 1$ d'ordine $\leq \nu$) porta che vi sono nell'ipotesi in discussione soltanto 3 equazioni del 4° ordine (necessariamente derivate da quelle del 3°), cioè appunto $S(4) \equiv S_9$.

(2) *Integral surfaces of pairs of partial differential equations of the third order*, «Transactions of the American Mathem. Soc.», vol. 32, pp. 782-793.

(3) *Integral surfaces of pairs of differential equations of the third order* (A dissertation submitted to the graduate faculty in candidacy for the degree of doctor of philosophy), «The University of Chicago Libraries», 1930, pp. 1–106.

(4) La quale infatti non è citata dal Lane: v'è soltanto un vago accenno ad essa nelle seguenti parole: *appealing to some general theory developed earlier in his paper.*

si è accorto della limitazione ($\nu > 3$) posta esplicitamente sia nel ragionamento che conduce ai tipi I e II sia nel relativo enunciato e che equivale ad $S(4) = S_9$ (gli altri casi essendo già inclusi nella trattazione precedente).

È del resto facile controllare *a posteriori* che il Lane e il Bowles non trovano tipi che non siano quelli da me dati, a parte un'eccezione [1]: ma quest'eccezione, costituita dalle superficie con ∞^1 curve in S_6, è evidentemente uno sbaglio perchè è evidente che tali superficie non soddisfano, per il fatto indicato, ad alcuna equazione del 3° ordine. In realtà le superficie soddisfacenti a quel sistema sono quelle della mia classe 3) [2].

Sicchè non ci sono superficie nella classificazione del Lane che non figurino nella mia: con ciò non affermo che le due classificazioni coincidano perchè al Lane (e quindi al Bowles) è sfuggito il tipo più generale delle mie equazioni, riportate da lui come (17), che egli ha creduto di semplificare ulteriormente con un ragionamento sbagliato (p. 787).

Così pure non è affatto nuovo, come il Lane crede, l'ultimo teorema *in corsivo* dato nella sua Nota (p. 793) perchè esso si trova stampato pure *in corsivo* nella mia Nota del 1919 (p. 633).

Ulteriori dettagli saranno dati in altro lavoro [3], bastandomi qui d'aver rilevato l'inconsistenza dei rilievi fattimi dal Lane.

Aggiungo anche che sono inclusi, come caso particolarissimo, nei miei risultati i tipi di superficie con $S(2) = S_5$ ed $S(3) = S_6$, cioè soddisfacenti a tre equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee del 3° ordine, alle quali il Lane, senza neppure citare la mia Nota, dedica un altro lavoro [4] senza peraltro arrivare, nonostanti i lunghi calcoli, a caratterizzarle geometricamente.

Anche di ciò mi occupo nel lavoro promesso.

(1) V. il lavoro del Bowles, p. 96.

(2) Sono di conseguenza sbagliate le ulteriori conseguenze tratte dal Bowles.

(3) In corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

(4) *Integral surfaces of triads of partial differential equations of the third order*, « The Tôhoku Mathem. Journal », vol. 33 (1930), pp. 12-20.

Matematica. — *Su di un problema d'interpolazione.* Nota di Ugo Broggi, presentata[1] dal Corrisp. L. Berzolari.

Sia data la serie di potenze

$$(1) \qquad \sum a_n z^n$$

di raggio di convergenza $\rho \geqq 0$. L'esistenza di una funzione intera $\varphi(z)$ che in corrispondenza dei valori $z = 0, 1, \cdots$ di z assume il valore del corrispondente coefficente della serie, discende da un teorema assai più generale del Mittag–Leffler che, nel caso particolare che qui si considera, porta, ad esempio, a definire $\varphi(z)$ come il prodotto di $\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi}$ per una funzione meromorfa avente in $z = n$ un polo di ordine uno e di residuo $(-1)^n a_n$, $(n = 0, 1, 2 \cdots)$.

Non è forse privo di interesse notare che ove sia $\rho > 1$ può venire formata una funzione intera $F(z)$

$$(2) \qquad F(z) = p_1(z)\, e^{\alpha_1 z} + p_2(z)\, e^{\alpha_2 z} + \cdots + p_\nu(z)\, e^{\alpha_\nu z}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ sono costanti e $p_1(z), p_2(z), \cdots, p_\nu(z)$ polinomi in z, tale che

$$|F(n) - a_n| < \varepsilon \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

dove ε è positivo e qualunque.

1. Se $a_0, a_1, \cdots$ sono i termini di una successione ricorrente di scala $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$

$$a_{n+p} + A_1 a_{n+p-1} + \cdots + A_p a_n = 0$$

è

$$a_n = F(n)$$

qualunque sia il valore di ρ.

Si ha infatti, se $F(z)$ è la soluzione dell'equazione lineare alle differenze con coefficenti costanti

$$f(z+p) + A_1 f(z+p-1) + \cdots + A_p f(z) = 0$$

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

corrispondente alle condizioni

$$f(0) = a_0 , f(1) = a_1 , \cdots , f(p-1) = a_{p-1}$$

e $\beta_1 , \beta_2 , \cdots , \beta_\nu$ sono le radici distinte dell'equazione algebrica

$$z^p + A_1 z^{p-1} + \cdots + A_{p-1} z + A_p = 0$$

di ordine rispettivamente uguale a $\pi_1 , \pi_2 , \cdots , \pi_\nu$

$$\pi_1 + \pi_2 \cdots + \pi_\nu = p$$

che

$$F(z) = p_1(z)\beta_1^z + p_2(z)\beta_2^z + \cdots + p_\nu(z)\beta_\nu^z$$

$$F(n) = a_n \qquad (n = 0 , 1 , \cdots)$$

dove $p_1(z) , p_2(z) , \cdots , p_\nu(z)$ sono polinomi in z di grado rispettivamente non maggiore di $\pi_1 - 1 , \pi_2 - 1 , \cdots , \pi_\nu - 1$.

Basta porre $\alpha_\nu = \log \beta_\nu$, $(\lambda = 1 , 2 , \cdots , \nu)$, dove $\log z$ designa uno qualsiasi degli infiniti valori del logaritmo di z, per ricondurre $F(z)$ alla forma (2).

2. $a_0 , a_1 , \cdots$ sono i termini di una successione ricorrente di scala $(A_1 , A_2 , \cdots , A_p)$ se la serie (1) è lo sviluppo di una funzione razionale di denominatore

$$Q(z) = A_p z^p + A_{p-1} z^{p-1} + \cdots + A_1 z + 1 ,$$

e solo allora. Ove ciò non sia, ma la serie (1) abbia un raggio di convergenza $\rho > 0$, la serie (1) definisce una funzione $f(z)$ regolare in un certo intorno A dell'origine al quale appartiene il circolo di convergenza C di (1). Per un noto teorema di Runge [1] può venire definita una successione di funzioni razionali

$$R_1(z) \quad , \quad R_2(z) , \cdots$$

tendenti uniformemente verso $f(z)$

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} R_n(z)$$

in ogni area A′ interna ad A. È infatti, ad esempio, per la formola di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z} dz$$

(1) C. Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, « Acta Mathematica », vol. 6, p. 229.

se l'integrale è preso lungo il contorno Γ'' di A', e ζ è punto di A', mentre

$$\int_{\Gamma''} \frac{\eta_n(w)}{w-\zeta}\,dw = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{s=1}^{n} \frac{\eta_n(w_s)}{w_s-\zeta}(w_{s+1}-w_s)\right\} = 2\pi i \lim_{n\to\infty} R_n(\zeta)$$

se i punti $w_1, w_2, \cdots, w_n$ dividono Γ'' in segmenti che tendono a zero col crescere indefinito di n, e w_s appartiene al segmento di Γ'' di estremi w_s e w_{s+1}.

Ove poi sia

$$f(\zeta) - R_n(\zeta) = \eta_n(\zeta)$$

è anche

$$f^{(k)}(\zeta) - R_n^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Gamma''} \frac{\eta_n(w)}{w-\zeta}\,dw$$

l'integrale essendo preso lungo il contorno Γ'' di un'area A'' racchiudente A' e racchiusa in A; la differenza $f^{(k)}(\zeta) - R_n^{(k)}(\zeta)$ tende a zero col tendere a zero di $f(\zeta) - R_n(\zeta)$. Se è

$$R_n(\zeta) = \frac{P_n(\zeta)}{Q_n(\zeta)} = b_0 + b_1\zeta + \cdots$$

$$Q_n(\zeta) = B_m\zeta^m + B_{m-1}\zeta^{m-1} + \cdots + B_1\zeta + 1$$

$b_0, b_1, \cdots$ sono i termini di una successione ricorrente di scala $(B_1, B_2, \cdots, B_m)$, il termine generale b_h della quale può venire determinato esplicitamente in funzione di $h, B_1, \cdots, B_m$ quando si determini $R_n^{(k)}(\zeta)$ e $R_n^{(k)}(0)$ a mezzo di una qualsiasi delle formole (di Faà di Bruno, di Cesaro $\cdots$) che danno la derivata k-esima di una funzione di funzione. Con a_k e b_k $(k = 0, 1, 2\cdots)$ appaiono così determinati

$$f^{(k)}(0) = k!\,a_0 \quad , \quad R_n^{(k)}(0) = k!\,b_k \quad , \quad R_n(k) = b_k .$$

Se Γ'' è una circonferenza di centro nell'origine e di raggio r maggiore di 1 e minore di ρ, si ha da

$$f^{(k)}(\zeta) - R_n^{(k)}(\zeta) = \frac{k!\,r^{-k}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta_n(w)\,e^{-ik\varphi}\,d\varphi$$

$$\left|f^{(k)}(\zeta) - R_n^{(k)}(\zeta)\right| \leq k!\,r^{-k}\,M$$

dove M designa il massimo del modulo di $\eta_n(\zeta)$ sul contorno di un'area racchiudente Γ'' ed appartenente ad A.

Si ha dunque, per quanto precede

$$|a_h - b_h| < r^{-h} M$$

e poichè si è supposto $r > 1$

$$\lim (a_h - b_h) = 0$$

mentre può venire definito $R_n(z)$ per modo che sia

$$|a_h - b_h| < \varepsilon \qquad (h = 0, 1, \cdots).$$

La soluzione $F(z)$ dell'equazione alle differenze

$$f(z + m) + B_1 f(z + m - 1) + \cdots + B_m f(z) = 0$$

corrispondente alle condizioni

$$f(0) = R_n(0) \quad , \quad f(1) = R_n(1), \cdots, f(m - 1) = R_n(m - 1)$$

è dunque una funzione intera definita da un'espressione finita della forma (2)

$$F(z) = p_1(z) e^{\alpha_1 z} + \cdots + p_\nu(z) e^{\alpha_\nu z}$$

tale che

$$|F(h) - a_h| < \varepsilon .$$

Se è $\rho \leq 1$ può solo scegliersi n grande per modo che M sia arbitrariamente piccolo e che sia

$$|F(h) - a_h| < \varepsilon$$

per $h = 0, 1, \cdots, N$, N essendo arbitrariamente grande.

Matematica. — *Le forme fondamentali delle costanti discontinue come funzioni circolari.* Nota di L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. A. Crocco.

1. Descritto, fig. 1, col centro C un cerchio di raggio $r = 1$, si assuma un suo diametro ON come asse delle y, la tangente nell'estremo O di questo diametro come asse delle x, e preso, sul cerchio, un punto P lo si unisca con i punti O ed N; al valore α dell'angolo NPO che così si ottiene si attribuisca il segno (+) se percorrendo il perimetro del triangolo NOP in modo che il diametro NO sia percorso dall'alto al basso l'area da esso racchiusa resta a sinistra dell'osservatore, ed il segno (—)

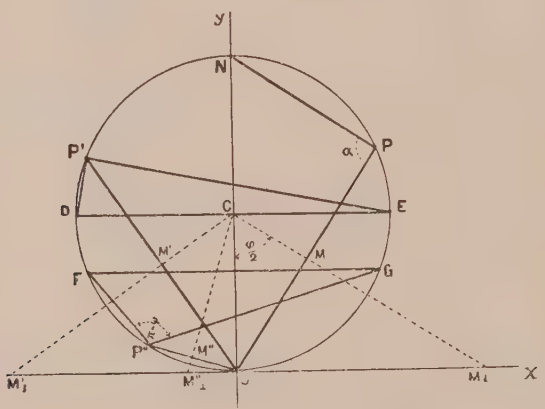


Fig. 1.

se resta a destra. Dal centro C del cerchio si proietti quindi in M_1 sull'asse OX il punto medio M della corda OP. Se è φ il valore dell'arco OP, percorso nel senso positivo, sarà $OM_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Ciò posto si scorge che mentre il punto P percorre la circonferenza NDOEN da $-\pi$ a $+\pi$ il punto M_1 percorre l'asse delle x da $-\infty$ a $+\infty$ e l'angolo α ad esso corrispondente ha costantemente il valore $-\frac{\pi}{2}$ per $\varphi < 0$, il valore $+\frac{\pi}{2}$ per $\varphi > 0$ ed è zero per $\varphi = 0$.

Quindi se, considerando come ascisse i valori $OM_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ si portano in corrispondenza ad essi come ordinate i valori degli angoli α sotto i quali dal punto P è visto il diametro fisso ON, si ottiene il diagramma A

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

della fig. 2 che rappresenta la funzione $\alpha = f_\pi(2 \operatorname{arc\,tg} x)$ esprimente il valore dell'angolo sotto il quale il diametro OP, cioè l'arco π, è visto dal punto P estremo dell'arco $\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} x$.

Da questo diagramma, con un primo cambiamento di assi

$$\left(x' = x\,,\, y' = y + \frac{\pi}{2}\right)$$

si passa a quello B e da questo con un secondo cambiamento

$$(x'' = x'\,,\, y'' = y' + a)$$

si passa a quello C della stessa figura.

I tre diagrammi A, B, C rappresentano quindi tutti una stessa funzione riferita ad assi diversi.

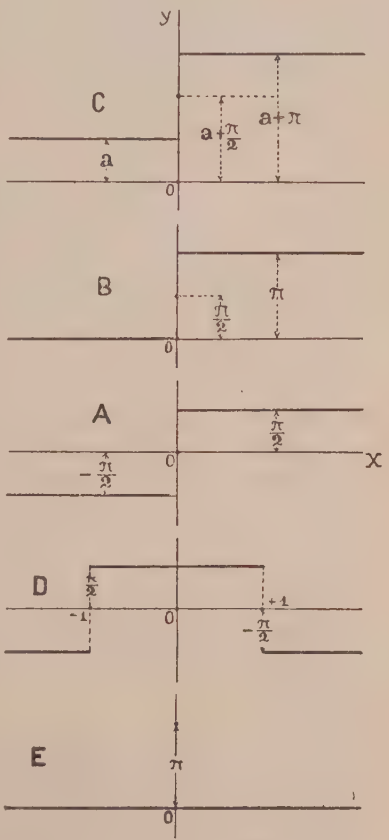


Fig. 2.

Si modifica realmente la funzione se invece del diametro ON si considera il diametro DE ad esso perpendicolare. Ripetendo la stessa costruzione del caso precedente, con la sola differenza di dare alle ordinate i valori degli angoli α sotto i quali dal punto mobile P' è visto il diametro DE ed assegnando a questi angoli valori positivi quando percorrendo il perimetro del triangolo P'ED in modo che il diametro DE sia percorso da destra a sinistra l'area da esso racchiusa resti a sinistra dell'osservatore, si ottiene il diagramma D della fig. 2, dal quale si scorge che la funzione ha il valore zero nei due punti di ascissa $|x| = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$, corrispondenti ai due momenti nei quali il punto P' passa per uno dei due estremi del diametro DE.

Se al diametro DE si sostituisce una corda FG ad esso parallela e che taglia la circonferenza in due archi disuguali 2ψ e $2(\pi - \psi)$ e si sposta poi questa corda parallelamente a sè stessa, si scorge che l'intervallo nel quale la funzione è positiva diminuisce al diminuire della lunghezza della corda FG, e cioè dell'arco 2ψ, fino al momento in cui la corda diventando tangente al cerchio in O,

l'arco 2ψ trovasi ridotto ad un punto, e la funzione $f_0(2 \operatorname{arc\,tg} x)$ prende il valore π per $x = 0$ quando cioè il punto P'' trovasi in O, ed è zero per ogni altro valore di x, come mostra il diagramma E.

2. Se nel diagramma A si riduce nel rapporto $\frac{\pi}{2} : 1$ il valore delle ordinate e nei diagrammi B, D, E nel rapporto $\pi : 1$ operando poi per il diagramma D il cambiamento di assi $x' = x$, $y' = y + 1/2$ si scorgerà che i diagrammi così modificati forniscono la rappresentazione esatta di cinque funzioni ben note e cioè: il diagramma A rappresenta la funzione $\operatorname{sgn} x$ | (*signum* x) di Kronecker [1] che è zero per $x = 0$, $+1$ per $x > 0$ e -1 per $x < 0$ una delle funzioni maggiormente impiegate nell'analisi essendo essa latente nella notazione $|x|$ poichè è appunto $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

Il diagramma B rappresenta la funzione che in precedenti mie Note ho chiamato « *semi segno* di x » ed indicato con sem segn x ed è zero per $x < 0$, $\frac{1}{2}$ per $x = 0$ ed 1 per $x > 0$. Essa è perciò la funzione che risolve in modo generale il celebre problema di Fourier « Trovare una funzione di x tale che, se x è positiva, il valore della funzione sia $\varphi(x)$, e che, se x è negativa, il valore della funzione sia sempre zero » [2], perchè quale che sia $\varphi(x)$ la soluzione è sempre data da $\varphi(x)$ sem sgn x come ho già indicato in una precedente Nota [3].

Un problema analogo a quello risoluto da Fourier si è presentato a Heaviside che ha indicato « con 1 quella funzione del tempo che è nulla prima di zero ed uguale ad uno dopo » [4], funzione che è stata detta *funzione unità* ed anche spesso « *funzione dei telegrafisti* » e per la quale dal prof. G. Giorgi è stata proposta la notazione $1(x)$ [5].

Il diagramma C rappresenta la funzione che nelle precedenti mie Note ho indicato nel caso generale con $\varphi_0(a, b)$ ossia la funzione che è a per $x < 0$, b per $x > 0$ e, quando sia generata nel modo qui esposto, è $\frac{1}{2}(a + b)$ per $x = 0$. Essa è dunque, prescindendo dal detto punto isolato, quella che dicesi la *funzione del salto* e che aggiunta ad una funzione continua, od applicata ad essa come fattore o esponente, la rende discontinua in un punto.

Il diagramma D rappresenta la funzione che nelle mie precedenti Note ho indicato con Dir x, ossia il *fattore discontinuo di Dirichlet* che è

(1) *Werke*, t. 2, p. 39; v. G. Peano, *Formulario Matematico*. Editio v. p. 94.

(2) *Théorie analytique de la chaleur*, parag. 362.

(3) « R. C. », vol. X, serie VI, fasc. 12. Seduta 1° dicembre 1929.

(4) *Electromagnetic Theory*, vol. II, parag. 241, p. 36, 1ª ed., Londra 1899.

(5) *Sul calcolo delle soluzioni funzionali ecc.* « Atti della A. E. I. », vol. IX, fasc. VI, parag. 36.

1 per $|x| < 1$, $^1/_2$ per $|x| = 1$ e zero per ogni altro valore di x. Il nome è dovuto all'uso fattone da Dirichlet nello studio dell'attrazione degli ellissoidi, ma, come è noto, l'integrale definito che esprime questa funzione era stato già dato da Fourier [1].

Il diagramma E infine rappresenta quella funzione che in un mio precedente scritto [2] ho proposto di chiamare *funzione puntiforme* indicandola col simbolo Punt x e che è 1 per $x = 0$ e zero per ogni altro valore di x. Anche questa funzione si era già presentata ad altri: De Morgan [3] aveva suggerito per essa il simbolo 1_a^a, Doppler [4] $y = {}_a\{\varphi(x)\}^a$ e da Baire è stata addotta come esempio delle funzioni discontinue limiti di funzioni continue [5].

3. Il metodo di generazione geometrica innanzi indicato, al pari del metodo usuale di rappresentazione analitica a mezzo di integrali definiti, presenta la particolarità di fornire dei valori isolati in corrispondenza dei punti di discontinuità delle funzioni, valori espressi da

$$\frac{1}{2}\{F(a_i + 0) + F(a_i - 0)\}.$$

Si ottengono invece delle funzioni con discontinuità senza valori isolati ricorrendo alla rappresentazione analitica sotto forma esponenziale per mezzo della funzione Ix, *intiero* di x, poichè essendo

$$\varphi_0(0, 1, 0) = \text{P unt } x = Ie^{-x^2}$$

dove e indica una quantità > 0 si ha evidentemente

$$(1) \qquad \varphi_{-1,+1}(0, 1, 0)\, Ie^{-Ix^2}$$

$$(2) \qquad \varphi_0(0, 1) = (Ie^x)^{Ie^{-x}}$$

$$(3) \qquad \varphi_0(-1, +1) = (Ie^x)^{Ie^{-x^2}} - (Ie^{-x})^{Ie^x} \pm Ie^{-x^2}$$

(1) *Théorie analytique de la chaleur*, parag. 348.

(2) *Le funzioni puntiformi*, «Boll. dell'U. M. I.», Dicembre 1929.

(3) A. De Morgan, *Differential and integral calculus*. London 1842, p. 616.

(4) C. Doppler, *Versuch einer Erweiterung der analytischen Geometrie auf Grundlage eines neu einzuführenden Algorithmus*. Prag 1843, p. 20. Ho avuto solo da poco conoscenza di questo scritto essendo venuto in possesso dell'esemplare offerto in omaggio dall'A. a Cauchy. Alla diffusione delle interessanti idee in esso esposte ha forse nuociuto l'uso di funzioni arbitrariamente definite delle quali è dato il simbolo ma non l'espressione analitica effettiva, nè la generazione geometrica.

(5) R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, p. 4. Paris 1905.

nell'ultima delle quali espressioni il terzo termine del secondo membro è da prendersi col segno + o col segno — secondo che si vuole che risulti uguale a + 1 o a — 1 il valore della funzione nel punto $x = 0$.

Per distinguere le costanti discontinue con punti isolati da quelle senza punti isolati, e ciò senza ricorrere alla scrittura per esteso delle corrispondenti espressioni analitiche, conserveremo le notazioni innanzi ricordate segn x, sem sgn x, Dir x solo per le funzioni con punti isolati, costituenti una *discontinuità regolare* ed adopereremo le notazioni

$$\operatorname{sgn}_1 x \quad , \quad \operatorname{sem}\operatorname{sgn}_1 x \quad , \quad \operatorname{Dir}_1 x$$

$$\operatorname{sgn}_{-1} x \, , \quad \operatorname{sem}\operatorname{sgn}_0 x \quad , \quad \operatorname{Dir}_0 x$$

per indicare le funzioni che nel punto di discontinuità prendono il valore apposto al simbolo a guisa di indice. Con questa notazione si ha perciò

$$(4) \quad \operatorname{Dir} x = \varphi_{-1,+1}\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}\left\{(1e^{x+1})^{1e^{-(x+1)}} + (1e^{-(x-1)})^{1e^{x-1}}\right\}$$

$$(5) \quad \operatorname{Dir}_0 x = \varphi_{-1,+1}(0\,|\,, 1\,, |\,0) = 1e^{-1x^2}$$

$$(6) \quad \operatorname{Dir}_1 x = \varphi_{-1,+1}(0\,, |\,1\,|\,, 0) = 1\frac{3}{2+x^2}$$

dove il tratto a destra o a sinistra dal valore della funzione in parentesi indica che nel corrispondente punto di discontinuità la funzione prende il valore che essa ha nell'intervallo a sinistra o a destra rispettivamente.

I punti isolati possono anche eliminare formando con le funzioni elementari delle funzioni composte: si ha così ad es.

$$(7) \qquad \operatorname{sgn}_1 x = \varphi_0(-1\,, |\,1) = \operatorname{sgn}(x + \operatorname{Punt} x)$$

$$(8) \qquad \operatorname{Dir}_1 x = \varphi_{-1,+1}(0\,, |\,1\,|\,, 0) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Dir} x)$$

od anche, giovandosi della circostanza che l'ordinata dal punto isolato di sem segn x e Dir x ha il valore $1/2$, esprimendo queste funzioni come limiti di potenze, e si ha così

$$(9) \qquad \operatorname{sem}\operatorname{sgn}_0 x = \varphi_0(0\,|\,, 1) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{sem}\operatorname{sgn} x)^n$$

$$(10) \qquad \operatorname{sem}\operatorname{sgn}_1 x = \varphi_0(0\,, |\,1) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{sem}\operatorname{sgn} x)^{\frac{1}{n}}.$$

Un metodo generale consiste nell'aggiunta di funzioni puntiformi che in corrispondenza delle discontinuità assumono valori assegnati, come ad es. è indicato nella (3).

4. Indicando con $f^{-1}(x)$ la funzione inversa di $f(x)$ si hanno per le forme fondamentali delle costanti discontinue le funzioni inverse seguenti:

$\operatorname{sgn}^{-1} x$, che esiste solo per i tre valori $-1, 0, +1$ di y ai quali corrispondono ordinatamente l'insieme di tutti i valori negativi $x < 0$, il punto $x = 0$, e l'insieme di tutti i valori positivi $x > 0$;

$\operatorname{sem}\operatorname{sgn}^{-1} x$, che esiste solo per i tre valori $0, \frac{1}{2}, 1$ di y ai quali corrispondono ordinatamente l'insieme di tutti i valori negativi $x < 0$, il punto $x = 0$ e l'insieme di tutti i valori positivi $x > 0$;

$\operatorname{Dir}^{-1} x$, che esiste solo per i tre valori $0, \frac{1}{2}, 1$ di y ai quali corrispondono ordinatamente l'insieme di tutti i valori di x tali che $|x| > 1$ e cioè due segmenti infiniti $x < -1$ e $x > 1$, la coppia di punti $|x| = 1$ e l'insieme $|x| < 1$ cioè il segmento finito $-1 < x < 1$.

Qualora nelle funzioni fondamentali manchino i punti isolati le funzioni inverse anzi dette esistono solo per due valori e precisamente $\operatorname{sgn}_{-1}^{-1} x$ e $\operatorname{sgn}_{+1}^{-1} x$ solo per $|x| = 1$, e sem $\operatorname{sgn}_{0}^{-1} x$, sem $\operatorname{sgn}_{1}^{-1} x$, $\operatorname{Dir}_{0}^{-1} x$, $\operatorname{Dir}_{1}^{-1} x$ solo per $x = 0$ e per $x = 1$.

$\operatorname{Punt}^{-1} x$ esiste solo per i due valori $0, 1$ di y ai quali corrispondono ordinatamente l'insieme $x \neq 0$, cioè tutta la retta, l'origine esclusa, ed il punto $x = 0$.

In queste funzioni inverse non vi è dunque corrispondenza univoca fra un valore della variabile ed un valore della funzione, tuttavia l'univocità della corrispondenza esiste nel senso che ad un valore della variabile corrisponde un insieme di valori della funzione costituente uno ed un solo segmento determinato in grandezza e posizione.

Se a e b sono gli estremi del segmento, allora

$$(12) \qquad a + (b - a)\,\mathrm{I}^{-1}\,0$$

rappresenta l'insieme di tutti i valori compresi nel segmento, e si può considerare come un *numero segmentale* di cui a è la parte *puntuale* e $(b - a)\,\mathrm{I}^{-1}\,0$ la parte *segmentale* ottenuta come prodotto di un numero ordinario $(b - a)$ per l'unità segmentale $\mathrm{I}^{-1}\,0$.

I numeri segmentali si presentano naturalmente in molte questioni di geometria, di analisi e di fisica matematica. Nell'ordinamento delle funzioni di P. di Bois Reymond [1] queste funzioni inverse appariscono nella terza categoria formata appunto da quelle che ad un valore della variabile fanno corrispondere tutti i valori di un intiero intervallo, e come reciproche di queste egli indica le funzioni puntiformi.

(1) V. p. 215, Erster Teil, della *Allgemeine Funktionentheorie*. Tübingen 1882.

Matematica. — *Sulla derivata destra di una funzione continua verso destra e derivabile verso destra.* Nota di T. Viola, presentata[1] dal Corrisp. G. Vitali.

1. Sia Q un aggregato perfetto contenuto in un intervallo $a \mid\!-\!\mid b$ ed ovunque non denso in $a \mid\!-\!\mid b$. Siano $\sigma_i \equiv \alpha_i \mid\!-\!\mid \beta_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ gl'intervalli contigui a Q. È possibile, seguendo una regola assai nota del Cantor (vedi, per es., Denjoy: *Sur les nombres dérivés des Fonctions continues*, in « Journal de Mathématiques », 1915, p. 112) stabilire una corrispondenza univoca ed ordinata fra l'aggregato Q e i punti dell'intervallo $0 \mid\!-\!\mid 1$. Si considerano all'uopo i numeri

$$(1) \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{K}{2^m}, \cdots$$

(K intero dispari $< 2^m$) e si stabilisce la numerazione degl'intervalli σ_i in modo tale che due qualunque di essi siano rispettivamente disposti sulla retta come i punti $\frac{K}{2^m}$ che occupano rispettivamente gli stessi posti nella numerazione (1). Agli estremi α_i, β_i di ogni σ_i si fa corrispondere un unico punto in $0 \mid\!-\!\mid 1$ e precisamente il punto $\frac{K}{2^m}$ che occupa il posto i nella (1). A ogni punto di Q che sia limite bilateralmente di segmenti σ_i si fa corrispondere l'unico e ben determinato punto in $0 \mid\!-\!\mid 1$ che è limite dei punti $\frac{K}{2^m}$ che occupano rispettivamente i posti i nella (1).

Siano ora x un generico punto di Q ed $\bar{x}$ il punto di $0 \mid\!-\!\mid 1$ che gli corrisponde. Il punto $\xi_h = \bar{x} + \frac{1}{2^h}$ appartiene certo a $0 \mid\!-\!\mid 1$ per h sufficientemente grande. Se x è punto limite bilateralmente di Q, nè $\bar{x}$ nè $\bar{\xi}_h$ sono punti $\frac{K}{2^m}$. Dunque $\bar{\xi}_h$ è il corrispondente di un punto ben determinato $\xi_h(x)$, anch'esso limite bilateralmente di Q. Se invece x è punto limite unilaterale di Q, $\bar{x}$ e $\bar{\xi}_h$ sono entrambi punti $\frac{K}{2^m}$. Esistono allora due punti di Q che hanno per corrispondente ξ_h: secondochè x è estremo sinistro o destro di un intervallo contiguo a Q indico con $\xi_h(x)$ quello dei due punti di Q corrispondente a ξ_h che gode della stessa proprietà.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

Resta così completamente definita una funzione $\xi_h(x)$ su Q, biunivoca, crescente e continua rispetto a Q[1]. Che sia biunivoca e crescente è evidente; che sia continua risulta dal fatto che se x_0 è un punto di Q limite verso la sua sinistra (destra) di punti di Q, anche $\xi_h(x_0)$ è un punto di Q che gode della stessa proprietà ed anzi tutti i punti x di Q che stanno in un intorno sinistro (destro) di x_0 sono tali che i punti $\xi_h(x)$ stanno tutti in un intorno (« intorno corrispondente ») sinistro (destro) di $\xi_h(x_0)$.

Inoltre, per ogni x di Q che sia limite verso la sua destra di punti di Q è $\lim_{h\to\infty} \xi_h(x) = x$, mentre per i punti di Q che sono limiti soltanto verso la loro sinistra, cioè per i punti α_i, è $\lim_{h\to\infty} \xi_h(\alpha_i) = \beta_i$.

2. *Lemma.* - Sia $F(x)$ una funzione reale, definita in un intervallo $a|\!-\!|b$, continua verso destra in tutto $a|\!-\!|b$. Sia C un aggregato chiuso contenuto in $a|\!-\!|b$, sul quale e rispetto al quale $F(x)$ è continua. Nell'interno di ogni intervallo contiguo a C sia $F(x)$ continua. Allora la funzione $D_+F(x)$ è di prima classe in tutto $a|\!-\!|b$, cioè limite di una successione di funzioni continue.

Dim. - Nell'interno di ogni intervallo contiguo a C la $F(x)$ è per ipotesi continua bilateralmente. Allora $D_+F(x)$ è limite di rapporti incrementali ciascuno dei quali è continuo e perciò $D_+F(x)$ è, in ciascuno di quegl'intervalli, senz'altro di prima classe. Se M è un punto isolato di C, essendo $D_+F(x)$ di prima classe in due intervalli contigui aventi l'estremo M in comune, essa è di prima classe anche in un intervallo contenente nel suo interno il punto M. Per derivazioni successive dall'aggregato C si giunge alla componente perfetta P di C: in ogni intervallo contiguo a P la funzione $D_+F(x)$ è di prima classe.

Dico che $D_+F(x)$ è di prima classe su P. Se P è denso in qualche parte di $a|\!-\!|b$, in quella parte P è costituito da un intero segmento di $a|\!-\!|b$ e su quel segmento $D_+F(x)$ è di prima classe per la ragione detta sopra. Supponiamo dunque senz'altro che P sia ovunque non denso in $a|\!-\!|b$.

Siano $S_i \equiv \lambda_i|\!-\!|\mu_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots ; \mu_i - \lambda_i = \delta_i)$ gl'intervalli contigui a C. Per ciascuno di essi scelgo un punto ν_i tale che $\lambda_i < \nu_i < \mu_i$ e che l'oscillazione di $F(x)$ nell'intervallo chiuso $\lambda_i - \nu_i$ sia $< \delta_i$: cosa certamente possibile e seguendo una legge ben determinata, data la continuità verso destra della $F(x)$ in λ_i. Per ogni i indico con I_i un aggre-

(1) Per l'esattezza è bene rilevare che la $\xi_h(x)$ è definita soltanto su una parte grande quanto si vuole di Q. Assegnato ε arbitrariamente piccolo si può prendere h sufficientemente grande affinchè $\xi_h(x)$ sia definita su tutta la parte di Q in $a|\!-\!|b-\varepsilon$, ammesso che b appartenga a Q. Questa osservazione che non ha carattere essenziale si supporrà tacitamente nel seguito.

gato perfetto interamente contenuto in $\lambda_i]-[\nu_i$, ovunque non denso in $\lambda_i]-[\nu_i$. Anche λ_i, ν_i facciano parte di I_i: per fissare le idee I_i può essere l'aggregato contenuto in $\lambda_i]-[\nu_i$ simile al noto aggregato perfetto di Cantor il quale è contenuto in $0]-[1$. Indico con I l'aggregato costituito dalla riunione (somma) di tutti gli I_i, con Q l'aggregato costituito dalla riunione di C e di I:

$$I = \sum I_i \quad , \quad Q = C + I .$$

Evidentemente Q è perfetto ed ovunque non denso in $a]-[b$. Dico che $F(x)$ è continua in Q rispetto a Q. Infatti se x_0 è un generico punto di Q, due casi possono presentarsi:

1° x_0 non appartiene a C. Allora x_0 appartiene ad I e quindi è punto limite di soli punti di I (e cioè non di punti di C) e in x_0 è $F(x)$ continua in senso assoluto, quindi anche rispetto ad I e quindi anche rispetto a Q.

2° x_0 appartiene a C. Allora in x_0 è $F(x)$ continua rispetto a C. Sia dunque δ un numero positivo tale che per tutti i punti x appartenenti a C e tali che $|x - x_0| < \delta$ è $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Se x' è un punto di I, appartenente a un intervallo $\lambda_i]-[\mu_i$, tale che $|\lambda_i - x_0| < \delta$ e $|\mu_i - x_0| < \delta$, è $|F(x') - F(x_0)| \leq |F(x') - F(\lambda_i)| + |F(\lambda_i) - F(x_0)| < \delta_i + \varepsilon < \delta + \varepsilon < \eta$ arbitrariamente prefissato, tostochè si sceglie $\varepsilon < \eta$, $\delta < \eta - \varepsilon$. Ciò prova appunto la continuità di $F(x)$ rispetto a Q anche nei punti di C.

Q si trova nelle condizioni volute dal n. 1 ed è possibile quindi definire su Q le funzioni $\xi_h(x)$. I rapporti incrementali

$$r_h(x) = \frac{F(\xi_h(x)) - F(x)}{\xi_h(x) - x}$$

sono funzioni continue su Q rispetto a Q. Inoltre, per ogni punto x di Q esiste ed è ben determinata la funzione $\varphi(x) = \lim_{h \to \infty} r_h(x)$ uguale precisamente alla $D_+ F(x)$ in tutti i punti x di Q che sono limiti verso la loro destra di punti di Q.

La funzione $\varphi(x)$ è dunque di 1ª classe su tutto l'aggregato Q. Essa è allora di 1ª classe su ogni aggregato perfetto contenuto in Q e quindi, in particolare, anche sull'aggregato P. D'alta parte i punti di P sono punti di C e come tali sono tutti limiti verso la loro destra di punti di Q. Dunque in P è $\varphi(x) = D_+ F(x)$ e perciò $D_+ F(x)$ è di 1ª classe in tutto P.

Per dimostrare ora il lemma enunciato basta dimostrare che la $D_+ F(x)$ è punteggiata discontinua su ogni aggregato perfetto contenuto in $a]-[b$. All'uopo sia M un qualunque aggregato perfetto contenuto in $a]-[b$. Sia $m]-[n$ un intervallo parziale di $a]-[b$, contenente una parte $\overline{M}$ di M. Se $\overline{M}$ è interamente contenuta nella parte di P contenuta

in $m \mid\!\!-\!\!\mid n$, allora $D_+ F(x)$ è punteggiata discontinua su $\bar{M}$ perchè è di 1ª classe su P. In caso contrario esisterà un intervallo $r \mid\!\!-\!\!\mid s$ parziale di $m \mid\!\!-\!\!\mid n$, contenente una parte $\bar{M}'$ di $\bar{M}$ ma nessun punto di P. Su $\bar{M}'$ è $D_+ F(x)$ punteggiata discontinua perchè $D_+ F(x)$ è di 1ª classe nell'intero segmento $r \mid\!\!-\!\!\mid s$.

Dunque, per l'arbitrarietà della scelta di $m \mid\!\!-\!\!\mid n$ è $D_+ F(x)$ punteggiata discontinua su tutto M e il lemma è completamente dimostrato.

Di questo lemma farò uso in una prossima Nota.

Matematica. — *Sur une équation aux dérivées partielles, caractérisant les moyennes de M. Picone.* Nota di MIRON NICOLESCO, presentata [1] dal Socio V. VOLTERRA.

1. Soient $w(x, y, z)$ une fonction de trois variables réelles et

$$F(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier l'équation suivante aux dérivées partielles

$$F(w) + \frac{2n+1}{z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

où n est un entier positif. Voici, d'ailleurs, l'origine de cette équation:

Dans une Note publiée dans ce même Recueil [2], M. Fr. Sbrana trouve que les *moyennes de M. Picone*

$$M_n(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta) \cdot e^{in\theta}\, d\theta,$$

vérifient, quel que soit u, la relation suivante

$$\Delta\left(\int_0^R \rho^{n+1} \cdot M_n(x, y, \rho)\, d\rho \right) = R^{n+1} \cdot \frac{\partial M_n(x, y, R)}{\partial R} - nR^n M_n(x, y, R),$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(1) Nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) F. SBRANA, *Teoremi di media per le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali*, «Rendiconti dei Lincei», vol. VI, serie 6ª, 1927, pp. 92–96.

Or, si l'on introduit la nouvelle fonction

$$w(x, y, R) = \int_0^R \rho^{n+1} \cdot M_n(x, y, \rho)\, d\rho,$$

d'où

$$M_n(x, y, R) = \frac{1}{R^{n+1}} \cdot \frac{\partial w}{\partial R},$$

la relation précédente devient

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} - \frac{2n+1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial R}.$$

C'est précisément l'équation (1), où l'on a écrit R à la place de z.

2. La question que nous voulons résondre est la suivante: *Trouver l'intégrale de* (1), *se réduisant pour* $z = 0$ *à une fonction donnée* $\alpha(x, y)$.

La nature même de la question nous conduit à chercher l'intégrale sous la forme suivante

$$w(x, y, z) = \alpha(x, y) + \sum_{p=1}^{\infty} a_p(x, y) \cdot z^p. \tag{2}$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (1), un simple calcul d'identification donnera

$$\begin{cases} a_1 \equiv 0 \quad , \\ \Delta a_p = (p+2)(p-2n) \cdot a_{p+2} \quad , \quad (p = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{3}$$

Il en résulte immédiatement que l'on a

$$a_{2p+1} \equiv 0,$$

quel que soit p, donc *l'intégrale cherchée est une fonction paire de* z.

Si l'on remplace alors, dans (3), p par $2p$, on obtiendra la relation suivante de récurrence

$$\Delta a_{2p} = 4(p+1)(p-n)\, a_{2p+2}. \tag{4}$$

Ceci donne, successivement,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\alpha = -4n \cdot a_2 & \Delta a_{2n+2} = 4(n+2)\, a_{2n+4} \\ \Delta a_2 = -4 \cdot 2(n-1)\, a_4 & \Delta a_{2n+4} = 4(n+3) \cdot 2\, a_{2n+6} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta a_{2n-2} = -4n\, a_{2n} & \Delta a_{2n+2k} = 4(n+k+1) \cdot k\, a_{2n+2k+2} \\ \Delta a_{2n} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right. \tag{5}$$

Posons

$$\Delta^p = \Delta(\Delta^{p-1}) \quad , \qquad \Delta^1 = \Delta .$$

Alors, le premier groupe des relations (5) donne

$$\Delta^{n+1}\alpha = 0 .$$

Donc: *Le problème posé n'est possible que si* $\alpha(x, y)$ *est une fonction harmonique d'ordre* $n + 1$ *au plus.*

Supposons cette condition remplie. Alors, le second groupe des relations (5) montre que l'intégrale demandée dépend de la fonction arbitraire

$$a_{2n+2}(x, y) = \beta(x, y) .$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$(6) \quad P_n(x, y, z) = \alpha - \frac{1}{n}\left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot \Delta\alpha + \frac{1}{2!(n-1)\,n}\left(\frac{z}{2}\right)^4 \cdot \Delta^2\alpha - \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \cdot \Delta^n\alpha ,$$

et

$$(7) \qquad \mu_n(x, y, z) = (n+1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2n+2k+2}}{k!\,(n+k+1)!\,2^{2k}} \cdot \Delta^k \cdot \beta ,$$

l'intégrale demandée est

$$(8) \qquad w(x, y, z) = P_n(x, y, z) + \mu_n(x, y, z) .$$

Il faudrait encore, pour être complet, étudier la convergence de la série (7), mais nous allons voir tout-à-l'heure que cette étude est inutile.

Notre intégrale (8) se compose de deux parties essentiellement distinctes. La première, c'est un polynome de degré $2n$ en z, fonction harmonique d'ordre $(n + 1)$ en (x, y). La seconde a aussi une signification remarcable, comme nous allons avoir.

3. Nous rappellerons, à cet effet, la formule suivante

$$(9) \qquad M_n(x, y, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+2k}}{k!\,(n+k)!\,2^{n+2k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} \cdot \Delta^k u ,$$

que nous avons donnée pour généraliser certains résultats de M. Picone [1].

On en déduit immédiatement (en posant $R = |z|$),

$$(10) \quad 2\int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho)\, d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2n+2k+2}}{k!\,(n+k+1)!\,2^{n+2k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} \cdot \Delta^k u .$$

(1) Miron Nicolesco, *Théorèmes de moyenne pour les fonctions de deux variables réelles*, «Rendiconti dei Lincei», vol. XI, serie 6ª, 1930, pp. 960-964.

Sous cette forme, on constate que l'on peut identifier ce développement avec le développement (7) de $\mu_n(x, y, z)$. Pour que ceci soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} u = (n+1)!\, 2^n \cdot \beta(x, y).$$

On pourra alors écrire, à la suite de cette identification, et en tenant compte de la signification de $M_n(x, y, \rho)$,

$$(11) \qquad \mu_n(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint_{C_R(x,y)} u(x', y') \cdot (\zeta' - \zeta)^n \, dx' \, dy'$$

où

$$\zeta = x + iy \qquad , \qquad \zeta' = x' + iy',$$

et $C_R(x, y)$ est le cercle de rayon R et de centre (x, y).

Nous pouvons résumer tout ceci sous la forme suivante :

Théorème I. — *L'intégrale de l'équation suivante aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{2n+1}{z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z},$$

qui se réduit, pour $z = 0$, à une fonction $\alpha(x, y)$, harmonique d'ordre $(n+1)$ au plus, peut se mettre sous la forme suivante

$$w(x, y, z) = P_n(x, y, z) + \frac{1}{\pi} \iint_{C_R(x,y)} u(x', y') \cdot (\zeta' - \zeta)^n \, dx' \, dy',$$

$u(x, y)$ étant une intégrale de l'équation

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n u(x, y) = (n+1)!\, 2^n \beta(x, y),$$

où $\beta(x, y)$ est une fonction arbitraire.

En particulier, *l'intégrale de (1) s'annulant pour $z = 0$ est*

$$w(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint_{C_R(x,y)} u(x', y) \cdot (\zeta' - \zeta)^n \, dx' \, dy',$$

où $u(x, y)$ est toujours une intégrale de (12).

Ceci résulte de ce que, pour $\alpha(x, y) = 0$, on a aussi

$$P_n(x, y, z) = 0.$$

Cette dernière partie du théorème réalise *l'inversion* du résultat cité plus haut de M. Fr. Sbrana. On peut aussi dire que l'équation (1) caractérise les moyennes de M. Picone.

Un cas particulier important est obtenu pour $n = 0$. Alors l'équation (1) devient

$$F(w) + \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

et le théorème précédent peut s'énoncer :

THÉORÈME II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que, une fonction $w(x, y, z)$, puisse être une moyenne circulaire superficielle, c'est-à-dire, pour qu'elle puisse se mettre sous la forme*

$$w(x, y, z) = \iint_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' \qquad (R = |z|)$$

est que cette fonction soit une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{13}$$

s'annulant pour $z = 0$.

On peut aussi dire : *L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles* (13) *est*

$$w(x, y, z) = \iint_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' \qquad (R = |z|)$$

où u est une fonction arbitraire.

4. Le dernier énoncé est plus utile que le précédent. Il nous permettra d'examiner quelques cas particuliers. Ainsi, cherchons, en premier lieu, les intégrales de (13), fonctions de z seul. L'équation (13) se réduit à

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} = 0. \tag{14}$$

L'intégrale de cette équation, s'annulant pour $z = 0$, est

$$w = kz^2 \qquad (k = \text{const}).$$

Par conséquent

$$kz^2 = \iint_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy'.$$

On en déduit, par dérivation,

$$2k = \int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta, y + R\sin\theta)\, d\theta .$$

Cette relation doit avoir lieu pour toute valeur de R. En particulier, pour $R = 0$, on obtient

$$u(x, y) = \frac{k}{\pi} = \text{const.}$$

Donc :

Théorème III. – *Soit*

$$w(x, y, R) = \iint_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' . \tag{15}$$

Si $w(x, y, R)$ *ne dépend que de* R, $u(x, y)$ *est une constante.*

Ce théorème, qui se trouve démontré ici pour la première fois, fut attribué par moi, lors d'un récent travail [1], à M. Pompéiu. En réalité, il diffère essentiellement du résultat de M. Pompéiu, en ce sens que l'un n'est pas conséquence de l'autre [2]. Je me permettrai néanmoins d'appeler toujours ce théorème, *le théorème de M. Pompéiu.*

5. Comme seconde application, cherchons les solutions de (13) qui sont harmoniques par rapport aux variables x et y. On obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

avec la solution

$$w = h(x, y)\, z^2 ,$$

où $h(x, y)$ est une fonction harmonique. Nous aurons donc

$$h(x, y)\cdot z^2 = \iint_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' ,$$

d'où, en dérivant par rapport à R et en faisant tendre R vers zéro,

$$u(x, y) = \frac{h(x, y)}{\pi} .$$

(1) Miron Nicolesco, *Sur un théorème de M. Pompéiu*, « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique », Classe des Sciences, 5e série, t. XVI, 1930, pp. 817-822.

(2) Le théorème de M. Pompéiu est le suivant : « Si, *pour une certaine valeur fixe de* R, $w(x, y, R)$ ne dépend pas de (x, y), la fonction $u(x, y)$ est constante ». Voir : D. Pompéiu : *Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réelles*, « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique », Classe des Sciences, 5e série, t. XV, 1929, pp. 265-269.

Donc:

THÉORÈME IV. – *Soit*

$$w(x, y, R) = \iint_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' .$$

Si, quel que soit R, $w(x, y, R)$ *est une fonction harmonique,* $u(x, y)$ *sera aussi une fonction harmonique.*

C'est un cas particulier d'un résultat qui paraîtra ailleurs [1].

Matematica. — *Trasporti rigidi e relatività.* Nota di PIA NALLI, presentata [2] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La nuova teoria unitaria della relatività si fonda sulla nozione di *parallelismo assoluto* [3].

Esso coincide con quello che in altri miei lavori [4] ho chiamato *trasporto rigido a risultato unico,* perchè indipendente dalla linea lungo la quale viene effettuato [5].

Io l'ho considerato come caso particolare di un trasporto rigido caratterizzato da un tensore $\Gamma_{ij,h}$, emisimmetrico rispetto alla coppia (i, j).

In precedenza lo avevo considerato come caso particolare di una classe più ristretta di trasporti: quelli caratterizzati da una m–pla rigida di vettori [6]. Si ha il parallelismo assoluto quando $m + 1$ è la dimensione della varietà.

Einstein caratterizza un parallelismo assoluto per mezzo di un tensore Λ^h_{ij}, emisimmetrico rispetto alla coppia (i, j), mentre io lo caratterizzo per mezzo di un tensore $\Gamma_{ij,h}$. Il legame fra i due è espresso dalla relazione

$$\Lambda^h_{ij} = \Gamma_{\underline{h}\,i,j} - \Gamma_{\underline{h}\,j,i} . \qquad (1)$$

(1) Voir ma Note: *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants* », à paraître incessamment dans « L'Enseignement Mathématique ».

(2) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(3) A. EINSTEIN, *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie,* « Mathematische Annalen », Bd. 102, pp. 685-697.

(4) *Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann. Trasporti rigidi di vettori sulle superficie.* (In corso di pubblicazione in questi « Rendiconti »).

(5) Per quanto riguarda quistioni di priorità relativamente alla nozione di parallelismo assoluto, cfr.: E. CARTAN, *Notice historique sur la notion de parallélisme absolu,* « Mathematische Annalen », Bd. 102, pp. 698-706.

(6) *Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate.* Questi « Rendiconti », vol. X, serie 6ª, pp. 565-569. *Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann,* id. vol. XI, serie 6ª, pp. 265-268.

(Qui mi servo della notazione di Einstein: quando si sottolinea un indice in un tensore ciò sta a significare che detto indice passa da covarianza a controvarianza o viceversa, componendo col tensore fondamentale).

La derivazione covariante da me definita nei casi generali sopracitati, nel caso particolare del parallelismo assoluto coincide con quella di Einstein, che egli rappresenta col simbolo $A^{(j)}_{(i);h}$ quando viene applicata ad un tensore $A^{(j)}_{(i)}$.

Ciò dipende dal fatto che le quantità Δ^h_{ij} non sono altro che

$$\begin{Bmatrix} i & j \\ h & \end{Bmatrix} + \Gamma_{h\,i,j}\,.$$

Del resto detta derivazione covariante generalizzata si riconduce alla ordinaria, perchè, secondo la definizione da me data, si ha

$$(2)\quad A^{(j)}_{(i),h} = A_{i/h} + \sum_1^q{}_r \sum_1^n{}_k \Gamma_{j_r,k,h}\, A^{j_1 \cdots j_{r-1}\, k\, j_{r+1} \cdots j_q}_{(i)} - \sum_1^p{}_r \sum_1^n{}_k \Gamma_{k\,i_r,h}\, A^{(j)}_{i_1 \cdots i_{r-1}\, k\, i_{r+1} \cdots i_p}.$$

D'altra parte, come ho mostrato, $\Gamma_{ij,h}$ si esprime facilmente per mezzo di $n-1$ vettori unitarî a due a due ortogonali che caratterizzano il trasporto, e nella espressione figurano solo componenti di tali vettori e dei loro derivati covarianti ordinarî.

Così, per $n = 3$, se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono tali vettori, si ha:

$$\Gamma_{ij,h} = v_i\, v_{j/h} - v_j v_{i/h} + w_i w_{j/h} - w_j w_{i/h} + (w_i\, v_j - w_j\, v_i) \sum_1^3{}_k\, w_k\, v_{k/h}\,.$$

Per queste ragioni le equazioni caratteristiche della nuova teoria unitaria della relatività si possono scrivere facendo figurare solo derivazioni covarianti ordinarie. Appunto di ciò ci occuperemo e mostreremo come anche nella nuova teoria è essenziale la considerazione del tensore

$$(3)\qquad R_{ph} = \sum_1^n{}_i \{pi\,,\, hi\}\,.$$

Cominciamo con l'osservare che un tensore $\Gamma_{ij,h}$ qualunque (purchè emisimmetrico rispetto ad $i\,,j$) caratterizza un trasporto rigido: condizione necessaria e sufficiente perchè esso sia un parallelismo assoluto è che siano soddisfatte le eguaglianze:

$$(4)\qquad \Gamma_{\underline{ip},k/h} - \Gamma_{\underline{ip},h/k} + \sum_1^n{}_q [\Gamma_{\underline{qp},k}\, \Gamma_{\underline{iq},h} - \Gamma_{\underline{qp},h}\, \Gamma_{\underline{iq},k}] = \{pi\,,\, hk\}$$

che, per la (2), si possono anche scrivere

$$(5)\quad \Gamma_{\underline{ip},k;h} - \Gamma_{\underline{ip},h;k} - \sum_1^n{}_q [\Gamma_{\underline{qp},k}\, \Gamma_{\underline{iq},h} - \Gamma_{\underline{qp},h}\, \Gamma_{\underline{iq},k}] - \sum_1^n{}_q \Gamma_{\underline{ip},q} [\Gamma_{\underline{qh},k} - \Gamma_{\underline{qk},h}] = \{pi\,,\, hk\}\,.$$

Posto, con Einstein,

$$\varphi_i = \sum_1^n{}_j \Lambda^j_{ij} ,$$

e cioè, per la (1),

$$\varphi_i = \sum_1^n{}_j \Gamma_{\underline{j}i,j} ,$$

dalla (5)', saturando i due indici i e k, per la posizione (3), otteniamo:

$$R_{ph} = \varphi_{p\,;\,h} - \sum_1^n{}_i \Gamma_{\underline{i}p,h\,;\,i} + \sum_1^n{}_q \varphi_q \Gamma_{\underline{q}p,h} - \sum_{qi} \Gamma_{\underline{i}p,q} \Gamma_{\underline{q}h,i} ,$$

ossia, per la (2),

$$R_{ph} = \varphi_{p|h} - \sum_1^n{}_i \Gamma_{\underline{i}p,h\,;\,i} - \sum_{qi} \Gamma_{\underline{i}p,q} \Gamma_{\underline{q}h,i} . \tag{6}$$

(Da questa, data la simmetria del primo membro e dell'ultima parte del secondo, si ricava ciò che Einstein ha ottenuto per altra via, e cioè, posto

$$F_{ph} = \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_h} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_p} = \varphi_{p|h} - \varphi_{h|p} ,$$

$$F_{ph} = \sum_1^n{}_i [\Gamma_{\underline{i}p,h\,;\,i} - \Gamma_{\underline{i}h,p\,;\,i}] = \sum_1^n{}_i \Lambda^i_{p\,h\,;\,i}) .$$

Oltre al tensore F_{ph}, Einstein ne prende in considerazione un altro: G_{hp}, definito dalla posizione

$$G_{hp} = \sum_1^n{}_i \Lambda^{\underline{p}}_{\underline{h}i\,;\,i} - \sum_1^n{}_{qi} \Lambda^q_{\underline{h}i} \Lambda^p_{qi} .$$

Fra i i due tensori F_{hp} e G_{hp} passano le seguenti relazioni:

$$\sum_1^n{}_h G_{\underline{p}h\,;\,h} - \sum_1^n{}_h F_{\underline{p}h\,;\,h} + \sum_1^n{}_{iq} \Lambda^i_{\underline{p}q} F_{iq} = 0 . \tag{7}$$

Ora il tensore G_{hp} è legato al tensore simmetrico R_{ph} da una relazione che ora dimostreremo.

Essendo

$$\sum_1^n{}_i \Lambda^{\underline{p}}_{\underline{h}i\,;\,i} = \sum_1^n{}_i \Gamma_{ph,\underline{i}\,;\,i} - \sum_1^n{}_i \Gamma_{p\underline{i},h\,;\,i}$$

sarà, per la (6),

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \Gamma_{ph,\underline{i}\,i} - R_{ik} + \varphi_{i|k} - \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{i\underline{p},q} \Gamma_{\underline{q}h,i} - \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Lambda^{\underline{i}}_{\underline{q}\,i} \Lambda^{\underline{p}}_{\underline{q}\,i}.$$

Trasformiamo questa. Essendo, per la (2),

$$\Gamma_{ph,\underline{i}\,r} = \Gamma_{ph,i\,|\,r} + \sum_{1}^{n}{}_{q} \Gamma_{ph,\underline{q}} \Gamma_{iq,r} - \sum_{1}^{n}{}_{q} \Gamma_{qh,\underline{i}} \Gamma_{\underline{q}p,r} - \sum_{q} \Gamma_{pq,\underline{i}} \Gamma_{\underline{q}h,r},$$

sarà

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \Gamma_{ph,\underline{i}\,;i} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \Gamma_{ph,i\,|\,i} + \sum_{1}^{n}{}_{q} \varphi_{\overline{q}} \Gamma_{ph,q}.$$

Si trova poi facilmente

$$\sum_{1}^{n}{}_{qi} \Lambda^{q}_{hi} \Lambda^{p}_{\underline{i}\,i} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \Gamma_{\underline{i}h,\underline{i}} \Gamma_{i\underline{p},i} + \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{i}h,\underline{q}} \Gamma_{\underline{i}\underline{p},q} - 2 \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{i}h,\underline{q}} \Gamma_{\underline{i}\underline{q},p}$$

e per conseguenza

$$(7') \qquad G_{hp} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \Gamma_{ph,\underline{i}\,|\,i} + \sum_{1}^{n}{}_{q} \varphi_{\overline{q}} \Gamma_{ph,q} - R_{ph} + \varphi_{i|h} + \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{q}h,\underline{i}} \Gamma_{\underline{q}p,i}$$

$$- 2 \sum_{1}^{n}{}_{qi} [\Gamma_{\underline{i}\underline{p},q} \Gamma_{\underline{q}h,i} - \Gamma_{\underline{i}h,q} \Gamma_{\underline{i}p,q}].$$

Da questa ricaviamo che G_{hp} è la somma di $-R_{ph}$ e di due tensori: Q_{ik}, V_{ik}, il primo simmetrico ed il secondo emisimmetrico, e precisamente

$$Q_{hp} = \frac{1}{2}(\varphi_{p|h} + \varphi_{h|p}) + \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{q}h,\underline{i}} \Gamma_{\underline{q}p,i} - 2 \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{i}p,q} \Gamma_{\underline{q}h,i}$$

$$- \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{q}\underline{i},h} \Gamma_{\underline{i}\underline{q},p} - \sum_{1}^{n}{}_{qi} \Gamma_{\underline{q}\underline{i},p} \Gamma_{\underline{i}\underline{q},h},$$

$$V_{hp} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \Gamma_{ph,\underline{i}\,|\,i} + \sum_{1}^{n}{}_{q} \varphi_{\overline{q}} \Gamma_{ph,\underline{q}} + \frac{1}{2}(\varphi_{p|h} - \varphi_{h|p})$$

$$- \sum_{1}^{n}{}_{qi} [\Gamma_{\underline{q}\underline{i},h} \Gamma_{\underline{i}\underline{p},q} - \Gamma_{\underline{q}\underline{i},p} \Gamma_{\underline{i}\underline{p},q}]^{(1)}.$$

(1) Per una superficie, $F_{ph} = 2 V_{ph}$ ed i parallelismi assoluti per i quali $F_{ph} = 0$ sono i trasformati del parallelismo euclideo nelle rappresentazioni conformi della superficie sul piano.

Ora le equazioni della nuova teoria unitaria della relatività sono le seguenti:

$$F_{ph} = 0 \quad , \quad G_{ph} = 0 ,$$

quindi le seguenti:

$$F_{ph} = 0 \quad , \quad V_{ph} = 0 \quad , \quad Q_{ph} = R_{ph} .$$

Ma allora si può dire che tanto le equazioni della nuova teoria che quelle della relatività generale sono

$$R_{ph} = Q_{ph} \tag{8}$$

imponendo al tensore $\Gamma_{ij,h}$ delle opportune condizioni che caratterizzano le due relatività. Nella relatività generale le condizioni sono $\Gamma_{ij,h} = 0$, nella nuova teoria sono le (4) e le

$$F_{ph} = 0 \quad , \quad V_{qh} = 0 \text{ (1)}. \tag{9}$$

Prima interveniva un trasporto rigido non assoluto: il parallelismo di Levi-Civita; ora interviene un trasporto assoluto soddisfacente alle (9). Non è escluso che la (8), con opportune condizioni per il tensore $\Gamma_{ij,h}$, possa servire di base alle altre teorie relativistiche.

Chiudiamo con due oservazioni.

Quando nelle (7) si ponga al posto di G_{hp} il secondo membro della (7') si hanno n condizioni a cui soddisfa R_{ph}, qualunque sia il parallelismo assoluto caratterizzato da $\Gamma_{ij,h}$. Si ridurranno esse al noto fatto che è nulla la divergenza del tensore

$$R_{ph} - \frac{1}{2} R a_{ph} ?$$

Altra osservazione. Se $\Gamma_{ij,h}$ è un tensore che caratterizza un parallelismo assoluto, si può, per la (4), ottenere per mezzo di esso $\{pi, hk\}$. Esso è indipendente dal particolare parallelismo fissato.

Un altro tensore possiamo ottenere nel seguente modo. Si ponga

$$N_{ipkh} = \Gamma_{ip,kh} + \frac{1}{2} \sum_q [\Gamma_{qp,k} \Gamma_{iq,h} - \Gamma_{qp,h} \Gamma_{iq,k}]$$

e

$$T_{ik,hp} = N_{ipkh} + N_{kpih} + N_{ihkp} + N_{khip} .$$

Esso è simmetrico rispetto ad i e k e rispettto ad h e p, scambiando le due coppie (ik) ed (hp) si ha

$$T_{hp,ik} + T_{ik,hp} = 2 [(pi, hk) + (pk, hi)] .$$

(1) Si potrebbe anche dire che le equazioni della relatività generale sono $F_{ph} = 0$ $G_{ph} = Q_{ph} + V_{ph}$.

Nelle varietà euclidee è emisimmetrico rispetto alle coppie (ik) ed (hp). Si ha

$$\sum_{i}^{n} T_{hp,ii} = 2 R_{ph} .$$

Posto

$$S_{hi} = \sum_{k}^{n} T_{hk,ik}$$

è

$$S_{hi} + S_{ih} = -2R_{hi} ,$$

ma il tensore emisimmetrico $S_{hi} - S_{ih}$ dipende dal parallelismo.

Con $T_{ik,hp}$ e $\Gamma_{ij,h}$, per saturazione di due indici si possono formare vettori.

Può darsi che si ottengano così elementi fondamentali per un parallelismo assoluto.

Matematica (Sviluppi in serie). — *Sulla convergenza parziale degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. Estensione del teorema di Kolmogoroff sugli sviluppi in serie di Fourier.* Nota di G. Sansone, presentata [1] dal Corrisp. L. Tonelli.

1. Il signor Kolmogoroff dimostrò il seguente teorema: *Se la funzione $f(x)$ è integrabile insieme al suo quadrato in $(0,2\pi)$; se $s_n(x)$ è la somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$; se n_m $(m = 1, 2, \cdots)$ è una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione*

$$n_{m+1}/n_m > \lambda > 1 ;$$

allora la successione $s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots, s_{n_m}, \cdots$ converge in quasi tutto $(0,2\pi)$ verso la $f(x)$ [2].

Per il ragionamento del signor Kolmogoroff giova essenzialmente il teorema di Lebesgue che la somma $(C, 1)$ della serie di Fourier di una funzione $f(x)$ sommabile in $(0,2\pi)$ converge verso di essa in quasi tutto $(0,2\pi)$ [3]; noi qui vogliamo far vedere che il teorema può estendersi agli sviluppi in serie di funzioni ortogonali supponendo per tali serie la sommabilità (C, r) con $r \geq 0$ e ne faremo applicazione agli sviluppi in serie di funzioni di Laplace e in serie di polinomi di Legendre.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) Cfr. A. Kolmogoroff, *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier*, «Fund. Mathematicae», t. V, 1924, pp. 96-97. Cfr. anche L. Tonelli, *Serie trigonometriche*, Bologna, 1928, pp. 304-307.

(3) Cfr. ad es. L. Tonelli, op. cit., p. 175.

2. *Teorema di Kolmogoroff generalizzato. Sia* $\{f_n(P)\}$ *un sistema di funzioni normalizzate e ortogonali in un dominio* Δ,

$$(1)\qquad \int_\Delta f_n^2(P)\,dP = 1 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad ; \quad \int_\Delta f_r(P) f_s(P)\,dP = 0 \quad \text{per } r \neq s;$$

$f(P)$ *una funzione a quadrato sommabile in* Δ; $\{a_n\}$ *la successione dei coefficienti di Fourier di* $f(P)$ *rispetto alla successione* $\{f_n(P)\}$;

$$(2)_1\qquad a_n = \int_\Delta f(P) f_n(P)\,dP \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad ;$$

$$(2)_2\qquad \sum_0^\infty {}_n a_n^2 \leq \int_\Delta f^2(P)\,dP = S,$$

e supponiamo che esista in quasi tutto Δ *la somma* (C, r) *di Cesàro di rango* $r > 0$ *della serie*

$$(3)\qquad a_0 f_0(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) + \cdots$$

e che tale somma sia uguale in quasi tutto Δ, *a* $f(P)$.

Vogliamo dimostrare che se n_m $(m = 1, 2, \cdots)$ *è una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione*

$$(4)\qquad n_{m+1}/n_m > \lambda > 1 \quad , \quad m = 1, 2 \cdots$$

la successione delle somme parziali $s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots, s_{n_m}, \cdots$ *della serie* (3), *dove*

$$(5)\qquad s_{n_m} = \sum_{k=0}^{n_m} a_k f_k(P)$$

converge in quasi tutto Δ *verso* $f(P)$.

Sia infatti $s_n^{(r)}$ la media di Cesàro di rango r dei primi n termini della serie (3)

$$(6)\qquad s_n^{(r)} = a_0 f_0(P) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{n+r-1}\right)\left(1 - \frac{r}{n+r-2}\right)\cdots\left(1 - \frac{r}{n+r-k}\right) a_k f_k(P)$$

e proviamo che la serie

$$(7)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \int_\Delta \left[s_{n_{m+1}} - s_{n_m}^{(r)}\right]^2 dP$$

è convergente.

Posto

$$(8)\quad \varphi(n_m, k) = 1 - \left(1 - \frac{r}{n_m + r - 1}\right)\left(1 - \frac{r}{n_m + r - 2}\right)\cdots\left(1 - \frac{r}{n_m + r - k}\right)$$

dalle (5) e (6) si ha

$$s_{n_m} - s^{(r)}_{n_m} = \sum_{k=1}^{n_m} \varphi(n_m, k)\, a_k f_k(P)$$

e per le (1)

$$(9)\qquad \int_\Delta [s_{n_m} - s^{(r)}_{n_m}]^2\, dP = \sum_{k=1}^{n_m} \varphi^2(n_m, k)\, a_k^2 .$$

Dalla (8) per k intero positivo abbiamo

$$(10)_1\quad 0 < \varphi(n_m, k) < 1 \quad \text{per } k < n_m \quad ; \quad \varphi(n_m, n_m) = 1 ;$$

e avendo supposto $r > 0$ si ha anche

$$0 < \varphi(n_m, k) \leq 1 - \left(1 - \frac{r}{n_m + r - k}\right)^k \leq 1 - \left(1 - \frac{rk}{n_m + r - k}\right) = \frac{rk}{n_m + r - k}$$ (1)

cioè

$$(10)_2\qquad 0 < \varphi(n_m, k) \leq \frac{rk}{n_m + r - k} .$$

Abbiamo poi dalla (9)

$$(11)\qquad \sum_{m=1}^{p} \int_\Delta [s_{n_m} - s^{(r)}_{n_m}]^2\, dP = \sum_{m=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_m} \varphi^2(n_m, k)\, a_k^2 ,$$

e della somma doppia del secondo membro fanno parte i termini

$$\varphi^2(n_1, 1)\, a_1^2 + \varphi^2(n_1, 2)\, a_2^2 + \cdots + \varphi^2(n_1, n_1)\, a_{n_1}^2$$
$$+ \varphi^2(n_2, n_1 + 1)\, a_{n_1+1}^2 + \varphi^2(n_2, n_1 + 2)\, a_{n_1+2}^2 + \cdots + \varphi^2(n_2, n_2)\, a_{n_2}^2$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \varphi^2(n_p, n_{p-1} + 1)\, a_{n_{p-1}+1}^2 + \varphi^2(n_p, n_{p-1} + 2)\, a_{n_{p-1}+2}^2 + \cdots + \varphi^2(n_p, n_p)\, a_{n_p}^2$$

la cui somma per le $(10)_1$ e la $(2)_2$ non supera $\sum_{l=1}^{n_p} a_l^2 \leq S$.

(1) Per k intero positivo, $0 < \delta < 1$, si ha $(1 - \delta)^k > 1 - k\delta$.

Se indichiamo poi con k_l il più piccolo intero positivo per il quale si ha $n_{k_l} \geqq l$ ognuno degli altri termini del secondo membro della (11) avrà la forma $\varphi^2(n_i, l)\, a_l^2$ con $i \geqq k_l + 1$ e perciò dalla (11) si ha:

$$\sum_{m=1}^{p} \int_{\Delta} \left[s_{n_m} - s_{n_m}^{(r)}\right]^2 dP \leq S + \sum_{l=1}^{n_{p-1}} a_l^2 \sum_{i=k_l+1}^{p} \varphi^2(n_i, l)$$

e per la (10)$_2$

$$\sum_{m=1}^{p} \int_{\Delta} \left[s_{n_m} - s_{n_m}^{(r)}\right]^2 dP \leq S + r^2 \sum_{l=1}^{n_{p-1}} a_l^2 \sum_{i=k_l+1}^{p} \frac{l^2}{(n_i + r - l)^2} = S +$$

$$+ r^2 \sum_{l=1}^{n_{p-1}} a_l^2 \sum_{t=1}^{p-k_l} \frac{l^2}{(n_{k_l+t} + r - l)^2},$$

e poichè per la (4) $n_{m+t} > \lambda^t n_m$ ne viene

$$\sum_{m=1}^{p} \int_{\Delta} \left[s_{n_m} - s_{n_m}^{(r)}\right]^2 dP < S + r^2 \sum_{l=1}^{n_{p-1}} a_l^2 \sum_{t=1}^{p-k_l} \frac{l^2}{(n_{k_l}\lambda^t + r - l)^2} <$$

$$< S + r^2 \sum_{l=1}^{n_{p-1}} a_l^2 \sum_{t=1}^{p-k_l} \frac{l^2}{(l\lambda^t - l)^2} = S + r^2 \sum_{l=1}^{n_{p-1}} a_l^2 \sum_{t=1}^{p-k_l} \frac{1}{(\lambda^t - 1)^2};$$

ma si ha

$$\sum_{t=1}^{p-k_l} \frac{1}{(\lambda^t - 1)^2} < \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^t - 1)^2} < \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{\pi^2}{6(\lambda - 1)^2}$$ (1)

e quindi qualunque sia p

$$\sum_{m=1}^{p} \int_{\Delta} \left[s_{n_m} - s_{n_m}^{(r)}\right]^2 dP < S\left[1 + \frac{\pi^2 r^2}{6(\lambda - 1)^2}\right];$$

la serie (7) è quindi convergente.

Si ha da qui per un noto teorema di Vitali (2) che la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[s_{n_m} - s_{n_m}^{(r)}\right]^2$$

(1) Per t intero positivo, $\lambda > 1$, si ha $\lambda^t - 1 > t(\lambda - 1)$.

(2) Cfr. G. Vitali, *Sull'integrazione per serie*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXIII, 1907, pp. 137-155. Il teorema che abbiamo applicato si enuncia: Se la serie degli integrali dei termini di una serie a termini positivi converge, converge la serie stessa, fuori che in un aggregato di punti di misura nulla, ed è integrabile completamente per serie.

è quasi ovunque convergente in Δ, quindi quasi ovunque in Δ

$$\lim_{m\to\infty}\left[s_{n_m}(P) - s^{(r)}_{n_m}(P)\right] = 0\,,$$

e poichè per ipotesi, quasi ovunque in Δ si ha $\lim_{m\to\infty} s^{(r)}_{n_m}(P) = f(P)$, ne viene che quasi ovunque in Δ

$$\lim_{m\to\infty} s_{n_m}(P) = f(P) \qquad \text{c. v. d.}$$

3. *Criteri di convergenza parziale per le serie di funzioni di Laplace e per le serie di polinomi di Legendre dedotti dal teorema precedente.*

a) Sulla sfera unitaria sia definita una funzione continua $f(\theta, \varphi)$ [θ colatitudine polare, φ longitudine] *e formiamo la corrispondente serie di Laplace*

$$Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n + \cdots \tag{12}$$

ponendo

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4n}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\,\operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \tag{13}$$

dove P_n *è l'* $n+1^{\text{esimo}}$ *polinomio di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \tag{14}$$

e

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varphi'-\varphi)\,. \tag{15}$$

Il teorema di Fejér ci assicura che la somma (H, 2) della serie (12) e perciò anche la sua somma (C, 2) converge su tutta la sfera verso la funzione $f(\theta, \varphi)$ [1]. Dal teorema dimostrato in 2 segue allora che *se* $n_m (m = 1, 2, \cdots)$ *è una qualunque successione di numeri interi positivi sod-*

(1) Cfr. L. Fejér, *Ueber die Laplacesche Reihe*, « Math. Annalen », Bd. 67, 1909, p. 91. Sulla convergenza in media delle serie di funzioni sferiche cfr. anche: T. H. Gronwall, *Ueber die Laplacesche Reihe*, « Math. Annalen », Bd. 74, 1913, pp. 213-274; E. Kogbetliantz, *Ueber die* (C, δ) *Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für* $\frac{1}{2} < \delta < 1$, « Mathematische Zeitschrift », Bd. 14, 1922, pp. 99-109; ed anche *Analogies entre les séries trigonométriques et les séries sphériques, au point de vue de leur sommabilité par les moyennes arithmetiques*, « Ann. Écol. Norm. Sup. », t. 40, 1923, pp. 259-323.

disfacenti alla condizione $n_{m+1}/n_m > \lambda > 1$, *allora la successione delle somme parziali della serie* (12)

$$s_{n_1}(\theta, \varphi) \quad , \quad s_{n_2}(\theta, \varphi), \cdots \quad , \quad s_{n_m}(\theta, \varphi), \cdots$$

converge su quasi tutta la sfera verso la funzione $f(\theta, \varphi)$ [1].

b) Il citato teorema di Fejér sussiste anche per la serie di polinomi di Legendre [2] abbiamo quindi: *Sia* $f(x)$ *continua in* $(-1, 1)$;

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \quad , \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \qquad n = 0, 1, 2 \cdots;$$

$n_m (m = 1, 2, \cdots)$ *una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione* $n_{m+1}/n_m > \lambda > 1$; *allora la successione*

$$s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots, s_{n_m}, \cdots$$

converge in quasi tutto $(-1, 1)$ *verso* $f(x)$.

(1) Sulla convergenza puntuale delle serie di funzioni sferiche cfr.: *a*) U. Dini, *Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e delle funzioni di Bessel*, Pisa, 1912, «Lez. lit.», pp. 96–102; *b*) C. Jordan, «Cours d'Analyse», t. II, 1913, n. 285, p. 296; *c*) R. Caccioppoli, *Sulle serie di Laplace*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», *6*, vol. XI, 1930, p. 357.

(2) Cfr. L. Fejér, loc. cit., p. 97.

Matematica (Analisi Matematica). — *Sul prodotto di serie sommabili secondo Cesaro.* Nota II di G. MAMMANA, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

Ci occuperemo, in questa seconda Nota, della dimostrazione del teorema I [2].

Ferme restando tutte le ipotesi e le posizioni fatte nella Nota I supponiamo ora che per la (1), ad esempio, si verifichi l'ulteriore condizione:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|A_1^{(i-1)}| + |A_2^{(i-1)}| + \cdots + |A_n^{(i-1)}|}{n^i} = \text{numero determinato e finito } \frac{\bar{A}}{i!}.$$

Prendiamo a considerare la successione:

$$(9)\qquad \frac{C_{n-1}^{(i+j)}}{(n-1)^{i+j}} = \frac{\sum_{s=1}^{n-1} A_s^{(i-1)} B_{n-s}^{j}}{(n-1)^{i+j}} = \frac{\sum_{s=1}^{n-1} A_s^{(i-1)} \dfrac{B_{n-s}^{(j)}}{(n-s)^j}(n-s)^j}{(n-1)^{i+j}}.$$

Dimostreremo che questa successione è regolare ed ha per limite $\dfrac{A \cdot B}{(i+j)!}$

Abbiamo invero:

$$(9)_1\qquad \frac{C_{n-1}^{(i+j)}}{(n-1)^{i+j}} = \frac{\sum_{s=1}^{\nu-1} A_s^{(i-1)} \dfrac{B_{n-s}^{(j)}}{(n-s)^j}(n-s)^j}{(n-1)^{i+j}} +$$

$$+ \frac{\sum_{s=\nu}^{(n-\nu)} A_s^{(i-1)} \left(\dfrac{B}{j!} + \tau_{n-s}\,\varepsilon\right)(n-s)^j}{(n-1)^{i+j}} + \frac{\sum_{s=1}^{\nu-1} A_{n-s}^{(i-1)} \dfrac{B_s^{(j)}}{s^j} s^j}{(n-1)^{i+j}}.$$

Il primo termine del secondo membro tende a zero, evidentemente, per $n \to \infty$; anche l'ultimo termine tende a zero, quando n diverge, chè, per la (8), $\dfrac{A_n^{(i-1)}}{n^i}$ si mantiene limitato al crescere di n. Per poter decidere, quindi, circa la regolarità o meno del primo membro della (9) basterà limitarci alla considerazione del secondo membro della $(9)_1$. Esami-

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) Enunciato nella Nota I di questi «Rendiconti», XIII, 9, p. 662 (1931).

neremo questo termine studiando isolatamente ciascuna delle due parti in cui esso si scinde.

$$(9)_2 \qquad \frac{\sum_{s=\nu}^{(n-\nu)} A_s^{(i-1)}\left(\frac{B}{j!}+\tau_{n-s}\varepsilon\right)(n-s)^j}{(n-1)^{i+j}} = \frac{B}{j!}\frac{\sum_{s=\nu}^{(n-\nu)} A_s^{(i-1)}(n-s)^j}{(n-1)^{i-j}} +$$

$$+\varepsilon\frac{\sum_{s=\nu}^{(n-\nu)} A_s^{(i-1)}\tau_{n-s}(n-s)^j}{(n-1)^{i+j}}.$$

Il limite del primo termine del secondo membro di questa eguaglianza, non differisce dal limite della successione seguente [1]:

$$(9)_3 \quad \frac{B}{j!}\frac{\sum_{s=1}^{n-1} A_s^{(i-1)}(n-s)^j}{(n-1)^{i+j}} = \frac{B}{j!}\frac{A_1^{(i-1)}(n-1)^j + A_2^{(i-1)}(n-2)^j + \cdots + A_{n-1}^{(i-1)}1^j}{(n-1)^{i+j}} =$$

$$= \frac{B}{j!}\frac{A_{n-1}^{(i)} + A_{n-2}^{(i)}(2^j-1^j) + A_{n-3}^{(i)}(3^j-2^j) + \cdots + A_1^{(i)}(\overline{n-1}^j - \overline{n-2}^j)}{(n-1)^{i+j}} \equiv$$

$$\equiv \frac{B}{j!}\frac{M_n}{(n-1)^{i+j}}.$$

Poichè, per ipotesi, $\frac{A_n^{(i)}}{n^i} \to \frac{A}{i!}$, segue, quando si considerino valori di $n \geqq \nu$: $A_n^{(i)} = n^i\frac{A}{i!} + \theta_n n^i\varepsilon$, dove $|\theta_n| < 1$. Sostituendo nella $(9)_3$, avremo:

$$(9)_4 \qquad \frac{B}{j!}\frac{M_n}{(n-1)^{j+i}} =$$

$$= \frac{B}{j!}\frac{A}{i!}\frac{(n-1)^i + (n-2)^i(2^j-1^j) + (n-3)^i(3^j-2^j) + \cdots + \nu^i(\overline{n-\nu}^j - \overline{n-\nu-1}^j)}{(n-1)^{i+j}} +$$

$$+\varepsilon\frac{B}{j!}\frac{\sum_{s=1}^{n-\nu}(n-s)^i(s^j-\overline{s-1}^j)\theta_{n-s}}{(n-1)^{i+j}} + \frac{B}{j!}\frac{\sum_{s=1}^{\nu-1} A_s^{(i)}(\overline{n-s}^j - \overline{n-s-1}^j)}{(n-1)^{i+j}}.$$

L'ultimo termine di questa eguaglianza è infinitesimo per $n \to \infty$. Consideriamo il coefficiente di $\frac{B}{j!}\frac{A}{i!}$, e in esso sostituiamo alle varie dif-

(1) Cfr. osservazione fatta a proposito del limite dell'ultimo termine del secondo membro della $(9)_1$.

ferenze $r^j - \overline{r-1}^j$ le espressioni equivalenti: $\binom{j}{1} r^{j-1} - \binom{j}{2} r^{j-2} + \cdots \pm \pm \binom{j}{j} r^0$; abbiamo sviluppando:

$$\sum_{s=1}^{n-\nu} \frac{(n-s)^i (s^j - \overline{s-1}^j)}{(n-1)^{i+j}} = \binom{j}{1} \sum_{s=1}^{n-\nu} \frac{(n-s)^i s^{j-1}}{(n-1)^{i+j}} - \binom{j}{2} \sum_{s=1}^{n-\nu} \frac{(n-s)^i s^{j-2}}{(n-1)^{i+j-1}} \frac{1}{n-1} +$$

$$+ \binom{j}{3} \sum_{s=1}^{n-\nu} \frac{(n-s)^i s^{j-3}}{(n-1)^{i+j-2}} \frac{1}{(n-1)^2} + \cdots \pm \binom{j}{j} \sum_{s=1}^{n-\nu} \frac{(n-s)^i}{(n-1)^{i+1}} \frac{1}{n^{j-1}}.$$

I termini costituenti il secondo membro di quest'ultima identità per $n \to \infty$ tendono tutti a zero [1], ad eccezione del primo che converge verso il numero $j\psi(i, j-1) = \frac{i!\, j!}{(i+j)!}$ [1]. Segue da ciò, anche, che il coefficiente di ε, nella $(9)_4$, è limitato, indipendentemente da ν, per $n \to \infty$.

Avremo dunque intanto: $\lim \frac{B}{j!} \frac{M_n}{(n-1)^{i+j}} = \frac{A \cdot B}{(i+j)!}$.

Ci rimane in fine, per completare la dimostrazione del nostro teorema I, da far vedere che il coefficiente di ε, nella $(9)_2$ si mantiene, indipendentemente di ν, limitato al divergere di n.

Tale coefficiente è evidentemente inferiore, qualunque sia ν, a quest'altro: $\frac{\sum_{s=1}^{n-1} |A_s^{(i-1)}| (n-s)^j}{(n-1)^{i+j}}$, il quale ha la forma del coefficiente $\frac{M_n}{(n-1)^{i+j}}$ di $\frac{B}{j!}$ della $(9)_3$. Ricordando quindi l'ipotesi della assoluta sommabilità della serie (1), rispetto alla successione (C, i), potremo affermare senz'altro che, il menzionato coefficiente di ε è numericamente inferiore al numero $\frac{j!\, \bar{A}}{(i+j)!}$. Concludendo, abbiamo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_n^{(i+j)}}{(n-1)^{i+j}} = \frac{A \cdot B}{(i+j)!}. \qquad \text{c. v. d.}$$

Notiamo infine che, ove la serie prodotto (5) riesca sommabile rispetto a una successione (C, s) di ordine $s < i+j+1$ oppure di $i+j$, la somma relativa risulta sempre uguale al prodotto delle somme delle serie componenti. Ciò è conseguenza di questo teorema: *Se una serie è sommabile relativamente a una successione* (C, s) *di Cesaro di ordine* s, *essa serie è*

(1) Cfr. limite calcolato in principio della presente Nota.

sommabile rispetto a ogni successione di Cesaro di ordine $r > s$, e inoltre la somma relativa all'ordine r è uguale a quella relativa all'ordine s (1).

Esempio. Si prendano in considerazione le due serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad ; \quad 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$$

sommabili relativamente alle successioni di Cesaro $(C, 1)$ e $(C, 2)$ e di somme: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ rispettivamente. Ciascuna di esse inoltre, come si verifica subito, è assolutamente sommabile rispetto alla successione relativa. Ne segue: La serie prodotto delle due considerate serie, secondo Cauchy,

$$(10) \qquad 1 - (1 + 2) + (1 + 2 + 3) - (1 + 2 + 3 + 4) + \cdots$$

riescirà sommabile relativamente alla successione $(C, 3)$, e avrà per somma il prodotto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

La cosa si verifica subito. Si ha invero per le somme $C_i^{(0)}$ (per $i = 1, 2, \cdots$), della (10):

$$1, \quad -2, \quad (1 + 3), \quad -(2 + 4), \quad (1 + 3 + 5), \quad -(2 + 4 + 6), \cdots ;$$

e per le successive somme $C_i^{(1)}$ $(i = 1, 2 \cdots)$:

$$1, \quad -1, \quad (1 + 2), \quad -(1 + 2), \quad (1 + 2 + 3), \quad -(1 + 2 + 3), \cdots ;$$

per le somme $C_i^{(2)}$ $(i = 1, 2 \cdots)$:

$$1, \quad 0, \quad (1 + 2), \quad 0, \quad (1 + 2 + 3), \quad 0, \quad \cdots ;$$

e infine per le somme $C_i^{(3)}$ abbiamo:

$$C_{2i-1}^{(3)} = C_{2i}^{(3)} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \cdots + \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + i(i+1)}{2} .$$

$$3! \lim \frac{C_{2n}^{(3)}}{(2n)^3} = \frac{3!}{2^3} \lim \frac{C_{2n}^{(3)} - C_{2n-2}^{(3)}}{n^3 - (n-1)^3} = \frac{3!}{2^4} \lim \frac{n(n+1)}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1}{2^3} . \qquad \text{c. v. d.}$$

(1) Posto invero che:

$$\frac{A_n^{(s)}}{n^s} \to \frac{A}{s!} \qquad \text{segue:} \qquad \frac{A_n^{(s+1)}}{n^{s+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i^{(s)}}{n^{s+1}} = \frac{1^s A_1^{(s)} + 2^s \frac{A_2^{(s)}}{2^s} + \cdots + n^s \frac{A_n^{(s)}}{n^s}}{(n+1)^{s+1}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\nu-1} A_i^{(s)}}{n^{s+1}} + \frac{\sum_{i=\nu}^{n} i^s \left(\frac{A}{s!} + \theta_i \varepsilon \right)}{n^{s+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu-1} A_i^{(s)}}{n^{s+1}} + \frac{A}{s!} \frac{\sum_{i=\nu}^{n} i^s}{n^{s+1}} + \varepsilon \frac{\sum_{i=\nu}^{n} i^s \theta_i}{n^{s+1}} \to \frac{A}{s!} \frac{1}{s+1} = \frac{A}{(s+1)!} .$$

Matematica. — *Una nuova classe di funzioni circolari.* Nota di L. Laboccetta, presentata dal Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Generazione geometrica della funzione* I*x* (*intiero di x*) *e delle altre funzioni numeriche* Fr*x*, C*mx*, R*x ad essa associate.* Nota di L. Laboccetta, presentata dal Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Qualche complemento alla teoria degli invarianti adiabatici secondo T. Levi-Civita.* Nota di G. Krall, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

In un breve ciclo di conferenze all'Università di Roma e di Amburgo [2] ed in una successiva comunicazione al Congresso dei fisici a Como [3], il prof. T. Levi-Civita impostava la teoria degli invarianti adiabatici, indipendentemente dalle intuizioni di fisica teorica che avevano condotto a scoprirli. E perveniva tra l'altro, attraverso una feconda associazione dei metodi della meccanica analitica coi criteri fisico-statistici classici che presiedono alla mirabile dimostrazione del teorema di Gibbs, dovuta a P. Hertz, ad un insieme sistematico di enunciati riguardabili come basi di ogni successiva penetrazione analitica di un complesso di fatti, d'interesse ed importanza indiscutibile, sino allora trattabili soltanto a prezzo dell'impiego dei più svariati sussidi dell'analisi, di minuziose discussioni e mal comprensibili riserve.

Il risultato essenziale delle ricerche citate, che il Geppert dimostrò capace di notevoli estensioni, di cui talune previste dal Levi-Civita stesso, concerne la dimostrazione di esistenza e l'indicazione del metodo costruttivo di $m + 1$ invarianti adiabatici per sistemi canonici *imprimitivi d'ordine m*, cioè ammettenti, oltre all'integrale dell'energia $H = E$, m integrali uniformi tra loro in *involuzione* nel senso noto di S. Lie [4].

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) T. Levi-Civita, *Drei Vorlesungen über Adiabatische Invarianten*, « Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität », Leipzig, 1928.

(3) T. Levi-Civita, *Sugli invarianti adiabatici*, « Atti del Congresso internazionale dei Fisici », Como, settembre 1927.

(4) Cfr. p. e. T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte II, cap. X. Zanichelli, Bologna 1927.

Or noi ci proponiamo di assegnare un modesto complemento al teorema richiamato considerando la circostanza in cui, in luogo degli integrali in involuzione sieno date *relazioni invarianti*, o parte gli uni parte le altre, pure s'intende in *involuzione*. Le quali relazioni, come si sa, si ottengono, soddisfacendo senz'altro alla condizione d'involuzione, quando sia nota una soluzione particolare, eventualmente involgente qualche costante arbitraria, dell'equazione di Hamilton–Jacobi specifica del sistema canonico che si considera.

Applicazioni concrete allo studio dei sistemi vibranti discreti e continui si riservano ad una prossima Nota.

§ 2. – Sistemi canonici da designarsi imprimitivi d'ordine m. Esistenza secondo Levi–Civita di $m+1$ invarianti adiabatici costruibili per quadrature.

Consideriamo un generico sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

a funzione caratteristica $H(p \mid q \mid a)$ indipendente dal tempo e dipendente – in modo adiabatico – da quanti si vogliono parametri a lentamente variabili.

Supponiamo che, oltre all'integrale dell'energia

$$H = E$$

il sistema ammetta, quando le a si suppongano rigorosamente costanti, m integrali uniformi pur essi indipendenti da t

$$F_1 = c_1 \quad , \quad F_2 = c_2, \cdots, F_m = c_m$$

tra loro in involuzione, cioè annullanti le $\frac{m(m-1)}{2}$ distinte parentesi di Poisson

$$(F_\alpha, F_\beta), \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n).$$

Convenendo di porre, per utilità formale,

$$H = F_0 \quad , \quad E = c_0,$$

gli $m+1$ integrali del nostro sistema, che chiameremo imprimitivo di ordine m, si scrivono compendiosamente nella forma

$$F_r = c_r, \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

e soddisfano tutti, evidentemente, le condizioni di involuzione

$$(F_r, F_s) = 0, \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, m).$$

Ciò posto, supponendo le $F_r = c_r$, $(r = 0, 1, 2, \cdots, m)$ indipendenti rispetto agli argomenti p, sarà lecito immaginarne m, e specificamente quelle corrispondenti ai valori $1, 2, \cdots, m$ di r, già risolute rispetto a $p_1, p_2, \cdots, p_m$ sotto la forma

$$p_j = f_j(p_{m+1}, \cdots, p_n \mid q_1, \cdots, q_n \mid c) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Introduciamo tali espressioni nella rimanente equazione $F_0 = c_0$.

Perverremo così ad una $\overset{*}{F}_0$ ridotta, caratterizzante nello spazio ridotto Ψ delle $p_{m+1}, \cdots, p_n$; $q_{m+1}, \cdots, q_n$, ove le $q_1, q_2, \cdots, q_m$ si riguardino come parametri, una superficie σ.

Se tale superficie è chiusa, e se le curve integrali la *invadono sensibilmente* [1], per le $q_1, q_2, \cdots, q_m$ considerate comunque variabili, il volume W_0 da essa racchiuso risulta un invariante adiabatico, indipendente dalle specifiche m coordinate p che si sono eliminate.

Potendosi infine sostituire ordinatamente negli uffici della F_0 gli m integrali rimanenti, resta acquisita l'esistenza, ed in pari tempo assegnato il metodo costruttivo, di $m + 1$ invarianti adiabatici W_α, $\alpha = 0, 1, \cdots, m$; per l'assegnato sistema canonico.

Un siffatto teorema abbraccia naturalmente i casi limiti ch'erano antecedentemente noti, di numero minimo e massimo di integrali uniformi: il caso dei sistemi quasi-ergodici con l'unico integrale uniforme $H = E$ e dei sistemi a variabili separabili con $n - 1$ integrali quadratici; sono i casi classici considerati dal teorema di Gibbs (su cui si fonda il teorema di Levi-Civita attraverso una estensione adeguata ai volumi ridotti W) e da quello ben noto di Sommerfeld e Burgers per i sistemi dello Stäckel.

§ 3. – Nozione di m relazioni invarianti in involuzione. Invarianti adiabatici relativi.

Consideriamo la circostanza in cui, accanto all'integrale dell'energia $H = E$ in luogo di m integrali sieno date m relazioni invarianti

$$F_\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, m).$$

Attese soddisfatte le condizione di risolubilità rispetto ad m delle p ed in pari tempo soddisfatte le condizioni di *sensibile invasione* delle σ ridotte

(1) Cioè nel senso inteso per i sistemi quasi-ergodici.

si perverrà ancora a caratterizzare $m + 1$ invarianti adiabatici costituiti dagli $m + 1$ volumi ridotti W_α, da costruire nella stessa maniera prima indicata. Va però rilevato che le variazioni adiabatiche delle a sono subordinate alle condizioni essenziali di lasciar immutate, e precisamente uguali a zero le F_α, con che appare ben appropriata la designazione di invarianti *relativi* ai volumi W_α dianzi considerati.

Riesce altresì evidente che, se taluna, poniamo $m' < m$ delle m relazioni invarianti è sostituita da integrali, sussistono ancora $m + 1$ invarianti adiabatici subordinati però ad $m - m'$ in luogo di m condizioni per le a.

§ 4. – Conoscenza d'una soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi.

È particolarmente notevole, forse l'unica interessante, la circostanza in cui è nota una soluzione S dell'equazione di Hamilton-Jacobi, in quanto allora, com'è ben noto, le relazioni

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

forniscono addirittura n relazioni invarianti evidentemente in involuzione tra loro.

Se le F_α ridotte risultano chiuse avrà senso parlare di integrali, estesi a *cicli chiusi*, di funzioni delle p_i, q_i, ed avranno, in tale circostanza, significato ben determinato gli integrali delle funzioni non uniformi, caratterizzanti i volumi ridotti,

$$\int \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = I_i . \tag{1}$$

I quali, per quanto si è detto, risultano invarianti adiabatici *relativi*, tra loro distinti, se si tien conto della non uniformità delle $\frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Ed addirittura divengono codesti integrali invarianti adiabatici nel senso ordinario, cioè invarianti assoluti, se la S è un integrale completo della equazione di H.-J., cioè contiene n costanti arbitrarie in modo essenziale.

Merita rilevare che in tutti i casi gli n invarianti adiabatici I_i si possono scrivere sotto una forma assai espressiva.

Si consideri infatti nello spazio originario delle fasi una generica linea chiusa C.

Poichè si può subordinare allora, al variare di un punto su questa la percorrenza sul ciclo della coppia generica p_i, q_i, le (1) si scriveranno compendiosamente

$$\int_C \sum_1^n{}_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum_1^n I_i = I , \tag{2}$$

dovendosi intendere l'adiabaticità assoluta, parziale o relativa a seconda che la S contiene n, meno di n o nessuna costante arbitraria.

Caratterizzando il sommatorio sotto il segno integrale il differenziale totale dell'*azione* S del sistema, la (2) prende la forma, valida nelle condizioni specificate, *manifestamente invariantiva per rispetto a trasformazioni qualsivogliono di coordinate,*

$$\int_C dS = I ,$$

I essendo invariante adiabatico, ripetiamo, con gli attributi di *relativo* od *assoluto* a seconda che la S è integrale particolare o completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Meccanica. — *Propagazione di onde nei mezzi elastici isotropi anche non omogenei.* Nota di G. Lampariello, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. In questa Nota, seguendo gli stessi criterî di un precedente lavoro [2], studio la propagazione di superficie di discontinuità (onde) in un mezzo elastico isotropo, ma non necessariamente omogeneo. L'argomento è tutt'altro che nuovo; si sa, infatti, che il Beltrami ha dedicato ad esso delle bellissime pagine. Ma le considerazioni generali riguardanti i sistemi di equazioni alle derivate parziali, che ho brevemente riassunte nel lavoro citato, consentono di liberarsi dalle ipotesi delle onde piane e dell'omogeneità del mezzo, sulle quali è impostata la trattazione del Beltrami e di altri Autori [3].

Dimostreremo che, anche nelle attuali condizioni più generali e più prossime alla realtà, possono determinarsi onde di due tipi: uno longitudinale, l'altro trasversale, che si propagano con le velocità

$$V_1 = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \quad , \quad V_2 = \sqrt{\frac{B}{\mu}} ,$$

essendo μ la densità del mezzo ed A e B i parametri d'isotropia che supporremo funzioni del posto (eventualmente costanti nei mezzi omogenei).

In una Nota successiva tratterò il caso dei mezzi anisotropi.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) Cfr. G. Lampariello, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, «Rend. della R. Acc. dei Lincei», 1° sem. 1931, fasc. 9, p. 688.

(3) Cfr. E. Beltrami, *Opere*, t. IV.

2. È ben noto che il potenziale elastico, nei mezzi isotropi, è espresso, nei limiti di validità della legge di Hooke, dalla forma quadratica

$$(1)\quad \Pi = -\frac{1}{2}(A - 2B)(a+b+c)^2 - B(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2),$$

nella quale $a, b, \cdots, h$ sono certe combinazioni lineari delle derivate parziali prime, rispetto alle coordinate di un punto generico del mezzo, delle componenti u, v, w dello spostamento del punto considerato.

Più precisamente

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, b = \frac{\partial v}{\partial y}, c = \frac{\partial w}{\partial z}, f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Le equazioni differenziali (indefinite) del moto elastico sono:

$$(2)\quad \begin{cases} X - \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \Pi}{\partial a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \Pi}{\partial h} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \Pi}{\partial g} \\ Y - \mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \Pi}{\partial h} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \Pi}{\partial b} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \Pi}{\partial f} \\ Z - \mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \Pi}{\partial g} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \Pi}{\partial f} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \Pi}{\partial c}. \end{cases}$$

Effettuando i calcoli indicati ai secondi membri, si trova, ad es., per la prima delle (2)

$$X - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (A - B)\frac{\partial \theta}{\partial x} + B\Delta_2 u + \theta\left(\frac{\partial A}{\partial x} - 2\frac{\partial B}{\partial x}\right) + 2\left(a\frac{\partial B}{\partial x} + h\frac{\partial B}{\partial y} + g\frac{\partial B}{\partial z}\right) = 0,$$

dove $\theta = a + b + c$.

I termini nelle derivate dei parametri d'isotropia A e B sono lineari nelle derivate parziali prime delle componenti dello spostamento e possono quindi essere trascurati, perchè nella determinazione delle caratteristiche delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (2), intervengono soltanto i termini nelle derivate seconde delle funzioni incognite. Conviene allora abbreviare la scrittura delle formole, indicando con x_i, u_i, X_i $(i = 1, 2, 3)$ rispettivamente le coordinate del generico punto del mezzo, le componenti dello spostamento della forza unitaria di massa.

Le (2) assumono quindi l'aspetto

$$(2')\quad X_i - \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (A - B)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + B\Delta_2 u_i + \cdots = 0\ ^{(1)}\quad (i = 1, 2, 3).$$

(1) Scrivo $\sum_k$ invece di $\sum_1^3 k$.

Le (2′) costituiscono un sistema normale di tre equazioni alle derivate parziali del secondo ordine nelle tre funzioni incognite u_i delle quattro variabili indipendenti $(x_0 \equiv t\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)$. Le superficie d'onda sono le caratteristiche, variabili nel tempo, del sistema (2′). Il significato fisico delle equazioni ci assicura che tali onde esistono; si tratta di determinarle.

A tale scopo sostituiamo alle variabili x quattro loro combinazioni indipendenti $\zeta\,,\, \zeta_1\,,\, \zeta_2\,,\, \zeta_3$ e sia

$$\zeta(x_0\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) = \zeta_0 \qquad (\zeta_0 \text{ costante})$$

una superficie d'onda che indicheremo con σ.

Questa funzione ζ delle x dovrà annullare il determinante dei coefficienti delle $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2}$ nelle equazioni trasformate delle (2′).

Posto

$$p_i = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}, \qquad (i = 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, 3)$$

si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = p_i\, p_k \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \cdots; \qquad (i\,,\, k = 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, 3)$$

abbiamo messo in evidenza solo i termini nella derivata seconda rispetto a ζ, perchè questi interessano per il calcolo che dobbiamo fare.

Poichè

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = p_0^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} + \cdots \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = p_i \sum_k p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + \cdots ,$$

$$\Delta_2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} \sum_k p_k^2 + \cdots ,$$

le (2′) diventano

$$(\mathrm{A} - \mathrm{B})\, p_i \sum_k p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + (\mathrm{B} \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2) \frac{\partial^2 u_i}{\partial \zeta^2} + \cdots = 0\,, \qquad (i = 1\,,\, 2\,,\, 3).$$

L'equazione differenziale delle superficie σ è

$$\| (\mathrm{A} - \mathrm{B})\, p_i\, p_k + \varepsilon_{ik} (\mathrm{B} \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2) \| = 0\,,$$

essendo $\varepsilon_{ik} = 0$ se $i \neq k$, $\varepsilon_{ik} = 1$ se $i = k$.

Il determinante che qui si presenta è del tipo

$$a = \| a_{ik} + \varepsilon_{ik}\, x \|$$

e si sa che

$$a = x^n + \mu_1\, x^{n-1} + \mu_2\, x^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1}\, x + \mu_n\,,$$

essendo n l'ordine di a e μ_s la somma dei minori principali di ordine s estratti dal determinante $a_0 = \|a_{ik}\|$.

Nel nostro caso si ha $n = 3$ e

$$a_{ik} = (A - B)\, p_i\, p_k .$$

Si riconosce facilmente che $\mu_2 = \mu_3 = 0$.

Dunque

$$\|(A - B)\, p_i\, p_k + \varepsilon_{ik} (B \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2)\| = (B \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2)^3 +$$

$$+ (A - B) \sum_k p_k^2 (B \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2)^2 = (A \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2)(B \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2)^2 .$$

Le superficie d'onda σ sono integrali delle due equazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} A \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2 = 0 \\ B \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2 = 0 , \end{cases}$$

le quali sono del tipo

$$(4) \qquad \frac{1}{V^2} p_0^2 - \sum_k p_k^2 = 0 .$$

È ben noto che la (4) è l'equazione delle caratteristiche della celebre equazione canonica dei piccoli moti

$$\Box \varphi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi = 0 ,$$

dove φ è una generica funzione delle quattro variabili (t, x). Si sa che V, funzione del posto (eventualmente costante), è la velocità di propagazione dell'onda.

Concludiamo dunque che, nei mezzi elastici isotropi, possono determinarsi onde, propagantisi con le velocità

$$V_1 = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \qquad , \qquad V_2 = \sqrt{\frac{B}{\mu}} .$$

3. Per dimostrare il carattere longitudinale della prima e trasversale della seconda, cerchiamo le condizioni di compatibilità dinamica di due moti raccordantisi, con discontinuità del secondo ordine, attraverso una superficie σ.

Ad esse si perviene, tenendo conto del fatto che, attraverso σ, non subiscono discontinuità nè le u_i, nè le derivate parziali prime delle u_i rispetto alle (t, x); si tratta cioè di un'onda di secondo ordine.

Se si introducono i tre parametri di discontinuità $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ delle derivate seconde delle u_i e si indica con $\Delta \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_k}$ il salto che subisce attraverso σ la $\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_k}$, si ha [1]

$$\Delta \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_k} = \lambda_\nu p_i p_k \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Dalle (2'), supposta la continuità delle funzioni A, B, X_i, si trae

$$(A - B) \sum_k \Delta \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + B \sum_k \Delta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \mu \Delta \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$$

cioè

$$(A - B) \sum_k \lambda_k p_i p_k + \lambda_i (B \sum_k p_k^2 - \mu p_0^2) = 0 \ [2] \quad (i = 1, 2, 3).$$

Indichiamo con $\boldsymbol{n}$ il versore normale a σ in un suo generico punto (vettore unitario normale orientato indifferentemente dall'una o dall'altra delle porzioni del mezzo separate, all'istante t, da σ).

Posto $g^2 = \sum_k p_k^2$ e indicate con α_i $(i = 1, 2, 3)$ le componenti di $\boldsymbol{n}$ (coseni direttori della normale a σ), si ha

$$p_i = \alpha_i g \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Sia $\boldsymbol{\lambda}$ il vettore di componenti λ_i. Si ha

$$\sum_k \lambda_k p_k = g \sum_k \lambda_k \alpha_k = g \lambda_n,$$

essendo λ_n la componente normale di $\boldsymbol{\lambda}$.

Le condizioni di compatibilità dinamica si compendiano nell'unica relazione vettoriale

$$(B g^2 - \mu p_0^2) \boldsymbol{\lambda} = \pm (A - B) g^2 \lambda_n \boldsymbol{n}.$$

Di qua si deduce che, se $B g^2 - \mu p_0^2 \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda}$ è un vettore normale a σ e la discontinuità corrispondente è longitudinale; se invece è $B g^2 - \mu p_0^2 = 0$, si ha

$$\lambda_n = 0$$

e quindi $\boldsymbol{\lambda}$ è trasversale (tangente a σ).

(1) Cfr. T. Levi-Civita, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Conferenze raccolte dal dr. G. Lampariello, Bologna, Zanichelli (in corso di stampa).

(2) Si osservi che queste equazioni, lineari, omogenee, nelle incognite λ_i ammettono soluzioni non nulle, perchè il determinante del sistema è il primo membro dell'equazione differenziale delle superficie σ.

Meccanica. — *Algoritmi di calcolo motoriale.* Nota di G. Galanti, presentata [1] dal Corrisp. G. Giorgi.

Un motore (ente matematico che corrisponde tanto all'atto di moto di un corpo rigido quanto allo sforzo rototraslatorio risultante da un sistema di forze), riferito a una terna cartesiana ortogonale, è individuato da tre componenti P, Q, R che rappresentano le velocità di rotazione intorno agli assi (o rispettivamente le forze componenti lungo gli assi) e da altre tre componenti L, M, N dette anche « momenti », che rappresentano le velocità di traslazione lungo gli assi (o rispettivamente le coppie componenti intorno agli assi). Secondo il calcolo spaziale di G. Giorgi [2] ogni motore Φ corrisponde a un operatore triedrale il quale con riferimento al sistema coordinato prescelto resta associato biunivocamente a questa matrice degenere (per brevità indichiamo sempre con lo stesso simbolo un motore e la sua matrice rappresentativa):

$$(1) \qquad \Phi = \begin{Vmatrix} 0 & -R & Q & \varepsilon L \\ R & 0 & -P & \varepsilon M \\ -Q & P & 0 & \varepsilon N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

dove ε è un simbolo analogo all'unità speciale ω dei biquaternioni di Clifford, cioè un simbolo che vale come un infinitesimo di primo ordine, perchè il suo quadrato deve considerarsi nullo. Il detto calcolo spaziale insegna che queste matrici possono sottoporsi a operazioni di calcolo, isolatamente o fra loro o in congiunzione con quelle rappresentative degli altri enti geometrici, secondo le regole del calcolo delle matrici. Applicando questo principio, mi propongo di ricavare alcuni algoritmi che interessano il calcolo dei motori. Pur ritenendo però la matrice di quart'ordine scritta sopra, a scopo di calcolo, ricorderò che talvolta conviene indicare il motore con la notazione semplice

$$(2) \qquad \Phi \left\{ \begin{matrix} P & Q & R \\ L & M & N \end{matrix} \right\}$$

(1) Nella seduta del 12 aprile 1931.

(2) G. Giorgi, *Sul calcolo spaziale più esteso.* Comunicazione letta al Congresso Internazionale dei Matematici in Bologna il giorno 7 settembre 1928. « Atti del Congresso », vol. IV.

la quale deve considerarsi semplicemente come un'abbreviazione della scrittura precedente.

Si ricorderà che quando P, Q, R sono nulle, il motore degenera in un vettore (indice di un atto di moto puramente traslatorio o di una coppia) e l'asse viene determinato solo in direzione; quando è nullo il trinomio invariante $T = PL + QM + RN$ senza che P, Q, R siano tutte nulle il motore degenera in un cursore (cosiddetto vettore localizzato o rotore; indice di un atto di moto puramente rotatorio o di una forza).

2. - Anzitutto il calcolo delle matrici insegna a ricavare da una matrice come Φ quattro invarianti I_1, I_2, I_3, I_4 i quali sono rispettivamente la somma dei termini diagonali principali, la somma dei minori principali di secondo e di terzo ordine, e il determinante generale. Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$(3) \qquad I_1 = 0 \; ; \; I_2 = P^2 + Q^2 + R^2 \; ; \; I_3 = 0 \; ; \; I_4 = 0 .$$

La quantità $P^2 + Q^2 + R^2$ rappresenta il quadrato della velocità di rotazione (o della forza agente lungo l'asse) e sarà da noi indicata con ω^2. Dunque dal calcolo degli invarianti si ricava uno degli elementi intrinseci del motore. In base a questi risultati l'equazione caratteristica di Cayley cioè

$$(4) \qquad \Phi^4 - I_1 \Phi^3 + I_2 \Phi^2 - I_3 \Phi + I_4 = 0$$

assume la forma

$$(5) \qquad \Phi^4 + \omega^2 \Phi^2 = 0 .$$

Siccome Φ è degenere, non è permesso dividere per Φ^2; e in effetto operando così si otterrebbe un risultato erroneo. Per moltiplicazione diretta di matrici si ricava:

$$(6) \quad \Phi^2 = \begin{Vmatrix} -(R^2 + Q^2) & QP & PR & \varepsilon(NQ - MR) \\ QP & -(P^2 + R^2) & RQ & \varepsilon(LR - NP) \\ PR & RQ & -(Q^2 + P^2) & \varepsilon(MP - LQ) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Secondo le regole del calcolo triedrale si riconosce facilmente che questo è un operatore che trasforma un punto generico P in un vettore diretto normalmente verso l'asse del motore, e uguale alla distanza di P dall'asse moltiplicata per ω^2; cioè rappresenta l'ente geometrico « asse » del motore,

privato di verso, e caricato dello scalare ω^2. Similmente per moltiplicazione diretta si ricava

$$(7) \qquad \Phi^3 = \begin{Vmatrix} 0 & +R\omega^2 & -Q\omega^2 & +\varepsilon\alpha \\ -R\omega^2 & 0 & +P\omega^2 & +\varepsilon\beta \\ +Q\omega^2 & -P\omega & 0 & +\varepsilon\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

dove

$$\alpha = -R(LR - NP) + Q(MP - LQ)$$
$$\beta = -P(MP - LQ) + R(NQ - MR)$$
$$\gamma = -Q(NQ - MR) + P(LR - NP).$$

Si rileva che α, β, γ sono componenti di un vettore il quale è un prodotto vettoriale composto; espressione che ricorre più di una volta in Meccanica.

Per confronto con quanto detto poco fa si riconosce che questa matrice rappresenta un rotore avente lo stesso asse del motore Φ e una velocità rotatoria uguale a $-\omega^3$.

Ottenute così Φ^2 e Φ^3, l'equazione caratteristica ricavata sopra dà il modo di ricavare, espresse linearmente per mezzo di queste due potenze, tutte le altre potenze di Φ; e si ha:

$$(8) \quad \Phi^4 = -\omega^2\Phi^2 \; ; \; \Phi^5 = -\omega^2\Phi^3 \; ; \; \Phi^6 = +\omega^4\Phi^2 \; ; \; \Phi^7 = +\omega^4\Phi^3 \; ; \text{ etc.}$$

Vi è un altro invariante che interessa la meccanica, ed è il noto trinomio:

$$(9) \qquad T = PL + QM + RN.$$

Questo non è invariante rispetto a trasformazioni lineari qualunque eseguite sulle quattro variabili x, y, z, m, da cui nel calcolo triedrale è ricavata la matrice, ma è invariante rispetto alle trasformazioni ortogonali in x, y, z effettuate anche non omogeneamente, ma con cambiamento dell'origine.

Dalla natura stessa del motore segue che non vi sono altri invarianti scalari indipendenti da questi.

Considerando invece simultaneamente due motori, risultano parecchi invarianti simultanei metrici; intendo dire espressioni composte che conservano il loro valore per qualunque cambiamento dal triedro $Oxyz$ ad altro triedro ortogonale $O'x'y'z'$. Il più importante di questi è il sestinomio:

$$(10) \qquad PL' + QM' + RN' + P'L + Q'M + R'N$$

a cui Appell ha dato il nome di *momento* di due motori Φ, Φ' uno rispetto all'altro. Esso corrisponde a quello che nei lavori recenti di von Mises, Cartan, A. Cabras ecc., è stato indicato col nome e col simbolo di prodotto scalare di due motori.

Questa denominazione mi sembra che non in tutti i casi riesca interamente appropriata, almeno nello spazio euclideo, perchè se i due motori si riducono a due vettori, il sestinomio di cui sopra si annulla e non si identifica col prodotto scalare dei due vettori. Siccome ha caratteri analoghi a quelli di un prodotto, è forse opportuno chiamarlo *prodotto momentale* e indicarlo col simbolo

$$(\Phi, \Phi')_m . \tag{11}$$

Si terrà presente che l'invariante T è il semiprodotto momentale di un motore per sè stesso; e che sotto forma di prodotti momentali si possono esprimere tutti i momenti di motori e rotori rispetto ad assi dello spazio.

3. Gli algoritmi del calcolo delle matrici, applicati alla matrice rappresentativa di un motore Φ, conducono a definire una funzione qualunque $f(\Phi)$ formata con parametri scalari. Le formule che abbiamo trovato per le successive potenze di Φ conducono a trovare l'espressione di e^{Φ}, operatore che ha un particolare interesse in meccanica perchè secondo teorie già note rappresenta un *avvitamento* (twist) cioè il fattore che bisogna applicare a una figura generica dello spazio per ricavare la figura spostata che si ottiene quando si esegue un movimento elicoidale con un atto di moto definito dal motore Φ e protratto per l'unità di tempo [1].

Ricorrendo allo sviluppo in serie di e^{Φ}, e sostituendo alle potenze da Φ^4 in poi le loro espressioni in funzione di Φ^2 e di Φ^3, si trova, a calcoli eseguiti:

$$e^{\Phi} = 1 + \Phi + \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2}\Phi^2 + \frac{\omega - \operatorname{sen}\omega}{\omega^3}\Phi^3 . \tag{12}$$

Effettuando la sommazione di questi termini risulta una matrice in cui dicendo h_{rs} l'elemento di riga r e di colonna s, si ha:

$$h_{11} = \frac{P^2 + (Q^2 + R^2)\cos\omega}{\omega^2} \; ; \; h_{12} = \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} PQ - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} R \; ;$$

(1) Cfr. G. Giorgi, *Fattori e indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali d'operazioni*. Questi «Rendiconti», serie 6ª, vol. VII (1° sem. 1928) pp. 871–877.

$$h_{13} = \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} RP + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} Q \; ; \; h_{14} = \varepsilon L + \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \varepsilon (NQ - MR) +$$

$$+ \frac{\omega - \operatorname{sen}\omega}{\omega^3} \varepsilon [- R(LR - NP) + Q(MP - LQ)]$$

$$h_{21} = \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} PQ + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} R \; ; \; h_{22} = \frac{Q^2 + (R^2 + P^2)\cos\omega}{\omega^2} ;$$

$$h_{23} = \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} QR + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} P \; ; \; h_{24} = \varepsilon M + \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \varepsilon (LR - NP) +$$

$$+ \frac{\omega - \operatorname{sen}\omega}{\omega^3} \varepsilon [- P(MP - LQ) + R(NQ - MR)]$$

h_{31} , h_{32} , h_{33} , h_{34} (legge di formazione evidente)

$$h_{41} = h_{42} = h_{43} = 0 \; ; \; h_{44} = 1 .$$

Credo che sia questo il primo caso in cui l'esponenziale di una matrice di spazio, di forma non del tutto particolare sia stato ottenuto, e risulti scevro da irrazionali; ciò secondo le previsioni di G. Giorgi e di L. Fantappiè.

Come prima riprova: se il motore si riduce a un vettore $\boldsymbol{w}$, di componenti L , M , N , (intendo, un vettore propriamente detto, non localizzato) cioè se $P = Q = R = 0$, deve e^{Φ} rappresentare un fattore di traslazione, corrispondente secondo il suo significato geometrico, alla matrice

$$e^{\boldsymbol{w}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \varepsilon L \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon M \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Ed è questo infatti che risulta; e la matrice ottenuta si identifica con $1 + \boldsymbol{w}$, ciò in accordo col carattere infinitesimo del simbolo ε perchè la matrice di $\boldsymbol{w}$ contiene ε come fattore.

Come seconda riprova: sia il motore di carattere generale, ma adottiamo una rappresentazione semicanonica assumendo l'asse Oz coincidente con l'asse del motore, di guisa che risultino $P = 0$; $Q = 0$; $R = \omega$, $L = 0$, $M = 0$; $N = w$.

Il fattore e^{Φ} dovrà allora rappresentare un avvitamento composto di una rotazione dell'angolo ω intorno all'asse Oz combinato con una trasla-

zione w lungo l'asse medesimo; cioè secondo le notazioni del calcolo triedrale deve essere rappresentabile con questa matrice

$$\begin{Vmatrix} \cos\omega & -\operatorname{sen}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\omega & \cos\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Questa coincide appunto con la e^{Φ} che si ricava applicando le formule scritte.

Queste due riprove confermano insieme la coerenza del calcolo triedrale e quella delle formule che abbiamo ottenuto.

Aggiungiamo che dall'espressione generale di e^{Φ} si ricavano in modo diretto le formule di Rodrigues.

Meccanica (Idromeccanica). — *Potenza di una corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo di Joukowski.* Nota di A. Consiglio, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

In una Nota [2] pubblicata l'anno scorso, ho valutato la risultante delle azioni dinamiche di una corrente traslocircolatoria, irrotazionale, permanente sopra un ostacolo pisciforme di Joukowski. Nella presente calcolo la potenza relativa ad una tale corrente.

1. Il Finzi [3] ha espresso la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica di un moto traslocircolatorio permanente che investa un ostacolo con punti cuspidali salienti sul contorno. Successivamente il Rosenblatt [4], sotto ipotesi, come osserva lo stesso A., molto late, trasformò il risultato del Finzi dando per la potenza una espressione più opportuna per il calcolo. Le ipotesi di validità della formula stabilita dal Rosenblatt consistono nella possibilità di uno sviluppo della forma

$$\frac{1}{\sqrt{z-z_0}}\left(\alpha_0+\alpha_1\sqrt{z-z_0}+\cdots\right)$$

per la velocità complessa w nei punti cuspidali salienti z_0.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) *Ancora una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. XI, fasc. 9, pp. 813-18 (1930).

(3) B. Finzi, *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. V, fasc. 9, pp. 666-70 (1927).

(4) A. Rosenblatt, *Sopra il flusso dell'energia nel caso eccezionale del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. VI, fasc. 10, pp. 404-6 (1927).

Sotto tali ipotesi, che per il caso considerato sono sodisfatte, avendo l'ostacolo un solo punto cuspidale, la formula del Rosenblatt si scrive:

$$(1) \qquad \frac{dT}{dt} = -\rho\pi R(\alpha_0^2 \bar{\alpha}_1) \quad , \qquad R \text{ « } \textit{parte reale} \text{ »}$$

dove ρ è la densità ed $\bar{\alpha}_1$ il coniugato di α_1.

2. Nel mio caso, poichè si ha [1]

$$w = \left\{ \frac{1}{2} V \left[e^{-i\beta} - \frac{(1+\varepsilon)^2 l^2}{\zeta^2} e^{i\beta} \right] + \frac{C}{2\pi i \zeta} \right\} \frac{2(\zeta - \varepsilon l)^2}{[\zeta - (\varepsilon - 1) l][\zeta - (\varepsilon + 1) l]} ;$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - \varepsilon l + \frac{l^2}{\zeta - \varepsilon l}\right) \quad ; \quad z_0 = l \quad ; \quad z - z_0 = \frac{[\zeta - (\varepsilon + 1) l]^2}{2(\zeta - \varepsilon l)},$$

risulta

$$w = \frac{1}{\sqrt{z - z_0}} \left\{ \frac{1}{2} V \left[e^{-i\beta} - \frac{(1+\varepsilon)^2 l^2}{\zeta^2} e^{i\beta} \right] + \frac{C}{2\pi i \zeta} \right\} \frac{\sqrt{2}(\zeta - \varepsilon l)^2}{\zeta - (\varepsilon - 1) l} .$$

Si denoti con F la funzione che moltiplica $\frac{1}{\sqrt{z - z_0}}$ e si ponga $\sqrt{z - z_0} = z^*$; ne segue:

$$\alpha_0 = (F)_{z^*=0} = -\left\{ V \operatorname{sen} \beta + \frac{C}{2\pi(1+\varepsilon) l} \right\} \sqrt{\frac{l}{2}}\, i .$$

Per l'espressione di α_1 si ha allora:

$$\alpha_1 = \left(\frac{dF}{dz^*}\right)_{z^*=0} = \left\{ \frac{dF}{d\zeta} : \left(\frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{dz^*}{dz} \right) \right\}_{z^*=0} .$$

Ma è:

$$\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)_{z^*=0} = \frac{1}{(1+\varepsilon) l}\left(\varepsilon \alpha_0 + V \sqrt{\frac{l}{2}} \cos\beta\right) \quad ; \quad \left(\frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{dz^*}{dz}\right)_{z^*=0} = \frac{1}{\sqrt{2l}}$$

pèrciò risulta

$$\alpha_1 = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(V \cos\beta + \sqrt{\frac{2}{l}}\, \varepsilon \alpha_0\right).$$

Sostituendo nella (1) i valori trovati di α_0 ed α_1 si ha in fine:

$$(2) \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \pi \rho l V \cos\beta \left\{ V \operatorname{sen} \beta + \frac{C}{2\pi(1+\varepsilon) l} \right\}^2 .$$

(1) Loc. cit. in nota 2, p. 866.

L'espressione che moltiplica $\frac{1}{(1+\varepsilon)}$ è la resistenza diretta incontrata dall'ostacolo, supposto di far muovere questo nel senso opposto a quello della corrente investitrice [1].

Risulta pertanto che alla (2) si può dare la forma

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{1+\varepsilon} V R_t .$$

3. Analogamente a quanto si verifica in altri casi di eccezione del teorema di Kutta–Joukowski [2], la potenza atta a mantenere la corrente traslocircolatoria considerata risulta eguale alla somma della potenza VR_t necessaria a far muovere l'ostacolo in seno alla corrente nel senso opposto a quello della velocità asintotica V, e di una potenza *complementare*

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} V R_t .$$

Nel caso di Joukowski (moto regolare, velocità finita nella cuspide) risulta, come doveva essere, nulla la potenza, poichè allora è $R_t = 0$.

Nel caso limite in cui $\varepsilon = 0$ (l'ostacolo si riduce alla lamina rettilinea considerata come limite di un contorno con *un solo* punto cuspidale) si annulla la potenza complementare.

(1) Cfr. la prima delle (7) della mia Nota cit. cui ora si deve mutare il segno, supponendo l'ostacolo mobile. Colgo qui l'occasione per rettificare l'asserto fatto allora, cioè che R_t costituisce *sempre* una forza di risucchio: R_t è tale soltanto quando la cuspide si trova a valle della corrente (β acuto).

(2) Cfr. ad es. B. Finzi, *Potenza relativa ad una corrente traslocircolatoria in cui è immersa una lamina arcuata*, questi « Rendiconti », vol. XI, fasc. 4, pp. 395–399 (1930).

Meccanica (Idromeccanica). — *Vortice in un campo limitato da un cardioide.* Nota di B. Caldonazzo, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

La presenza di cuspidi salienti sulle pareti rigide bagnate da un liquido perfetto che si muove di moto piano porta in generale un contributo alle azioni dinamiche esercitate sulle pareti stesse. Sono noti alcuni casi notevoli in cui i punti cuspidali sono presentati dal profilo di un ostacolo rigido investito da una corrente piana traslocircolatoria [2]. In questa Nota credo di portare un contributo alla questione trattando un primo caso, notevolmente semplice, di problema interno, in cui cioè il moto piano avviene entro un campo semplicemente connesso. Limitandomi ai moti irrotazionali, il moto necessariamente è ciclico. Precisamente considero il moto provocato da un vortice isolato libero nel campo limitato da una cardioide, che presenta appunto una cuspide saliente rispetto al campo del moto. In un altro lavoro [3] mi sono occupato di questi moti per campi generici, ma a contorno regolare. In particolare ho considerato campi limitati da una lumaca di Pascal, senza cappio, di cui la cardioide della quale ora mi occupo può considerarsi caso limite. Sfruttando i risultati stabiliti allora posso determinare facilmente tutti gli elementi cinematici, ed in particolare il moto del vortice, e la risultante ed il momento risultante delle azioni dinamiche esercitate sulla cardioide. La risultante, che sarebbe nulla su un contorno regolare, per la presenza della cuspide è sempre diversa da zero, diretta secondo la tangente nella cuspide e rivolta all'esterno del campo. Quanto al momento la cuspide non vi porta alcun contributo quando il centro di riduzione è sul diametro della cardioide e sparisce quando il vortice si trova sul diametro stesso.

Se poi il vortice si trova sul diametro a quattro noni a partire dalla cuspide esso rimane fermo, cosicchè il moto del liquido risulta stazionario.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) U. Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi «Rend.», vol. V, 1° sem., 1927, pp. 16–21; *Azioni dinamiche di correnti traslocircolatorie intorno ad una lastra arcuata*, questi «Rend.», vol. XI, 1° sem., 1930, pp. 335–343. A. Consiglio, *Ancora una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi «Rend.», vol. XI, 1° sem. 1930, pp. 813–818. Cfr. H. Villat, *Mécanique des Fluides (Cours de l'École Nationale Supérieure d'Aéronautique)*, Ch. IV (Paris, Gauthier-Villars, 1930).

(3) *Sui moti liquidi piani con un vortice libero*, in corso di stampa nei «Rend. del Circ. Mat. di Palermo». Citando formule di questo lavoro le segnerò con la lettera *m*.

Si potrebbe realizzare sperimentalmente un moto al quale, almeno schematicamente, corrisponde questo caso stazionario. Poichè la risultante teorica delle azioni dinamiche risulta dovuta *esclusivamente* alla cuspide, si avrebbe così la possibilità di un controllo sperimentale sulla esistenza di detta risultante.

1. *Il campo del moto e sua rappresentazione sopra un cerchio.* – Il campo S del moto è la regione interna alla cardioide

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a(2\cos\sigma + \cos 2\sigma), \\ y = a(2\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen} 2\sigma), \end{cases}$$

dove a, reale e positivo, è il raggio della circonferenza base della cardioide. La relazione (cfr. con la $(35m)$ per $\dot{a}_1 = 2a_2 = 2a$)

$$(2)\qquad z = a(2 + \zeta)\zeta$$

fa corrispondere in modo biunivoco i punti del cerchio Γ del piano ζ interni alla circonferenza $|\zeta| = 1$ ai punti interni di S ed i punti della circonferenza ai punti della cardioide. Infatti basta rilevare che per $\zeta = e^{i\sigma}$ dalla (2) scendono immediatamente le (1) e che per $\zeta = 0$ si ha $z = 0$. La cardioide ha la cuspide nel punto $x = -a, y = 0$, cui corrisponde $\zeta = -1$. Corrispondentemente

$$(3)\qquad dz = 2a(\zeta + 1)\,d\zeta,$$

si annulla di primo ordine nella cuspide. Al diametro del cerchio rappresentativo Γ corrisponde il diametro $-a \leqq x \leqq 3a$ della cardioide, sull'asse reale, che è asse di simmetria per S.

2. *Moto provocato da un vortice.* – Il moto liquido piano in S sia dovuto ad un vortice isolato libero, di circolazione C, la cui posizione istantanea indichiamo con z_0. La velocità del liquido in un generico punto z, sotto forma complessa e per il tramite di $\zeta(10m)$, è data da

$$(4)\qquad w = \frac{C}{4\pi i a}\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta - \zeta_1}\right)\frac{1}{\zeta + 1},$$

dove $\zeta_0 = \rho_0 e^{i\sigma_0}$ è l'immagine di z_0 e $\zeta_1 = \frac{1}{\rho_0} e^{i\sigma_0}$ è l'immagine coniugata, sul piano ζ, di ζ_0 rispetto alla circonferenza $|\zeta| = 1$. La velocità con cui si sposta il vortice è $(11m)$

$$(5)\qquad w_0 = \frac{C}{8\pi i a}\left(\frac{2\zeta_0}{1 - \rho_0^2} - \frac{1}{\zeta_0 + 1}\right)\frac{1}{\zeta_0 + 1},$$

cui compete la funzione di corrente (12 *m*)

$$\psi_0 = \frac{C}{4\pi} \log \{(1 - \rho_0^2) \mid \zeta_0 + 1 \mid\},$$

cosicchè

$$(1 - \rho_0^2) \mid \zeta_0 + 1 \mid = K, \tag{6}$$

K costante positiva, per mezzo della (2) e limitatamente a $0 < K \leq 32/27$, definisce le possibili traiettorie del vortice. Si tratta di linee simmetriche rispetto all'asse reale, chiuse attorno al punto $x = 7a/9$, ($\zeta = 1/3$) del diametro della cardioide. Per il valore massimo di K, assunto proprio in detto punto, la traiettoria si contrae nel punto stesso, dove (e a conferma la (5) vi diventa $w_0 = 0$) il vortice ha una posizione di *arresto stabile*. Quindi localizzando il vortice in questa posizione il moto del liquido risulta *stazionario*.

3. *Risultante delle azioni dinamiche.* – La risultante delle azioni dinamiche esercitate sulla cardioide si compone di due parti, una dovuta all'energia cinetica, l'altra alla circostanza che il moto è in generale variabile. Con manifesto significato dei simboli la prima parte è data dalla formula di Blasius

$$R_{1y} + iR_{1x} = \frac{\rho}{2} \int w^2 dz,$$

(ρ densità del liquido), la seconda parte è data dalla formula (16 *m*)

$$R_{2y} - iR_{2x} = -\rho \frac{d}{dt} \int z w dz,$$

entrambi gli integrali essendo estesi alla cardioide percorsa nel senso antiorario. Come risulta dalla (4) la w ha un polo interno nel vortice ed uno sul contorno nella cuspide. Però la funzione integranda del secondo integrale è regolare nella cuspide perchè lo zero del dz secondo la (3) fa sparire la singolarità portatavi da w. Se il contorno non presentasse la cuspide il contributo complessivo recato alla risultante dai due integrali sarebbe nullo, come ho dimostrato nel caso generale. Perciò la risultante nel caso attuale è dovuta esclusivamente alla cuspide e precisamente ci sarà fornita dalla formula di Blasius per la sola parte dovuta al semiresiduo relativo alla cuspide. È facile riconoscere, tenendo conto di (3) e (4), che il residuo della prima funzione integranda relativa alla cuspide è

$$\frac{\rho}{4a} \left\{ \frac{C}{2\pi i} \left[\frac{1}{-1 - \zeta_0} - \frac{1}{-1 - \zeta_1} \right] \right\}^2 = \frac{\rho}{4a} W^2, \tag{7}$$

dove W si può interpretare come la velocità nel punto $\zeta = -1$, corrispondente sul contorno di Γ alla cuspide, dovuta al moto che un vortice di circolazione C situato in ζ_0 provocherebbe in Γ. Un semplice calcolo, tenuto conto di (6), fornisce

$$W = -\frac{C}{2\pi i}\frac{K}{|\zeta_0 + 1|^3}.$$

D'altra parte per (2) la distanza r del vortice dalla cuspide è

$$r = |z_0 + a| = a|\zeta_0 + 1|^2,$$

per cui si può scrivere

$$W = -\frac{KC}{2\pi i}\sqrt{\frac{a}{r}^3}. \tag{8}$$

Sostituendo in (7) e moltiplicando per $2\pi i$ si ottiene la risultante richiesta. Mettendone in evidenza le componenti si ha

$$R_x = -\frac{\rho K^2 C^2 a^2}{16\pi r^3}, \quad R_y = 0. \tag{9}$$

Quindi *la risultante è diretta secondo le x negative*, vale a dire *secondo la tangente nella cuspide rivolta all'esterno del campo ed è inversamente proporzionale al cubo della distanza del vortice dalla cuspide.*

4. *Momento risultante.* – Fissato quale centro di riduzione l'origine $z = 0$, per valutare il momento M si presentano circostanze analoghe a quelle incontrate per la risultante. Precisamente M si compone di una parte che esiste indipendentemente dalla cuspide, parte già valutata in sostanza nel mio citato lavoro, $(36m)$ facendovi $a_1 = 2a$, $a_2 = a$,

$$M = \rho C \Re\left\{z_0 - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + a\bar{z}_0}}\right\} w_0, \qquad \Re \text{ «parte reale»},$$

e di una parte dovuta alla singolarità nella cuspide recata dalla formula di Blasius per il momento. Un facile calcolo, tenuti presenti (7) e (8) fornisce per questa parte

$$-\frac{1}{4}\rho C \Re \pi i W^2 = 0.$$

Il momento rimane quindi quello stesso valutato sopra. Come ho già rilevato nel citato lavoro, i momenti M relativi a due posizioni del vortice simmetriche rispetto all'asse reale sono eguali e contrari. In particolare si ha $M = 0$ quando il vortice è sull'asse reale.

5. *Caso stazionario.* – In questo caso, che si verifica per $\zeta_0 = 1/3$, cioè quando il vortice è sul diametro in $x = 7a/9$ e quindi alla distanza $r = 16a/9$ dalla cuspide, pari ai 4/9 del diametro, si ha $K = 32/27$ e per conseguenza dalla (9)

$$R_x = -\frac{\rho C^2}{64\pi a}.$$

La resistenza è quindi inversamente proporzionale ad a, per cui al crescere delle dimensioni del campo essa tende a zero.

Notando che in punti sufficientemente vicini al vortice l'andamento dei filetti è circolare, del caso stazionario si può realizzare un modello nel seguente modo. Un recipiente cilindrico avente per sezione normale la nostra cardioide, a generatrici verticali e fondo orizzontale è riempito d'acqua fino ad una certa altezza. Un cilindro rigido rotondo, di raggio abbastanza piccolo, coll'asse verticale passante per i punti di arresto del vortice nelle singole sezioni, è fatto ruotare con velocità angolare costante ω intorno al suo asse. Dopo un certo tempo il liquido per naturale aderenza sul cilindro partecipa del moto di rotazione, acquistando un regime stazionario. Non sarà possibile realizzare naturalmente il caso teorico studiato, per ovvie ragioni, quali ad es. l'influenza del fondo e dello specchio libero, l'aderenza alle pareti del recipiente e l'impossibilità di una velocità infinita sulla generatrice cuspidale. È lecito però presumere il manifestarsi di irregolarità del moto in vicinanza di questa generatrice, irregolarità che si possono pensare corrispondano almeno qualitativamente alle singolarità del moto studiato.

Ad ogni modo non deve essere difficile controllare sperimentalmente se esiste una resistenza dell'ordine di quella prevista teoricamente. Per avere una idea sull'ordine di grandezza della R_x teorica fissiamo ad es. $a = 10$ cm e quindi 40 cm sarà il diametro della cardioide. Il cilindretto rotante abbia il raggio di un cm e faccia 10 giri al secondo. Supposta buona l'aderenza, si dovrebbe avere su di esso sensibilmente

$$20\,\pi \text{ cm sec}^{-1} \doteq C/2\,\pi \text{ cm},$$

da cui segue $C = 40\,\pi^2 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$. Trattandosi di acqua si può assumere $\rho = 1 \text{ gr cm}^{-3}$. Sostituendo si troverebbe in valore assoluto una resistenza di $25\,\pi^3$ dine/cm, pari a circa 78 dine per ogni strato di un cm di spessore. Notisi che in base alla (4) in prossimità dell'estremo del diametro opposto alla cuspide la velocità di regime verrebbe ad avere il valore di π cm/sec, valore fisicamente plausibile e che potrebbe servire di controllo per il valore di C da cui si è partiti.

Astronomia (Astrofisica). — *Sulla grandezza assoluta delle Cefeidi.* Nota di G. Cecchini, presentata [1] dal Socio E. Bianchi.

1. È ben noto che la relazione empirica fra il logaritmo del periodo e la grandezza assoluta delle variabili Cefeidi (curva *periodo luminosità*), scoperta da Miss Leavitt per le stelle della piccola nube di Magellano, e stabilita da Shapley [2] in generale, costituisce il mezzo più potente oggi conosciuto per la determinazione delle distanze degli ammassi e delle nebulose che contengono Cefeidi: distanze di un tale ordine, che rendono illusoria qualunque determinazione diretta.

La generalità dell'andamento della curva periodo–luminosità appare stabilita con una certa sicurezza, ma non mancano obbiezioni: in corrispondenza del periodo di 10 g. sembra infatti esistere, secondo Schilt [3], una discontinuità e, inoltre, l'estensione dei risultati ottenuti per le Cefeidi galattiche a quelle extra-galattiche, rappresenta certo un'estrapolazione che richiede particolari cautele. La discontinuità della curva falserebbe le grandezze assolute assunte per le Cefeidi a lungo periodo, sulle quali principalmente è fondata la determinazione delle distanze delle Galassie esterne; ma appare contestata da Shapley e Miss Payne [4], con mezzi spettroscopici, e da Gerasimovic [5], sulla base dei moti propri e delle velocità radiali.

La curva periodo-luminosità non apparirebbe, dunque, come una legge ristretta e di limitata applicazione.

Tuttavia il *punto zero* della curva è stato ed è oggetto di delicate discussioni, le quali sostanzialmente si accordano per ritenere troppo brillanti le grandezze assolute concluse da Shapley e, conseguentemente, troppo grandi le distanze calcolate dalla curva periodo–luminosità.

2. Il punto zero è in generale determinato dalla parallasse media delle Cefeidi galattiche, mediante il moto parallattico. L'incertezza dei moti, piccolissimi ed affetti da errori proporzionalmente grandi, l'incertezza con cui può essere determinata la velocità solare e il numero limitatissimo di stelle che è possibile di prendere in considerazione, non hanno potuto dare, nelle preliminari conclusioni di Shapley, che risultati suscettibili di modificazioni sensibili, specie ai fini di un sondaggio dell'Universo.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) « M. Wilson Contr. », 151; « Aph. Journ. », *48*, 89, 1918; « Harvard Circ. », 280, 1922.

(3) « M. Wilson Contr. », 315; « Aph. Journ. », *64*, 149, 1926; « Astron. Journ. », *38*, 197, 1928.

(4) « Harvard Bull. », 872, 1930.

(5) « Astron. Journ. », *41*, 17, 1931.

Wilson [1], dalla considerazione dei moti di 70 Cefeidi, ha tratto la conclusione della necessità di una riduzione delle distanze secondo il rapporto da 0.71 a 0.77. Strömberg [2] ha trovato, per la velocità del Sole rispetto alle Cefeidi a lungo periodo, il valore di 12.3 km/sec, coll'effetto di ridurre del 40 % circa le distanze determinate da Shapley sulla base di 21.5 km/sec.

Con metodo indipendente, Malmquist [3] ha determinato le parallassi degli ammassi M 13 e M 3, servendosi del confronto fra la curva delle grandezze apparenti delle stelle in essi contenute, entro certi limiti di colore, e la curva delle grandezze assolute delle stelle colle stesse caratteristiche, nota all'autore per una ricerca diretta: le distanze che ne derivano sono circa i 7/10 di quelle calcolate da Shapley.

Una ulteriore elaborazione dei moti propri di 44 Cefeidi, distinte in due classi A e B, con periodo rispettivamente minore e maggiore di 10 g., ha condotto recentemente Gerasimovic [4] a ritenere più piccoli, rispetto all'analisi di Wilson, i moti angolari tangenziali; ma, in pari tempo, per ambedue le classi, le velocità radiali assegnerebbero un moto solare ridotto a 13 km/sec. Le parallassi medie ottenute, sia dal moto parallattico, sia dai moti peculiari, sono sostanzialmente identiche; e per il punto zero della curva periodo–luminosità risultano le correzioni + $1^m.1$ per la classe A e + $1.^m2$ per la classe B, con un'incertezza stimata attorno a $0^m.2$.

Quasi contemporaneamente, Kipper [5] è giunto a confermare le precedenti conclusioni, con una suggestiva ricerca. Le variazioni della velocità radiale, della grandezza apparente e del colore di alcune Cefeidi brillanti, sono studiate alla luce della teoria di Eddington, che, in base al suggerimento di Shapley, considera le Cefeidi come stelle pulsanti. Se la stella irradia come un corpo nero, è possibile determinare il suo raggio r in funzione della grandezza apparente m e dell'indice di colore i, mediante la formula di Russell:

$$(1) \qquad \log r'' = 0.82\, i - 0.20\, m - \text{costante}.$$

È quindi possibile determinare le variazioni del raggio della stella: in secondi d'arco, mediante la (1), e in misura lineare dallo studio delle variazioni della velocità radiale. Kipper trova così, per ogni stella considerata, la parallasse e quindi la grandezza assoluta, che risulta, in media, e con buone conferme individuali, più debole di circa + $1^m.3$ di quella calcolabile dalla curva di Shapley. Ad alterare il valore concluso concorre qualche incertezza della costante che figura in (1); ma, tenuto conto dell'insieme delle ricerche ricordate, la correzione di oltre 1 grandezza per il punto zero della

(1) « Astron. Journ. », *35*, 35, 1923.
(2) « M. Wilson Contr. », 293; « Aph. Journ. », *61*, 363, 1925.
(3) « Lund Medd. », S. I., n. 113, 1926.
(4) Loc. cit.
(5) « Astron. Nachr. », n. 5775, 1930.

curva di Shapley e la riduzione delle distanze secondo il fattore 0.6–0.7, appaiono decisamente stabilite.

3. Una conferma di questi risultati, sulla base del materiale parallattico, frutto dell'osservazione diretta, sarebbe altamente desiderabile e, ovviamente di grande importanza. Ho trattato perciò la questione sotto due punti di vista:

1) confrontando il sistema delle parallassi trigonometriche discusse in un mio precedente lavoro [1] col sistema delle Cefeidi;

2) deducendo dal moto ridotto, $H = m + 5 + 5 \log \mu$, e dalla classe spettrale media, la grandezza assoluta M delle Cefeidi più brillanti, mediante la relazione

$$M = x + y H \qquad (2)$$

discussa nella 2ª parte del lavoro ricordato, x e y essendo due coefficienti variabili colla classe spettrale (Henry Draper Catalogue), nel modo indicato dalla seguente tabella.

Classe	x	y
F 5	$-1^m.05$	+ 0.60
F 8	— 1 .20	+ 0.62
G 0	— 1 .25	+ 0.61
G 5	— 1 .40	+ 0.52

1) Nell'Introduzione al Catalogo Generale di Parallassi, che costituisce la base su cui è stata fondata la mia successiva ricerca sulla frequenza delle grandezze assolute, col mezzo ausiliario dei moti propri, la differenza fra il sistema dei parallassi concluso e quello di Shapley, per le Cefeidi, era risultata:

sistema trigonometrico – sistema Shapley = + 0″.0013 ± 0″.0021 *e. p.*

e, sebbene incerta, valorizzava il dubbio che le parallassi trigonometriche fossero in media in eccesso, anche tenuto conto di alcune negative. Occorre apprezzare qui specialmente l'influenza delle esclusioni che allora furono fatte. Tenendo conto di tutti i confronti delle varie fonti trigonometriche (nel sistema uniforme concluso) coi risultati di Shapley, si avrebbe,

sistema trigonometrico – sistema Shapley = — 0″.0024 ± 0″.0015,

e limitando l'esclusione alle Cefeidi indicate coi nn. 2502, 2733 e 3970 del mio Catalogo per le quali si hanno eccezionali valori negativi, risulta

sistema trigonometrico – sistema Shapley = + 0″.0002 ± 0″.0015.

Per ogni serie sono stati adottati i valori medi dell'*e. p.* appartenente a ciascun confronto e alle parallassi di Shapley è stato attribuito l'*e. p.* nullo; ma le differenze indicate non mutano sensibilmente assumendo invece, per ogni serie, l'*e. p.* indicato nella Tavola I del Catalogo.

(1) Ricerche sulla frequenza delle grandezze assolute delle stelle delle diverse classi spettrali, in «Pubbl. del R. Osser. Astron. di Merate», nn. 4 e 5, 1931.

Si vede chiaramente che, per la grande incertezza di cui sono affette le parallassi trigonometriche e per il limitato numero di confronti disponibili, gli errori accidentali gravitano sulle differenze stesse in modo che nessuna conclusione può essere tratta, da un punto di vista rigoroso.

2) I valori di x e di y precedentemente indicati sono stati dedotti, per opportune associazioni di classi spettrali, dall'insieme del materiale trigonometrico–dinamico disponibile e su di essi l'effetto degli errori accidentali delle parallassi è largamente ridotto. Per le stelle giganti, peraltro, la relazione fra la grandezza assoluta e il moto ridotto è stata studiata col contributo quasi esclusivo delle stelle apparentemente più brillanti: per questo motivo la determinazione statistica delle grandezze assolute – e delle parallassi – delle Cefeidi, deve di necessità limitarsi alle stelle più brillanti.

I risultati sono esposti nella seguente Tabella, nella quale figurano ordinatamente: il nome della stella; il suo moto totale μ, come risulta dal mio Catalogo; la grandezza apparente visuale media $\bar{m}$; il moto ridotto H; la classe spettrale nel sistema Draper; la grandezza assoluta M_C, calcolata colla (2); la grandezza assoluta M_S, secondo Shapley; la differenza $M_C - M_S$; la differenza analoga $M_K - M_S$, M_K essendo la grandezza assoluta determinata da Kipper e, infine, la parallasse π_S indicata da Shapley e la parallasse π_C calcolata mediante la formula

$$\log \pi_C = (M_C - m - 5) : 5 .$$

*	μ	$\bar{m}$	H	Classe	M_C	M_S	$M_C - M_S$	$M_K - M_S$	π_S	π_C
					m	m	m			
α U Mi	0″.043	2.3	0.5	F8	— 0.9	— 1.7	+ 0.8	—	0″.016	0″.023
S U Cas	.017	6.1	2.2	F5	+ 0.3	— 1.0	+ 1.3	+ 1.4	.0038	.0069
R T Aur	.023	5.3	2.1	Go	0.0	— 1.8	+ 1.8	+ 0.9	.0038	.0087
X Sgr	.018	4.7	1.0	F5-Go	— 0.6	— 2.6	+ 2.0	+ 1.3	.0035	.0087
W Sgr	.011	4.7	— 0.1	F8p	— 1.3	— 2.7	+ 1.4	+ 1.5	.0033	.0063
Y Sgr	.022	5.8	2.5	F5p	+ 0.4	— 2.3	+ 2.7	+ 1.5	.0024	.0083
η Aql	.015	4.1	0.0	Gop	— 1.3	— 2.6	+ 1.3	+ 1.5	.0046	.0083
S Sgr	.008	5.8	0.3	Gop	— 1.1	— 2.9	+ 1.8	+ 1.2	.0018	.0042
T Vul	.019	6.0	2.4	F8p	+ 0.3	— 1.8	+ 2.1	+ 1.4	.0028	.0073
δ Cep	.014	4.2	— 0.1	Go	— 1.3	— 2.1	+ 0.8	+ 1.4	.0054	.0079
						Medie	+ 1.6	+ 1.35	0″.0047	0″.0090

Non è evidentemente possibile che la relazione (2), utilizzata nel calcolo indicato, dia grandezze assolute – e quindi parallassi – individualmente corrette; pure, la media delle $M_C - M_S$, + 1^m.6, che rappresenterebbe la correzione del punto zero della curva di Shapley, deriva da valori relativamente concordanti.

La media conclusa è in leggero eccesso su quella derivata dai calcoli di Kipper, + 1^m.35, ed ancor più rispetto alla correzione media + 1^m.1 derivata dalle ricerche ricordate: questa circostanza indicherebbe un certo eccesso delle parallassi su cui è stata rondata la determinazione dei coefficienti x e y. Ora, nel lavoro citato, ero giunto alla conclusione che, per la riduzione del sistema da me considerato al sistema statistico di Groninga, sarebbe stata necessaria una correzione di — 0^m.6 e di — 0^m.3 per le grandezze assolute delle stelle giganti F e G, rispettivamente. Applicando queste correzioni alle M_C indicate nella precedente Tabella, le Cefeidi F e G separatamente darebbero un'identica correzione media per il punto zero: + 1^m.1, invece di + 1^m.6; insieme, il fattore correttivo delle distanze di Shapley, derivato dai rapporti delle parallassi medie, risulterebbe 0.67, invece di 0.53.

Il valore risultante + 1^m.1 coincide colla media conclusa dalle ricerche precedenti. Non è certo il caso di sopravalutare coincidenze, eventualmente fortuite, di quantità in cui il decimo sfugge a qualunque investigazione, tanto più perchè è dubbio che il sistema di Groninga si possa considerare *assolutamente* corretto; ma l'accordo è senza dubbio interessante.

È necessario osservare che il calcolo effettuato dipende strettamente dai valori assunti per i moti: adottando, peraltro, i moti conclusi da Gerasimovic per le stesse stelle, ritenendoli più accurati, avremmo ottenuto qualche sensibile differenza individuale, ma *un'identica correzione per il punto zero.* Inoltre, i valori del moto ridotto avvertono che questi risultati non sono un'estrapolazione, ma solo un'applicazione di una relazione praticamente valida per le comuni stelle giganti.

4. *Concludendo*: anche il materiale parallattico proveniente dall'osservazione diretta, pure essendo di difficile trattazione, è atto a confermare, attraverso leggi valide per le stelle ordinarie, la necessità di una correzione sistematica delle grandezze assolute delle Cefeidi, determinate dalla curva periodo–luminosità. La correzione trovata per il punto zero è nel senso e dell'ordine stabiliti con mezzi diversi dai vari investigatori e fa ritenere che le distanze di ogni oggetto celeste, concluse sulla base della curva di Shapley, debbano essere praticamente ridotte secondo il fattore 0.6.

Geofisica (Oceanografia). — *Contributo alla conoscenza delle maree dell'Oceano artico.* Nota di M. Tenani, presentata [1] dal Socio L. De Marchi.

In una precedente Nota [2] ebbi occasione di verificare nel mare Adriatico l'applicabilità della teoria del canale; implicitamente venne ivi dimostrato come l'anfidromia da tempo osservata in quel mare trovi la sua completa spiegazione nell'azione deviatrice dovuta alla rotazione terrestre.

Esaminando poi le registrazioni di marea effettuate dalle nostre navi idrografiche nell'Egeo meridionale in questi ultimi anni, ebbi occasione [3] di mostrare come anche in quella regione si manifesti una evidente anfidromia sinistrorsa, conforme a quanto la suddetta causa lasciava facilmente prevedere.

Ciò ha permesso di ricondurre così a tale unica causa tutte le anfidromie note del nostro emisfero, presentantisi a latitudini sufficientemente elevate, ove quindi è sensibile la forza deviatrice dovuta alla rotazione terrestre; e di eliminare l'unica apparente eccezione a tale regola generale e cioè una presunta anfidromia destrorsa intorno all'isola di Creta [4]. Sembra dunque lecito tentare di estendere le stesse considerazioni ad altri mari meno noti e, specialmente, a quelli ove la forza deviatrice dovuta alla rotazione terrestre è più sensibile.

Nell'Artide, il materiale d'osservazione mareografico sebbene non sia molto abbondante e sufficiente per uno studio di dettaglio, pure permette già di tracciare con una certa sicurezza le linee generali del fenomeno di marea. L'esiguità delle forze newtoniane semidiurne di marea alle alte latitudini e la presenza di una netta anfidromia sinistrorsa semidiurna intorno a un punto centrale del bacino, hanno condotto lo Sterneck [5] a considerare le oscillazioni semidiurne di quel mare come onde stazionarie indotte e mantenute dai dislivelli che le maree dell'Oceano Atlantico producono all'ampia apertura di comunicazione tra i due bacini esistente tra lo Spitsbergen e la Groenlandia.

Sul bordo orientale di tale apertura, in occasione della permanenza allo Spitsbergen della Regia Nave *Città di Milano* nel giugno–luglio 1928, potei raccogliere a London (King's Bay) un'ottima registrazione mareografica che mi permise di sottoporre una serie di 59 giorni d'osservazione

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.
(2) Questi «Rendiconti», 6, X, pp. 68 e 178.
(3) «Comptes-Rendus», t. 191, p. 275.
(4) Fichot, «Ann. du Bureau des Long», 1924.
(5) «Ann. der Hydrogr. und M. M.», 1028, III.

all'analisi armonica coi seguenti risultati, che qui si pubblicano per la prima volta in modo completo:

	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1	M_4	MS_4
H cm	44.4	15.0	7.5	3.6	5.4	2.1	1.8	0.7	1.7
$\varkappa$	26	68	5	68	255	92	255	54	82

	L_2	$2N_2$	R_2	T_2	λ_2	μ_2	ν_2	J_1	M_1	OO_1
H cm	1,1	1.0	0.2	0.1	0.3	1.0	1.0	0.2	0.8	0.1
$\varkappa$	55	328	65	65	44	346	0	326	149	42

	Q_1	$2Q$	ρ_1
H cm	0.4	0.1	0.1
$\varkappa$	21	305	32

Naturalmente il periodo relativamente breve esaminato permette di assegnare con certezza i valori delle componenti armoniche contenuti nella prima riga e di assegnare soltanto valori approssimati ai valori delle altre componenti. Il loro calcolo o il loro apprezzamento è stato eseguito coi noti procedimenti indicati in P. Schureman, *A manual of harmonic analysis and prediction of tides*, 1924.

Il nuovo dato s'inquadra perfettamente fra quelli già noti e considerati dallo Sterneck.

Considerando il bacino artico come profondo e limitato all'intorno dalla linea batometrica dei 1000 metri continuata attraverso le parti ancora inesplorate, il periodo proprio delle oscillazioni longitudinali all'asse Spitsbergen – Stretto di Behring, fu a suo tempo calcolato [1] dallo stesso Sterneck, nella nota citata, in ore 9.25 e cioè di circa 0.75 del periodo di oscillazione delle onde semidiurne. In base a tale elemento, la teoria del canale permette di prevedere [2] che le oscillazioni longitudinali indotte dall'Atlantico presentino una linea nodale perpendicolare al detto asse e situata circa a metà del bacino. Per effetto della forza deviatrice terrestre si possono allora prevedere oscillazioni trasversali sfasate di un quarto del periodo rispetto alle longitudinali e aventi, a parità di distanza dall'asse longitudinale e dalla linea nodale, un'ampiezza presso a poco uguale a quella delle oscillazioni longitudinali: con ciò, tutto il mare diventa sede di una anfidromia sinistrorsa come quella che i dati ormai noti hanno permesso di mettere in rilievo.

(1) Vedi Krummel, *Handb. der Ozeanogr.*, 2ª ed., II, p. 162.
(2) Defant, *Dynamische Ozeanogr.*, 1929, p. 194.

Per analogia con le constatazioni sopra ricordate in mari chiusi comunicanti con mare a marea come l'Adriatico e l'Egeo, si è dunque condotti a spiegare completamente nel modo suddetto l'anfidromia constatata.

Questo modo di considerare i fatti osservati mi è sembrato, oltrechè una logica estensione dalle suddette conclusioni, anche suscettibile delle seguenti considerazioni: se nella zona ancora inesplorata esistesse un ampio bassofondo o addirittura una terra che impedisse la continuità del mare, e la lunghezza dei due bacini in cui esso risulterebbe diviso fosse quindi minore, il periodo d'oscillazione proprio di ciascun bacino risulterebbe assai inferiore a quello sopra calcolato: la linea nodale delle oscillazioni longitudinali prevedibile nel modo sopra citato verrebbe considerevolmente spostata [1] verso l'apertura Atlantica: l'anfidromia o non potrebbe svilupparsi o si svilupperebbe, per la causa sopra indicata, intorno a un punto situato lungi dal centro del mare, nella parte del bacino più prossima all'Europa: sull'estremità opposta del bacino dovrebbe inoltre aversi alta marea ad un istante molto prossimo a quello dell'alta marea di London, e cioè all'apertura Atlantica. Ciò però non è d'accordo coi risultati noti e sopra ricordati che conducono invece a ritenere che le due estremità del mare oscillino in opposizione di fase.

I fatti osservati sembrerebbero dunque condurre in tal modo a una nuova conferma delle idee a suo tempo espresse da F. Nansen, e già da altri sostenute (come ebbe a ricordare recentemente il prof. L. De Marchi nella sua commemorazione [2] del grande scomparso), sulla continuità del mare Artico, e non conciliarsi affatto con l'ipotesi, a suo tempo emessa da R. Harris, dell'esistenza di una vasta estensione di terra sconosciuta nella zona ancora inesplorata.

Fisica. – *Uno spettrografo magnetico per raggi* β *emessi da sostanze debolmente radioattive.* Nota di G. Occhialini, presentata dal Socio A. Garbasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedi nota precedente.
(2) Questi « Rendiconti », 6, XIII, p. 383.

Chimica. — *Sui composti dell'argento bivalente e dell'argento trivalente* [1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata [2] dal Corrisp. M. Betti.

In questi ultimi anni si è avuto un risveglio d'interesse per le forme superiori di combinazione dell'argento. Alcuni dei lavori [3] pubblicati recentemente su tale argomento presentano parecchi punti di contatto con una serie di ricerche [4] che io iniziai nel 1906, e ne confermano ed estendono i risultati. Ciò mi ha indotto a riprendere in esame alcuni punti della chimica dell'argento plurivalente. Le nuove esperienze che vengono riferite in questa Nota riguardano l'isomorfogenismo dell'argento bivalente col cadmio e la probabile esistenza di un sale dell'argento trivalente.

Sui composti complessi dell'argento bivalente. – La possibilità dell'esistenza di composti dell'argento bivalente, in cui l'argento facesse parte di ioni complessi, venne affermata per la prima volta da G. A. Barbieri nel 1907 studiando l'ossidazione del pirofosfato d'argento mediante persolfato potassico [5].

Nello stesso anno Bohuslav Brauner [6] ritenne di poter escludere l'esistenza della forma $\overset{II}{Ag}X_2$, ma nel 1911 essa venne posta definitivamente fuori di dubbio con la preparazione del persolfato di argenti–piridina $[\overset{II}{Ag}(C_5H_5N)_4]S_2O_8$ che G. A. Barbieri [7] ottenne in forma di bei cristalli aranciati, ossidando a freddo con persolfato di potassio una soluzione di nitrato d'argento e piridina. Un altro composto di argenti-piridina, il nitrato $[\overset{II}{Ag}(C_5H_5N)_4](NO_3)_2$ pure in cristalli aranciati venne ottenuto da G. A. Barbieri nel 1927, per via elettrolitica, ossidando all'anodo una soluzione concentrata di nitrato d'argento e piridina [8].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(3) C. Schall, W. Melzer «Zeitschr. f. Elektrochem.», *28*, 476 (1922); F. Jirsa, «Zeitschr. anorg. Chem.», *148*, 130 (1925); *158*, 33–61 (1926); D. M. Yost «J. Amer. Soc.», *48*, 161 (1926); W. Hieber, F. Mühlbauer «Berichte», *61*, 2149 (1928); G. T. Morgan, F. H. Burstall «J. Chem. Soc.», 2594 (1930).

(4) G. A. Barbieri, «Rend. Accad. Lincei» [5], XV, 1° sem. 500 (1906); [5], XVI, 2° sem. 72 (1907); «Gazz. Chim. Ital.», XLII, II, 1 (1912); «Rend. Accad. Lincei», [5], XXI, 1° sem., 560 (1912); [5], XXV, 1° sem., 42 (1916); «Berichte», LX, 2424–2428 (1927).

(5) «Rend. Accad. Lincei», 5, XVI, 1° sem., 73 (1907).

(6) B. Brauner, B. Kuzma «Berichte», XL, 3371 (1907).

(7) «Atti Reale Istituto Veneto», LXX, parte 2ª, 899 (1911); «Gazz. Chim. Ital.», XLII, II, 1 (1912).

(8) «Berichte», *60*, 2424 (1927).

Con metodo perfettamente analogo a quello ch'era stato seguito nella preparazione del persolfato di argenti–piridina, W. Hieber e F. Muhlbauer [1] hanno ottenuto nel 1928 il persolfato di argenti–o–fenantrolina

$$[\overset{II}{Ag}(C_{12}H_8N_2)_2]S_2O_8\,,$$

e G. T. Morgan e F. H. Burstall [2] nel 1930 il persolfato di argenti–αα–dipiridile $[\overset{II}{Ag}(C_{10}H_8N_2)_2]S_2O_8$. In questi composti due molecole di o–fenantrolina o di α·α·dipiridile, basi biacide e con valore di coordinazione eguale a due, tengono il posto di quattro molecole di piridina.

Per dimostrare che nel composto di argenti–o–fenantrolina l'argento è bivalente, Hieber e Muhlbauer ne hanno preparato i cristalli misti col corrispondente composto di cupri–o–fenantrolina $[Cu(C_{12}H_8N_2)_2]S_2O_8$.

Sedici anni prima, G. A. Barbieri [3] aveva già constatato che argento e rame bivalenti possono essere isomorfogeni, e aveva preparato e analizzato cristalli misti perfettamente omogenei del persolfato di argenti–piridina col persolfato di cupri–piridina $[Cu(C_5H_5N)_4]S_2O_8$. Agli Autori su ricordati deve essere sfuggito questo fatto perchè non ne fanno cenno.

Siccome il persolfato di cadmio–piridina [4] $[Cd(C_5H_5N)_4]S_2O_8$ forma cristalli misti in ogni rapporto col persolfato di cupri–piridina, ho voluto ricercare se anch'esso potesse formare cristalli misti col persolfato di argenti–piridina.

Se alla soluzione mista di un sale di argento e di un sale di cadmio si aggiunge piridina, e poi un eccesso di una soluzione satura a freddo di persolfato potassico, si produce dapprima una intensa colorazione rosso–aranciata, poi il liquido intorbida e forma un deposito cristallino giallo che, all'esame microscopico, risulta omogeneo e costituito da prismi riuniti in aggregati felciformi ed egualmente colorati in giallo. Il colore di questi cristalli è tanto più intenso quanto più argento, rispetto al cadmio, era contenuto nella soluzione di partenza.

Vennero sottoposti all'analisi quantitativa due preparati di cristalli misti seccati nel vuoto.

1° Preparato trovato °/₀ Ag 13.29 — Cd 4.44 — S 10.39 — N 9.17

calcolato [5] per $[Ag\ 0.76\ (Cd\ 0.24)\ (C_5H_5N)_4]S_2O_8$

°/₀ Ag 13.29 — Cd 4.37 — S 10.39 — N 9.08

(1) « Berichte », *61*, 2149 (1928).

(2) « J. Chem. Soc. », 2594 (1930).

(3) « Rend. Accad. Lincei », *5*, XXI, 1° sem., 560 (1912).

(4) G. A. Barbieri, F. Calzolari « Zeitschr. anorg. Chem. », *71*, 347 (1911).

(5) Per stabilire i calcolati si presero come base le percentuali trovate dello zolfo e dell'argento.

2° Preparato trovato °/₀ Ag 5.93 — Cd 12.11 — S 10.36 — N 9.25
calcolato per $[Ag\ 0.34\ (Cd\ 0.66)\ (C_5H_5N)_4]\ S_2O_8$
°/₀ Ag 5.93 — Cd 11.99 — S 10.36 — N 9.05

Anche il persolfato di argenti-fenantrolina forma cristalli misti col persolfato di cadmio–fenantrolina [1].

Sull'esistenza di composti AgX_3. È ormai pacifico che nei così detti perossidi-elettrolitici dell'argento, nei quali per ogni atomo di argento è contenuto più di un equivalente di ossigeno attivo (in generale da 1.4 a 1.6) una parte dell'argento è in forma di Ag_2O_3. Franz Jirsa [2] nell'introduzione ai suoi recenti lavori sugli ossidi superiori dell'argento, dichiara che l'esistenza degli ossidi $\overset{II}{Ag}O$ e $\overset{III}{Ag_2}O_3$ è *theoretisch begründet*, per la posizione che l'argento occupa nel sistema periodico, e si limita a citare a tale riguardo l'opinione di Mendelejeff e di Brauner, secondo la quale gli elementi rame, argento e oro, oltre che far parte del primo gruppo, appartengono al gruppo ottavo, ma dimentica di aggiungere che ciò non ha impedito al Mendelejeff [3] di ritenere gli ossidi superiori dell'argento veri perossidi analoghi ai perossidi alcalini, e al Brauner di negare per l'argento l'esistenza della forma bivalente. F. Jirsa avrebbe potuto anche aggiungere che il primo a trarre, dalla posizione occupata nel sistema periodico dall'argento, quelle deduzioni relative all'esistenza di forme superiori $\overset{II}{Ag}X_2$ e $\overset{III}{Ag}X_3$ che soltanto da alcuni anni sono state generalmente accettate, il primo a dimostrare erronea l'ostinata credenza che gli ossidi superiori dell'argento fossero veri perossidi (credenza [4] che si appoggiava oltre che sull'autorità grandissima di Mendelejeff, su certe esperienze di Berthélot [5] e di Mulder [6]), fu G. A. Barbieri nelle Note pubblicate nel 1906–1907. Era evidente che gli ossidi superiori dell'argento non si sarebbero potuti prendere in considerazione per stabilire la forma limite dell'argento, e non sarebbe stato legittimo compararli agli ossidi superiori del rame e dell'oro se fossero stati veri perossidi come i perossidi alcalini.

Per chiarirne la natura, G. A. Barbieri ne studiò il comportamento con svariati reattivi (acqua ossigenata, acido permanganico, solfato di titanio, sali manganosi, cerosi, cobaltosi), e mostrò che rassomigliavano al biossido di piombo, e non al perossido di bario o al perossido di sodio, e che quindi

(1) Hieber e Mühlbauer, loc. cit.

(2) « Zeitschr. anorg. Chem. », *148*. 130 (1925).

(3) « Principes de Chimie », Vol. II, 458.

(4) Un resto di tale credenza si ha nella formula Ag_2O_2 con la quale viene rappresentato dai più l'ossido dell'argento bivalente.

(5) « Annal. Chim. Phys. » [7] *23*, 52 (1901); Baeyer e Villiger « Berichte », *34*, 2769.

(6) « Rec. trav. Chim. », Pays Bas, *17*, 129-176 (1898).

non si potevano ascrivere al tipo dell'acqua ossigenata. A questa medesima conclusione è pervenuto nel 1926 anche un chimico americano D. M. Yost [1] in base alle stesse esperienze che G. A. Barbieri aveva eseguito venti anni prima. Evidentemente D. M. Yost non ha fatto un esame completo della bibliografia dell'argomento che aveva preso a trattare.

Se l'esistenza di Ag_2O_3 è ormai certa, nulla si conosce intorno ai corrispondenti sali $\overset{III}{Ag}X_3$ e perciò ritengo non prive di interesse le esperienze seguenti per la cui interpretazione bisogna, a mio parere, ammettere l'esistenza di $\overset{III}{Ag}(NO_3)_3$ nelle soluzioni degli ossidi superiori dell'argento nell'acido nitrico concentrato.

È noto da moltissimo tempo [2] che i così detti perossidi d'argento, in qualunque modo preparati, si sciolgono a freddo nell'acido nitrico concentrato con intensa colorazione nero–seppia. La soluzione è sempre accompagnata, anche a bassa temperatura, da parziale riduzione che si rende manifesta con una effervescenza dovuta a sviluppo di ossigeno. Le soluzioni nitriche nero–seppia hanno un potere ossidante estremamente energico: vengono scolorate istantaneamente dall'acqua ossigenata con forte sviluppo di ossigeno, ossidano a freddo i sali cobaltosi a cobaltici, i sali manganosi ad acido permanganico, l'acido jodico ad acido perjodico. F. Jirsa [3] ha recentemente riconosciuto che esse sono otticamente vuote, cioè non contengono alcuna sostanza in sospensione o allo stato colloidale. Sulla natura del composto che impartisce alle dette soluzioni un così intenso colore e un così energico potere ossidante, le opinioni sono state finora concordi. Siccome gli ossidi superiori dell'argento preparati per via elettrolitica, nei quali l'argento è in parte contenuto in forma di Ag_2O_3, per trattamento con acqua calda, perdono una parte del loro ossigeno attivo riducendosi ad AgO, si è pensato che anche nello sciogliersi nell'acido nitrico, gli ossidi superiori elettrolitici perdessero la parte più labile del loro ossigeno attivo trasformandosi in nitrato dell'argento bivalente $\overset{II}{Ag}(NO_3)_2$. L'interpretazione pareva pienamente confermata dal fatto che anche l'ossido dell'argento bivalente AgO, la cui individualità chimica è stata messa fuori di dubbio dalle analisi e dalle misure elettrometriche di F. Jirsa [4], dà con l'acido nitrico concentrato soluzioni nero–seppia identiche a quelle ottenute con gli ossidi elettrolitici contenenti Ag_2O_3.

Le soluzioni nitriche nero–seppia versate in un grande eccesso di acqua fredda si scolorano dando origine a un precipitato polveroso nero. È evidente che questa reazione, già descritta da Schönbein, è da interpretarsi

(1) « J. Amer. Soc. », *48*, 161 (1926).
(2) J. B. Schönbein, 1858, 189.
(3) « Zeitschr. anorg. Chem. », *158*, 52 (1926).
(4) « Zeitschr. anorg. Chem. », *148*, 138 (1925).

come una idrolisi: la polvere nera che si forma venne considerata anche recentemente [1] come AgO.

Ho voluto determinare quanto ossigeno attivo è contenuto per atomo di argento nell'ossido che si forma per idrolisi. Una soluzione al 4 %, in acido nitrico circa 10 N, del così detto perossido–nitrato di argento Ag_7NO_{11} ottenuto per elettrolisi di una soluzione concentrata di $AgNO_3$, venne diluita in venti volte il suo volume di acqua fredda, e il precipitato nero raccolto su filtro di amianto venne lavato alla pompa fino a scomparsa della reazione dell'argento nel filtrato.

Numerose determinazioni eseguite con vari metodi analitici (riduzione dell'ossido con acqua ossigenata, o con solfato ferroso, o con acido ossalico, e titolazione dell'eccesso del riducente con permanganato), diedero come risultato che nell'ossido ottenuto per idrolisi era contenuto, per atomo di argento, non un equivalente di ossigeno attivo com'era previsto per l'ossido AgO, ma equivalenti 1.5 — 1.6.

Ripetei le esperienze impiegando nella preparazione delle soluzioni nitriche nero–seppia, l'ossido AgO ottenuto per demolizione con acqua calda del perossido–nitrato elettrolitico Ag_7NO_{11} ed ebbi risultati del tutto identici ai precedenti: cioè partendo da un ossido in cui il rapporto O attivo: Ag, espresso in equivalenti, era eguale ad uno, si otteneva un ossido in cui il valore di detto rapporto si aggirava intorno a 1.6.

Pensai allora di esaminare il comportamento elettrochimico tanto degli ossidi impiegati per preparare le soluzioni nero-seppia, quanto dell'ossido che si forma nell'idrolisi. Vennero misurate le forze elettromotrici delle seguenti pile:

+ Pt, Ag_7NO_{11},	nNaOH | nNaOH, H_2, Pt —	= 1.57 volta
+ Pt, AgO,	nNaOH | nNaOH, H_2, Pt —	= 1.40 »
+ Pt, ossido d'idrolisi,	nNaOH | nNaOH, H_2, Pt —	= 1.57 »

La prima misura concorda coi risultati ottenuti da Luther e Pokorny [2]: la seconda con quelli ottenuti recentemente da F. Jirsa [3]: la terza sta in accordo coi risultati analitici su esposti e permette di concludere che dall'ossido dell'argento bivalente, caratterizzato dal suo contenuto in ossigeno attivo e dal suo comportamento elettrochimico, si ottiene per semplice soluzione in acido nitrico e successiva diluizione con acqua, un ossido in cui il contenuto in ossigeno attivo e il comportamento elettrochimico dimostrano la presenza di Ag_2O_3. Siccome non si può ammettere che la valenza del-

(1) F. Jirsa, «Zeitschr. anorg. Chem.», *158*, 54 (1926).
(2) «Zeitschr. anorg. Chem.», *57*, 303 (1908).
(3) «Zeitschr. anorg. Chem.», *148*, 138 (1925).

l'argento aumenti per effetto dell'idrolisi, bisogna supporre che l'innalzamento di valenza si produca quando l'AgO si scioglie nell'acido nitrico, e ciò potrebbe essere interpretato con la reazione:

$$2\,\overset{II}{Ag}O + 4\,HNO_3 = \overset{III}{Ag}(NO_3)_3 + \overset{I}{Ag}NO_3 + 2\,H_2O\,.$$

In una prossima Nota riferirò su altri fatti che stanno in accordo con questa interpretazione.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati.* – VIII: *Nuovi derivati 2–2′–bisostituiti del difenile*[1]. Nota di L. Mascarelli e D. Gatti, presentata[2] dal Socio N. Parravano.

Nel continuare le ricerche nella serie del difenile[3] ne abbiamo ora preparati alcuni nuovi derivati 2–2′-bisostituiti. Lo studio di questi venne da noi proseguito anzitutto perchè le prove intraprese nelle Note V e VI non erano ancora state sufficientemente portate avanti, poi perchè era nostra intenzione di riconfermare le proprietà di alcuni derivati da noi già preparati con processi che forse non davano sufficiente garanzia sulle vere posizioni in cui i sostituenti potevano essere entrati nella molecola del difenile, ed ancora perchè desideravamo controllare meglio l'andamento di alcune reazioni che, se procedono normalmente quando vengono applicate a derivati 4-4′- oppure 3-3′–bisostituiti, parevano aver andamento anormale o dare scarsissimo rendimento se applicate a derivati 2–2′–bisostituiti.

Dal riesame dei quattro processi da noi tentati[4] per preparare alcuni composti 2–2′-bisostituiti del difenile risultò che quello consistente nell'applicare la reazione diazoica al 2–2′-di-amino-difenile in modo da compiere la diazotazione di un solo gruppo aminico, continuò, nelle ulteriori prove, a darci risultati negativi, ragione per cui lo abbiamo abbandonato.

Quello consistente nell'azione del cloruro di tionile sui nitro-derivati e che si era mostrato utile nella preparazione dei corrispondenti cloro-derivati, poichè la sostituzione dei nitrogruppi con cloro avviene con facilità e praticamente senza formazione di prodotti secondarî quando, rispettando certe condizioni, si operi col 2-2′-di-nitro–difenile, non è stato suscettibile di estensione. La prova da noi fatta per ottenere 2–2′–di–bromo–difenile

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(3) Nota VII: «Gazz. Chim. It.», *61*, p. 320 (1931).

(4) Nota V: «Gazz. Chim. It.», *59*, p. 859 (1929).

(che doveva servire per altre ricerche) ricorrendo al bromuro di tionile fallì completamente (v. Parte sperimentale).

Quello della scomposizione col calore di alcuni sali di difenilenjodonio [1], che presumibilmente doveva dare origine a prodotti 2-2'-bisostituiti, ha dimostrato che tale processo è poco adatto per riuscire allo scopo e questo, sia perchè spesso la scomposizione è violenta e conduce alla carbonizzazione della sostanza oppure a materiale catramoso dal quale ben poco e talora praticamente nullo è il prodotto cristallizzabile che si può ricavare; sia perchè non si può essere sicuri che l'eventuale prodotto isolato contenga veramente i sostituenti nelle posizioni 2-2'.

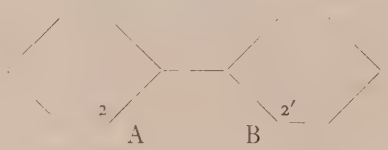
Il procedimento quindi che meritava di essere studiato più a fondo e che, come già nella Nota V dicevamo, pareva il più adatto a riuscire nell'intento, era quello di ottenere derivati 2–2'-bi–alogenati seguendo lo schema:

$$\begin{matrix} C_6H_4\cdot NO_2 & (2) \\ | & \\ C_6H_4\cdot NO_2 & (2') \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_6H_4\cdot NH_2 \\ | \\ C_6H_4\cdot NO_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_6H_4\cdot Alog \\ | \\ C_6H_4\cdot NO_2 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} C_6H_4\cdot Alog \\ | \\ C_6H_4\cdot NH_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_6H_4\cdot Alog & (2) \\ | & \\ C_6H_4\cdot Alog & (2') \end{matrix}$$

che non potè essere condotto a termine a causa della esigua quantità allora ottenuta di 2-nitro-2'–amino–derivati, i quali inoltre sono sostanze di difficile purificazione perchè si separano oleose dai solventi e non distillano senza alterarsi.

Con quest'ultimo processo abbiamo ora preparato i seguenti nuovi derivati che appartengono tutti al tipo:



2–nitro–2'–cloro–difenile p. f. 71° (dall'etere petrolico);
2–nitro–2'–bromo–difenile p. f. 66-67° (dall'etere petrolico);
2–nitro–2'–jodio–difenile p. f. 81–82° (dall'alcool di 60°) [2];
2–nitro–2'-idrossi-difenile (isolato sotto forma di acetilderivato) p. f. 102°;
2–amino–2'–cloro-difenile p. f. 56-57° dall'etere petrolico);
2–amino–2'–bromo–difenile p. f. 46-50° (circa);

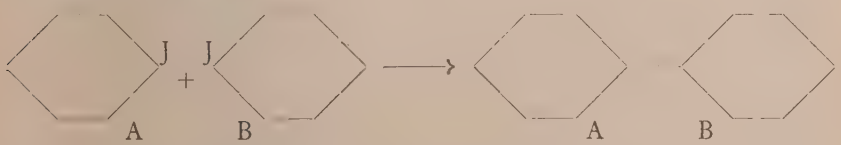
(1) Nota VI: « Gazz. Chim. It. », *59*, p. 870 (1929).
(2) Già è stato fatto cenno in « Atti del III Congresso Naz. di Chimica », 1929, p. 316.

2–amino–2′–jodio–difenile (isolato sotto forma di diacetilderivato) p. f. 129–130°;
2–cloro–2′–jodio–difenile p. f. 63–64° (dall'alcool di 95°);
2–cloro–2′–bromo–difenile p. f. 58° (dall'alcool di 95°);
2–jodio–2′–bromo–difenile p. f. 90° (dell'alcool di 95°).

Nella preparazione di questi prodotti abbiamo avuto anche occasione di riconfermare quanto già da noi venne fatto osservare (Note V e VI) che cioè la reazione di Sandmeyer dà il rendimento più scarso quando (tra i varî derivati del difenile) essa viene applicata ai 2–2′–bisostituiti. Anche Angeletti [1] ha notato in questo Laboratorio che risultati simili si ottengono applicando la medesima reazione al ditolile.

Se si eccettua il caso della scomposizione del prodotto diazoico con joduro di potassio, la quale, anche per i derivati 2–2′–bisostituiti, conduce con discreto rendimento ai corrispondenti jodioderivati, in tutti gli altri casi si formano contemporaneamente considerevoli quantità di prodotti peciosi o polverulenti, insolubili negli ordinarî solventi, che finora non abbiamo avuto tempo di esaminare a fondo. Per questo non abbiamo ancora ottenuto risultati soddisfacenti nelle prove di sostituzione del NH_2–gruppo con il CN–gruppo: anche la sostituzione del NH_2 con l'ossidrile (attraverso al diazogruppo) offre difficoltà, tuttavia siamo riusciti ad isolare sotto forma di acetilderivato il 2–nitro–2′–idrossi–difenile. La cosa è interessante poichè già Meisenheimer e Witt [2] non riuscirono ad isolare prodotti cristallizzabili dalle sostanze amorfe provenienti dalla decomposizione del 2–2′–bis–diazoderivato dell'α–dinaftile ed anche più tardi Corbellini e Debenedetti [3], nel ripetere la stessa decomposizione, osservarono una anomalia che ultimamente [4] spiegano in modo elegante.

Poichè nella serie dei derivati 2–2′–bisostituiti del difenile il rendimento della reazione di Sandmeyer (se si eccettua la jodurazione) è assai scarso, così abbiamo cercato di preparare alcuni dei sopra elencati prodotti facendo agire la polvere di rame (Naturkupfer) su miscele equimolecolari di opportuni derivati benzenici in modo da far avvenire la reazione di Ullmann [5] secondo lo schema:



(1) «Gazz. Chim. It.», *60*, p. 967 (1930).
(2) «Ber. d. Dtsch. Chem. Ges.», *36*, p. 4155 (1903).
(3) «Gazz. Chim. It.», *59*, p. 394 (1929).
(4) Corbellini e Barbaro, «Atti R. Acc. dei Lincei», XII, *b*, p. 445 (1930).
(5) «Ber. d. Dtsch. Chem. Ges.», *34*, p. 2176 (1901).

Sebbene in tal caso il rendimento non possa mai essere molto elevato perchè nella reazione il prodotto da noi cercato si forma sempre in miscela con gli altri due derivati prevedibili:

tuttavia, specialmente se si osservano certe norme trovate caso per caso, si riesce a prepararne alcuni con un rendimento superiore a quello avuto col processo anzidetto.

Le anomalie da noi osservate per varî derivati 2-2′-bisostituiti del difenile dipendono per la massima parte dalla relativa vicinanza dei due gruppi sostituenti che impartiscono al prodotto una spiccata tendenza a costituire un terzo nucleo eterociclico azotato (carbazolo, fenazone, fenazon–ossido) od ossigenato (ossido di difenilene) o jodurato (basi difenilenjodoniche), ma anche da altre cause che per ora a noi sfuggono.

Su questa grande tendenza che hanno i derivati 2–2′–bisostituiti a trasformarsi in sostanze aventi un terzo nucleo eterociclico ritorneremo in una prossima Nota.

Parte sperimentale [1]

Il *2–nitro–2′–amino–difenile*: $NO_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot NH_2$, prodotto di partenza, venne preparato dal 2–2′–di–nitro–difenile modificando lievemente il processo da noi dato nella Nota V per ottenere un maggior rendimento.

2–nitro–2′–cloro–difenile: $NO_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot Cl$. Dopo varie prove fatte, trovammo che il processo migliore per ottenere questo prodotto è quello di Dobbie, Fox e Gauge [2] che applicammo anche nella preparazione del corrispondente bromoderivato (v. dopo). Si formano contemporaneamente prodotti insolubili negli ordinarî solventi ed anche carbazolo. Il rendimento in nitro–cloro–difenile è però assai scarso.

Miglior risultato (25 °/₀ del teorico) ottenemmo facendo agire, in opportune circostanze, la polvere di rame (Naturkupfer) su una miscela equimolecolare di o-cloro-jodio-benzene e di o-nitro-benzene mantenuta a 210-225°.

Il 2–nitro–2′–cloro–difenile cristallizza dall'etere di petrolio in ammassi di prismi gialli, fondenti a 71°. (Analisi: trovato °/₀ N 6.28; calcolato 5.99).

2–nitro–2′–bromo–difenile: $NO_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot Br$. Anche per questo prodotto il procedimento che dà miglior rendimento, sebbene sempre assai scarso, è quello di scomporre il diazo–derivato del corrispondente nitro-

(1) Maggiori particolari verranno pubblicati in altro luogo.

(2) « Journ. Chem. Society » (London), *99*, p. 1615 (1911).

amino–difenile secondo le indicazioni di Dobbie (loc. cit.). Contemporaneamente si formano prodotti insolubili ed alquanto carbazolo; la eliminazione completa di queste impurezze richiede cure particolari.

Buon risultato (20 °/₀ del teorico) si ottiene applicando la reazione di Ullmann sulla miscela equimolecolare di o–nitro–jodio–benzene e di o–bromo–jodiobenzene. Per lenta evaporazione del solvente dalla soluzione di etere di petrolio (p. eb. 30–50°) si separano prismetti lievemente gialli, fondenti a 66-67°. (Analisi: trovato °/₀ N 5.09; calcolato 5.05).

2–nitro–2′–jodio–difenile: $NO_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot J$. Si ottiene con buon rendimento versando la soluzione del diazo–derivato corrispondente in una soluzione bollente di joduro di potassio resa acida con acido solforico (10 °/₀)[1]. Si forma contemporaneamente una sostanza polverulenta, di cui diremo in una prossima Nota. Si riesce, operando con etere ed usando cure particolari, ad asportare il nitro–jodio-difenile. Questo non distilla col vapor d'acqua; cristallizza dall'alcool di 60° in prismetti giallo–chiari, fondenti a 81–82°. (Analisi: trovato °/₀ N 4.36, °/₀ J 38.41; calcolato 4.31, 39.04).

2–nitro–2′–idrossi–difenile: $NO_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot OH$. Le prove fatte per ottenerlo dalla scomposizione del corrispondente diazoderivato hanno dato sempre sostanze peciose. Se però si compie la scomposizione secondo il processo brevettato (D. R. P. 95339; « Jrdl. » *4*, 124) allora, assieme a varî prodotti ed a sostanze peciose, si ottiene alquanta sostanza ossidrilata che può essere isolata solamente se la si trasforma in acetilderivato, il quale cristallizza dall'etere di petrolio (eb. 35-50°) in laminette bianche fondenti a 102° (Analisi: trovato °/₀ C 65.19, H 4.59; calcolato 65.34, 4.31)[2].

2–amino–2′–cloro–difenile: $NH_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot Cl$. Si ottiene con rendimento quasi quantitativo nella riduzione con stagno ed acido cloridrico del 2–nitro–2′-cloro–difenile; l'amino–cloro-difenile si isola per distillazione in corrente di vapor acqueo e si cristallizza dall'etere di petrolio (p. eb. 35–50°): cristalli bianchi, duri, disposti a rosetta, fondenti a 56–57°, imbruniscono alla luce. (Analisi: trovato °/₀ N 7.28, calcolato 6.89).

2–amino–2-bromo–difenile: $NH_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot Br$. Troppo scarso rendimento avemmo nel passaggio dal 2-nitro–2′-amino–difenile al corrispondente nitro–bromo–difenile (v. sopra) cosa che ci impedì in un primo tempo di ridurlo ad amino-bromo-derivato. Avendo però trovato modo di preparare per altra via il nitro–bromo–difenile lo abbiamo poi ridotto con stagno ed acido cloridrico. L'amino–bromo–difenile distilla col vapor d'acqua sotto forma di olio quasi senza colore, che a bassa temperatura solidifica (p. f. 46-50° circa).

2–amino–2′–jodio–difenile: $NH_2 \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot J$. Si ebbe facendo agire stagno e acido cloridrico sulla soluzione acquosa–alcoolica del corrispondente

(1) Gelmo, « Ber. d. Dtsch. Chem. Ges. », *39*, p. 4175 (1906).
(2) Mascarelli e Gatti, « Gazz. Chim. It. », *59*, p. 858. (1929).

nitro–jodio–composto. Siccome il prodotto non mostrava tendenza a solidificare, così venne acetilato. Il diacetilderivato cristallizza dall'etere di petrolio (p. eb. 70–80°) in prismetti bianchi, fondenti a 129–130°. (Analisi: trovato °/₀ J 33.51, 33.47; calcolato 33.48). Il prodotto greggio della riduzione facilmente, per joduratione, passa a 2–2′–di–jodio–difenile mentre si forma alquanta sostanza polverulenta insolubile negli ordinarî solventi.

2–cloro–2′–jodio–difenile: $Cl \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot J$. Preparato dal 2–amino–2′–cloro–difenile scomponendo con joduro di potassio il relativo diazo–derivato. Si origina contemporaneamente una piccola quantità di sostanza polverulenta, insolubile. Il prodotto, solubile in etere e distillabile in vapor d'acqua, cristallizza dall'alcool ordinario in prismi trasparenti, ben sviluppati, p. f. 63–64°. (Analisi: trovato °/₀ C 46.22, 45.57; H 3.22, 3.02; calcolato 45.81, 2.57). Poichè il prodotto che ottiensi dalla scomposizione del cloruro di difenilenjodonio [1] ha un p. di f. più elevato noi lo abbiamo ripreso in esame e potemmo accertarci che esso è costituito prevalentemente da 2–2′–di–jodio–difenile, dal quale si riesce ad eliminare le impurezze fortemente aderenti solo dopo numerose cristallizzazioni dall'alcool ordinario.

2–cloro–2′–bromo–difenile: $Cl \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot Br$. Si preparò dal 2–amino–2′–cloro–difenile con la reazione di Sandmeyer. Il rendimento è scarso. La sostanza distilla in corrente di vapor acqueo, cristallizza dall'alcool di 95° in aghi bianchi trasparenti, fondenti a 58°. (Analisi: trovato °/₀ C 53.68, H 3.39; calcolato 53.84, 3.02).

2–jodio–2′–bromo–difenile: $J \cdot C_6H_4C_6H_4 \cdot Br$. Si ottenne con buon rendimento nella joduratione del 2–amino–2′–bromo–difenile: anche in questo caso si origina una piccola quantità di sostanza polverulenta insolubile. Purificate in corrente di vapor acqueo e cristallizzato dall'alcool ordinario, fonde a 90°. Il prodotto da noi avuto [2] per scomposizione del bromuro di difenilenjodonio fonde a 91.5°.

Appendice.

Azione del bromuro di tionile sul 2–2′–di–nitro–difenile. Si sa che il cloruro di tionile può agire sui nitro-derivati del difenile [3] per sostituirvi il cloro al nitro gruppo: speravamo di ottenere alcuni derivati bromurati, di difficile preparazione, sostituendo il cloruro di tionile con il relativo bromuro. Il bromuro di tionile venne da noi preparato, secondo quanto dicono Mayes e Partington [4], facendo passare una corrente di acido bromidrico attraverso al cloruro di tionile contenuto in una boccia munita di refrige-

(1) Mascarelli e Gatti, « Gazz. Chim. It. », *59*, p. 873 (1929).

(2) « Gazz. Chim. It. », *59*, p. 873 (1929).

(3) Raudnitz, « Ber. d. deut. ch. Ges. », *60*, p. 738 (1927); Mascarelli e Gatti, Nota VI: « Gazz. Chim. It. », *59*, p. 868 (1929).

(4) « Journ. Chem. Soc. » (London) 1926, p. 2594.

rante a ricadere. A freddo però la reazione praticamente non avviene, invece si compie abbastanza facilmente se si scalda il cloruro di tionile, conformemente a quanto dice Besson [1], e se si fa passare il gas acido bromidrico per due o tre giorni: pare che piccole quantità di bromo catalizzino favorevolmente il processo. Il prodotto della reazione venne ripetutamente distillato a pressione ridotta (in apparecchio speciale) fino ad avere una frazione lievemente rossa, bollente a 58–60° a 40 mm.

Gr. 4 di 2-2'-di-nitro-difenile e cc. 8 di bromuro di tionile, saldati in tubo, vennero scaldati a 180–200° per 9–10 ore: il prodotto della reazione è una massa nerastra semisolida che, versata in acqua, alcalinizzata con idrossido di sodio e distillata in corrente di vapor acqueo, non diede sostanza distillabile in queste condizioni (il 2–2'-di-bromo-difenile distilla col vapore). Ripetute altre prove, variando la temperatura e la durata della operazione, diedero sempre prodotto pecioso da cui non fu possibile avere sostanza cristallina.

Ringraziamo vivamente il dr. B. Longo per le analisi da lui eseguite

Biologia. — *La conservazione e la produttività dei semi del grano. Predeterminazione funzionale.* Nota di G. Tallarico presentata [2] dal Socio N. Parravano.

La cariosside di grano matura, allo stato di riposo, contiene un embrione che sebbene dotato di vita minimale pure non ha completamente sospeso le sue funzioni vitali; è un individuo in letargo, che ha, sì, ridotto al minimo i suoi bisogni metabolici, ma che è sempre un organismo vivente e respirante, quindi soggetto alle comuni leggi che regolano la respirazione e gli ordinarii effetti biologici di essa e dei suoi prodotti.

Questa considerazione è stata alquanto trascurata dalla comune pratica agricola, anzi, in molti casi essa è stata sviata e interpretata in modo unilaterale con rilevante danno alla capacità produttiva del seme, sia nelle regioni in cui l'agricoltura in genere, e la granicoltura in ispecie, si svolgono in condizioni di umidità che eleva la dotazione idrica delle cariossidi destinate alla riproduzione; sia in condizioni in cui la conservabilità di queste cariossidi avviene tutta durante il periodo di tempo caratteristico per l'altezze termometriche.

È noto che in un seme si possono avere due specie di respirazioni: quella diretta od esterna, e quella indiretta o intramolecolare. Nella prima è utilizzato l'ossigeno atmosferico, nella seconda questo elemento è ricavato dai componenti ossigenati che costituiscono la cariosside. Tanto nell'una

(1) « Compt. Rendus », 122, p. 320 (1896)
(2) Nella seduta del 5 giugno 1931.

che nell'altra si hanno come prodotti respiratori acido carbonico, acqua e calore, ottenuti dalle trasformazioni chimiche operatesi nel contenuto della cariosside. Ed è appunto l'acido carbonico, prodotto dalla respirazione diretta che non potendo in alcuni casi essere eliminato, ed accumulandosi fino a costituire l'intero ambiente esterno della cariosside determina la respirazione intramolecolare la quale è caratteristica ancora perchè produce sostanze nocive alla vita stessa dell'embrione. Oltre a questo lato tossico del fenomeno respiratorio bisogna considerare che tutti i prodotti della respirazione si sono ottenuti con sacrificio o di parti costitutive dello stesso embrione o intaccando le riserve alimentari indispensabili allo sviluppo della futura pianta. Non solo, ma, da recenti studi sulla biologia dei semi si è messo in chiaro l'intimo rapporto esistente tra la conservazione dell'energia vitale dell'embrione e la interezza, profondità e durata (fino ad un certo punto) del riposo letargico di essi. Quindi anche in questo fenomeno la respirazione interviene come elemento perturbatore tanto più intenso quanto più attivo di questa stasi vitale di eccezionale importanza biologica.

Se così stanno le cose, se cioè la respirazione indiretta finisce coll'intossicare ed uccidere i semi, e quella diretta troppo spinta turbarli ed esaurirli, è necessario conoscere i fattori che più influiscono sul processo della respirazione dei semi per poter trovare quella via di mezzo che, costituendo il *minimum* respiratorio, conservi l'*optimimum* di vitalità all'embrione.

Ora i fattori che influiscono più fortemente sulla respirazione dei semi sono: *a*) il contenuto idrico di essi, *b*) la temperatura dell'ambiente, *c*) l'anidride carbonica accumulata.

Dalle ricerche di C. H. Bailey [1] e collaboratori, eseguite nel dipartimento di biochimica agraria del Minnesota e di quella di Babcook [2] sulla importanza dell'umidità nella respirazione dei semi si ricava la seguente tabella:

Percentuale di umidità	Anidride carbonica sviluppata da 100 gr. di materia secca in 24 ore	
	grano duro	grano tenero
12	0.50 mmgr.	0.49 mmgr.
13	0.58 »	0.60 »
14	0.68 »	0.83 »
15	1.13 »	4.15 »
16	2.72 »	9.85 »
17	10.73 »	25.18 »

(1) C. H. Bailey. *Chemistry of wheat flour.*

(2) S. M. Babcook, «Research Bull.», 12. Visconsin Agricolt. Exp. Stat. 1912.

che dimostra non solo l'attivazione del processo respiratorio a misura che si eleva il contenuto di umidità del grano ma la accentuazione del fenomeno quando si tratta di grani teneri nonchè la determinazione di un punto critico a partire da un contenuto in acqua del 14 %.

La ragione di ciò si trova nel fatto che l'aumento di umidità spiega: *a*) un più facile movimento di materiali nutritivi solubili, dai quali dipendono le trasformazioni chimiche; *b*) un più facile contatto tra il materiale combustibile (amidi, zuccheri, ecc.) ed i fermenti; *c*) una più facile rimozione del prodotto della respirazione.

La maggiore percentuale respiratoria nel grano tenero potrebbe essere dovuta al più basso contenuto in glutine di questo grano poichè è noto che il glutine ha la proprietà di trattenere una maggiore quantità di acqua di quello che faccia l'amido.

Anche la temperatura ha molta influenza sulla respirazione dei semi, sia la temperatura esterna ambientale, che quella interna prodotta dalla stessa respirazione. Una differenza di pochi gradi basta per esercitare un considerevole effetto sul tasso e la intensità della respirazione come appare dalla seguente ricerca di Bailey:

Temperatura	4°C	25°	35°	45°	55°	65°	75°
	mmgr.						
Anidride carbonica sviluppata in 24 ore da 100 gr. di semi. . . .	0.24	0.45	1.30	6.61	31.75	15.71	10.28

confermate da simili esperienze fatte in Inghilterra da Dandy e Elkington [1]:

Percentuale umidità	Temperatura	Anidride carbonica sviluppata in mmgr. in 7 giorni da 100 gr. di grano
12	20°-22°	0.2
	30°	0.6
13.25	20°-22°	1.4
	30°	3.3
15.10	20°-22°	3.3
	30°	21.3
16.95	20°-22°	20.1
	30°	28.9
17.25	20°-22°	17.9
	30°	25 9

(1) Dandy Elkington, 1919, *Grain Pest* (*War*) Committee of the Royal Society.

Per ciò che riguarda la temperatura interna è nota la difficoltà e la lentezza con la quale essa viene a sperdersi nell'ambiente, perchè una massa di grano è sempre cattiva conduttrice del calorico a causa della sua stessa composizione, fatta da innumerevoli elementi e da spazi interstiziali; calorico che, provocando la calda, porta alla deteriorizzazione d'intere masse granarie.

Infine anche l'acido carbonico ha la sua grande importanza per la respirazione dei semi, riconosciuta fin dal 1881 dal Muntz, il quale osservò uno sviluppo di anidride carbonica 10 volte superiore in semi aerati in confronto dei semi chiusi in bottiglie sigillate. E recentemente il Bailey, nel 1918, mantenne a 17° quattro porzioni di grano per varî periodi di tempo; alla fine di uno, quattro, otto, dodici giorni un campione veniva rimosso ed in esso determinata la quantità di anidride carbonica respirata, dando i seguenti risultati:

	Anidride carbonica sviluppata
1° giorno	4 11
Media pro die del 1° periodo (4 g.)	2.68
» » 2° » (8 g.)	1.49
» » 3° » (12 g)	1.11

Da questo esposto si ricava che per agire favorevolmente a pro dell'attività energetica dell'embrione del grano, non solo bisogna ridurre al minimo il consumo delle sostanze nutritive di riserva del seme indispensabili poi nel primo periodo dello sviluppo della pianta, ma bisogna non turbare la profondità del riposo letargico dell'embrione acquisito forse per necessità biologiche attraverso alla filogenesi. Tanto l'uno che l'alto scopo si ottengono limitando l'attività respiratoria, riducendola a quel minimo indispensabile e compatibile con la permanenza della vita. A ciò si arriva praticamente attraverso alla disidratazione dei semi, all'abbassamento termico dell'ambiente di conservazione, e permettendo un relativo accumulo di anidride carbonica che limiti al minimo indispensabile i processi vitali.

La pratica agricola per la migliore conservazione dei semi accetta il primo e secondo canone, ed infatti consiglia di serbare le sementi secche e completamente mature in luogo asciutto e fresco, ma, preoccupata di evitare i possibili danni della calda, consiglia invece un ripetuto paleggiamento della massa onde determinare una rinnovata areazione e continuo rinfrescamento della massa. Questa pratica da quanto si è esposto, non riesce vantaggiosa, perchè, rimovendo l'anidride carbonica accumulata e facilitando una attiva areazione, e quindi ossigenazione, rende più attivi quei processi respiratori

che bisognerebbe contenere entro stretti limiti a vantaggio della salute e della vita degli embrioni.

E che questo sia vero è confermato dalle seguenti serie di ricerche eseguite, nel biennio agrario 1928–29, 1929–30, su di una varietà locale di grano (Saragolla) biologicamente e meccanicamente selezionata per ottenere un materiale sperimentale il più che sia possibile omogeneo per caratteristiche fisiche e per condizioni fisiologiche. Le prove furono condotte nelle due annate agrarie in pieno campo nella stazione di Montagna Piana (Crotone) a 450 m. di altitudine in terreno di natura pliocenica–argillo–calcarea, adoperando il metodo parcellare triplicato per correggere gli errori derivanti dalla qualità del terreno, che, per quanto uniforme, non è mai omogeneo; metodo che consiste nel ripetere ciascun saggio tre volte in tre distinte parcelle: la prima di 50 m² investita con 400 cc. di grano alla semina, la seconda di 100 m² investita con 800 cc. di grano, e la terza d'importanza pratica, di 100 m² ricevendo un quantitativo di seme eguale a 5 litri. A ciascuna serie di parcelle furono prodigate le medesime attenzioni e cure culturali più comuni.

La conservazione del materiale di semina si protrasse dal mese di giugno (epoca dell'immagazzinamento) alla prima settimana di Novembre (epoca della semina) in ambiente spazioso, fresco, e bene illuminato e adottando i due metodi più comuni che la pratica agraria adopera per la conservazione del grano; quello dei cesti e quello dei cumuli. Per la prima serie di ricerche il grano si conservò, senza mai rimuoverlo, in un cesto intessuto di canna, della capacità di 1.50 mc., quindi della possibilità di accogliere una ragguardevole massa di sementa; di questa massa furono utilizzate per l'esperimentazione solo le stratificazioni superficiali superiori come quelle che (data l'apertura del cesto m. 1.20 di diametro e l'abbondanza dell'illuminazione dell'ambiente) avevano ricevuto la maggior somma di aerazione e di ossigenazione (seme molto ossigenato); e come controllo veniva invece utilizzata la parte più interna assiale ed inferiore della massa; prelevata con speciali accorgimenti e questa costituiva il campione (seme poco ossigenato).

Per la seconda serie di ricerche il grano fu conservato sul pavimento del magazzino in due cumuli separati di cui uno veniva rimosso frequentemente paleggiato ogni 15 giorni similmente al metodo adottato dalla pratica locale e questo costituì il saggio delle semente molto ossigenate; il secondo cumulo invece rimase continuamente in quiete, senza subire rimozioni o paleggiamenti di sorta, solo che un termometro col bulbo infisso nella parte più centrale del cumulo serviva da spia per la determinazione del calorico, onde intervenire all'occorrenza per evitare il fenomeno della calda, (però questa temperatura interna durante tutto il periodo estivo della conservazione non superò mai i 3° in confronto della temperatura esterna ambientale). Queste è lo specchietto riassuntivo delle medie dei prodotti ottenuti nelle due annate;

Metodo della conservazione del sem.	Media della prod. in Q.li per ettaro di terreno			
	Annata agraria 1928–29		Annata agraria 1929–30	
	granella	paglia	granella	paglia
IN CESTI				
a) Semente proveniente dagli strati superficiali della massa . . . (molto ossigenata)	10.4	31.0	8.9	22.1
b) Semente proveniente dagli strati profondi della massa . . . . (poco ossigenata)	13.8	42.3	11.7	31.9
SERIE II				
IN CUMULI				
c) Semente proveniente da massa continuamente rimossa . . . (molto ossigenata)	9.0	26.5	7.2	21.0
d) Semente proveniente da massa a riposo . . . . . (poco ossigenata)	12.6	33.1	10.3	29.9

Il minor prodotto dell'annata agraria 1929–30, in confronto con quella del 1928–29 è spiegato dalle vicende atmosferiche meno propizie che hanno dominato. In tutte e due le annate si è ottenuto costantemente un minor prodotto sia in granella che in paglia, sia per attività somatica che di quella genetica con i semi provenienti dagli strati superficiali della massa o dalla massa continuamente rimossa in confronto di quello che si è ottenuto con i semi provenienti invece dagli strati profondi della massa o dalla massa rimasta per tutto il periodo della conservazione allo stato di riposo. E cioè i semi trattati durante la conservazione con una attiva areazione ed ossigenazione *a*), e *c*) hanno mostrato nettamente nelle due annate una riduzione della loro capacità produttiva in confronto dei semi (*b*) e (*d*) che durante la loro conservazione hanno goduto di una minore ossigenazione. Questa riduzione della capacità produttiva è più accentuata nei semi provenienti da una massa granaria la cui ossigenazione era attivata attraverso la rimozione continua (*c*) che nei semi provenienti dagli strati superficiali della massa a riposo (*a*) la cui ossigenazione avveniva per opera di esposizione passiva; e ciò perchè nel primo caso col paleggiamento si ottenne una maggiore e più completa areazione e quindi una più attiva ossigenazione. La riduzione della capacità produttiva deve logicamente farsi dipendere dalla più intensa respirazione avvenuta durante la conservazione e si spiega che da una parte è avvenuto un maggior assottigliamento delle riserve alimentari dell'endosperma e dall'altro un maggior turbamento della quiete letargica dell'embrione.

In ogni caso la differenza di prodotto aggirantesi intorno ai 3 quintali di grano per ettaro è ragguardevole, considerando che tale differenza di risultati si può ottenere con semplici dispositivi e con qualche precauzione, e che eguaglia quella che la tecnica agraria si sforza a volte di ottenere mercè l'impiego di pratiche dispendiose e più laboriose.

Quanto riferito ha importanza non solo scientifica perchè dimostra che i fattori di predeterminazione del seme di grano agiscono anche durante il periodo di riposo e di stasi della pianta, quando cioè essa si trova allo stadio di seme secco immagazzinato, ma potrebbe avere anche una più grande importanza pratica perchè offre la possibilità di elevare il reddito della terra con metodo semplice poco dispendioso ed alla portata di tutti.

La necessità quindi di estendere le ricerche, con metodo scientifico, per arrivare a svelare quell'insieme di condizioni inerenti alla specie, alla varietà, ed alla razza del seme da una parte, dipendenti dai fattori climatici e culturali dall'altra; legati infine ai diversi metodi di conservazione, per giungere poi a disciplinare e regolare più armonicamente i vari fattori termici idrici e carbonici che influenzano più direttamente il processo della respirazione del grano in riposo, attraverso alla quale si predetermina poi la capacità produttiva della semente.

Botanica. — *Sulla resistenza dello stolofillo di* Tulipa silvestris L., *alla penetrazione dei miceli.* Nota di C. Cappelletti, presentata dal Socio G. Gola.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Il volume delle cariossidi di grano in relazione col loro valore nutritivo.* Nota di G. Tallarico, presentata dal Socio F. Bottazzi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà l'annuncio della morte del Socio Straniero Borodin, avvenuta già da tempo, ma comunicataci solo in questi giorni, e del Socio Nazionale Angeli. Ricorda in particolar modo, con brevi parole, la figura dell'Angeli e mette in rilievo l'importanza della sua opera scientifica.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Dal Piaz presenta il volume di Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova pubblicato in occasione del ritiro dalla cattedra del Socio C. F. Parona.

Il Corrisp. Bianchi presenta un gruppo di pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera e della Specola di Merate fra le quali segnala in particolar modo il lavoro di G. Cecchini « Ricerche sulla frequenza delle grandezze assolute delle stelle delle diverse classi spettrali. Parte I. Catalogo generale di Parallassi Stellari ».

Il Socio Mattirolo presenta il volume compilato da un botanico, G. Pedrotti, e da un glottologo, V. Bertoldi, su i « Nomi dialettali delle piante indigene del Trentino e della Ladinia dolomitica ».

L'Accademico Segretario Parravano presenta i libri giunti in dono tra i quali segnala in particolar modo i due volumi di Memorie pubblicati in occasione del Centenario della Société géologique de France.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio De Marchi ricorda brevemente la figura del geografo fisico Wegener perito recentemente in Groenlandia, durante una campagna scientifica e mette in rilievo l'importanza della geniale ipotesi della deriva dei continenti.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci Bianchi, Bottazzi, Castelnuovo, Crocco, Garbasso, Gola, Levi-Civita, Somigliana.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 giugno 1931

AGAMENNONE GIOVANNI. — Discussione di alcune scosse in Italia il 27 e 28 luglio 1918. (Estr. dal « Bollettino della Società Sismologica Italiana ». Vol. XXIX). Roma, 1930. 8°, pp. 1-18.

AGOSTINI A. — Una nuova specie di « Bodinia » causa di tigna umana nell'Eritrea. (Estr. dagli « Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia ». Serie IV, Vol. II, 1930. pp. 117-125). Siena, 1931. 8°.

BANDIERAMONTE GIUSEPPE. — La soluzione dei teoremi ritenuti irrisolvibili. Catania, 1931. 8°, pp. 1-31.

BIANCHI EMILIO. — Giovanni Schiaparelli ed il problema delle parallassi stellari. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. XVIII riunione). Pavia, 1929. 8°, pp. 1-16.

BOLZANO BERNARD. — Bernard Bolzano's Schriften herausgegeben von der königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Band. I. Prag, 1930. 8°, pp. I-XVI, 1-182, 1-24.

CALDO L. — Filippo Angelitti (Necrologia). (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. V). Pavia, 1931. 8°, pp. 1-16.

CECCHINI G. — La distribuzione delle stelle nello spazio e la struttura dell'Universo. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano ». Vol. IV, 1930). Milano, 1931. 8°, pp. 1-42.

CECCHINI G. e PACELLA G. B. — Sul pianeta transnettuniano. (Estr. dai Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere ». Vol. LXIII). Milano, 1930. 8°, pp. 1-11.

Centenaire de la Société Géologique de France. Livre jubilaire 1830-1930. Tome I-II. Paris, 1930. 4°, pp. 1-328, 329-660.

CESÀRO G. — Lieu des centres des ellipses circonscrites à un triangle et ayant une surface donnée. (Extr. des « Bulletins de la Classe des Sciences ». t. XVII, pp. 94-136). Bruxelles, 1931. 8°.

GIALANELLA LUCIA. — Il problema dei due corpi di masse variabili. (Estr. dal « Giornale di Matematiche di Battaglini ». Vol. LXVIII (1929)). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-19.

GIALANELLA LUCIA. — Sulle correnti generate da una coppia di vortici o di sorgenti. (Estr. da « L'Aerotecnica ». Vol. XI). Roma, 1931. 8°, pp. 1-17.

GROSSMANN MARCEL. — Fernparallelismus? Richtigstellung der gewählten Grundlage für eine einheitliche Feldtheorie. (Sonderabdruck aus der « Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich ». Band. LXXVI (1931), pp. 42-60). Zurich. 1931. 8°.

INGBER EDMONDO. — Radioeccitazione e radiolesione. Ricerche eseguite sulla *Vicia faba var. minor* (Estr. dagli « Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia ». Serie IV, Vol. II, 1930, pp. 111-116). Siena, 1931. 8°.

JULIA GASTON. — Leçon de la représentation conforme des aires simplement connexes. Cahiers scientifiques, fasc. VIII. Paris, 1931. 8°, pp. I-VIII 1-111.

LOCKYER WILLIAM I. — A new Bright-hydrogen-line Star of spectral Type B 8 in Lacerta. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomi-

cal Society». Vol. XCI, pp. 259-260). Edinburgh, 1931. 8°.

MADERNI ANDREA. — La determinazione degli elementi orbitali di una doppia spettroscopia. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. V), Pavia, 1930. 8°, pp. 1-15.

MAFFEI LUIGI. — Alcune filliti dell'isola di Coo (Dodecaneso). (Estr. dagli «Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia». Serie IV, Vol. II, 1930, pp. 135-152). Siena, 1931. 8°.

MALLOCH JOHN R. — Notes on some Acalyptrate Flies in the United States National Museum». (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 78). Washington, 1931. 8°.

MARTELLI GIUSEPPE M. — Contributo alla conoscenza dell'«Aporia crataegi L» e di alcuni suoi parassiti ed epiparassiti (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXV, pp. 171-241). Spoleto, 1931. 8°.

PACELLA G. B. — Statistica stellare. (Estr. dai «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano». Vol. IV). Milano, 1931. 8°, pp. 1-30.

PEDROTTI G. e BERTOLDI V. — Nomi dialettali delle piante indigene del Trentino e della Ladinia Dolomitica presi in esame dal punto di vista della botanica, della linguistica e del folclore. Trento, s. d. 8°, pp. I-XII, 1-588.

POLLACCI GINO. — Rassegna sull'attività del Laboratorio crittogamico di Pavia (Osservatorio Fitopatologico per le provincie di Cremona, Parma, Pavia e Piacenza) durante l'anno 1930. (Estr. dagli «Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia». Serie IV, Vol. II). Siena, 1931. 8°, pp. 1-15.

PROFILI ULDERICA. — Immunologia sulla costituzione essenziale degli antigeni e del procedimento per conseguire direttamente e chimicamente puri gli endoenzimi specifici (anticorpi) nelle colture della tubercolosi. Roma, 1931. 8°, pp. 1-20.

SILVESTRI F. — Contributo alla conoscenza dei Campodeidae (Thysanura) delle grotte della Bulgaria. (Extr. des «Bulletin des Institutions royales d'histoire naturelle». Vol. IV, pp. 97-107). Sofia, 1931. 8°.

STEIN G. — Giovanni Giorgio Hagen S. J. (Necrologia). (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. V). Pavia, 1930. 8°, pp. 1-8.

STEIN J. — Nekrolog Johann Georg Hagen S. J. (Sonderabd aus «Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft». Jahrgang LXVI, Heft 1). Leipzig, 1931. 8°, pp. 1-12.

SUARDI GIUSEPPE. — Cactee e piante succolenti coltivate nel R. Orto botanico di Pavia. (Estr. dagli «Atti dell'Istituto bot. dell'Università di Pavia». Serie IV, Vol. II, 1930. pp. 129-134). Siena, 1931. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 giugno 1931 (anno IX)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Un risultato di F. Hausdorff e la compressibilità della materia.* Nota [1] del Corrisp. G. VITALI.

L'Hausdorff ha scomposto [2] l'aggregato K dei punti di un solido sferico nella somma di quattro aggregati A, B, C, N, che godono delle seguenti proprietà.

1ª N è l'aggregato dei punti di una infinità numerabile di diametri e quindi trascurabile dal punto di vista matematico e forse anche dal punto di vista fisico.

2ª Esiste una rotazione φ che porta A sopra B + C e B + C sopra A.

3ª Esiste un'altra rotazione ψ che porta A sopra B, B sopra C e C sopra A.

Nella presente Nota io mi propongo di indicare sommariamente come il predetto risultato dell'Hausdorff suggerisca una interpretazione del fenomeno della compressibilità della materia.

1. Per semplicità indicherò con [A, B, C] il solido sferico K. (Non metto in evidenza l'aggregato N, che, come ho detto, è trascurabile).

Per indicare ciò che rimane da K quando da esso si asportino uno o due degli aggregati A, B, C, userò la stessa notazione in cui alla lettera che rappresenta l'aggregato asportato sostituisco lo O.

(1) Presentata nella seduta del 21 giugno 1931.

(2) F. HAUSDORFF, *Grundzuge der mengenlehre.* Leipzig, 1914, pp. 469–471.

2. Supponiamo di poter disporre di una quarta dimensione e imaginiamo di eseguire su [A , B , C] le seguenti operazioni:

α) Con una traslazione O_1, anche minima, secondo la quarta dimensione si asporti [O , B , C] da [A , B , C], cosichè risulti

$$[A , B , C] = [A , O , O] + [O , B , C].$$

β) Si eseguisca la rotazione $\varphi\psi$ su [O , B , C]. Questo si muta in [O , B , O].

γ) Si eseguisca su [O , B , O] la inversa della O_1. Allora [A , B , C] risulta trasformato in [A , B , O].

3. Consideriamo ora tre solidi sferici di ugual raggio, ed eseguiamo su ciascuno di essi le operazioni descritte al n. prec. Sui tre [A , B , O] che così si ottengono si eseguiscano rispettivamente le rotazioni $\psi\varphi$, $\psi\varphi\psi$, $\psi\varphi\psi^2$. L'insieme dei tre solidi sferici viene allora mutato in

$$[A , O , O] + [O , B , O] + [O , O , C].$$

Approfittando infine della quarta dimensione, si possono trasportare con delle traslazioni di due dei termini della precedente somma in modo che tutti e tre costituiscano [A , B , C].

Si vede così come con convenienti movimenti rigidi di loro porzioni, tre solidi sferici possano essere ridotti ad occupare il posto di uno solo.

4. Il risultato precedente lascia comprendere come, disponendo di una quarta dimensione, la riduzione di volume dei corpi materiali possa essere la conseguenza di movimenti rigidi di loro singole parti.

5. Le rotazioni di cui si è fatto uso ai nn. 2 e 3 sono ampie. Sarebbe desiderabile poter conseguire la riduzione di volume con movimenti quasi impercettibili. A tale proposito si può osservare che delle rotazioni

$$\varphi\psi , \psi\varphi , \psi\varphi\psi , \varphi\psi^2$$

esistono potenze che equivalgono a rotazioni di ampiezza piccola quanto si vuole. Indichiamo con

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 , \sigma_4$$

una quaterna di tali potenze. Sostituendo nelle considerazioni dei nn. 2 e 3 alle

$$\varphi\psi , \psi\varphi , \psi\varphi\psi , \psi\varphi\psi^2$$

rispettivamente le

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 , \sigma_3\sigma_4 ,$$

si arriva ancora a portare la terna di corpi sferici ad essere contenuta in uno solo.

Resta ancora da osservare che il risultato della trasformazione non riempie ora tutto [A , B , C], e che quindi non si ha una idea chiara della riduzione di volume conseguita.

È però da ritenersi che, riprendendo dalle origini e con altre esigenze le ricerche di Hausdorff, si possa giungere a risultati analoghi a quelli indicati, pur sottraendosi alle precedenti obiezioni.

6. Un'altra importante obiezione va fatta alle precedenti considerazioni.

Il procedimento indicato per conseguire una diminuzione di volumi con moti rigidi di singole parti richiede di dover considerare la materia suddivisa in porzioni sferiche uguali, e quindi a dover pensare la materia rudemente discontinua.

La ragione sta nel fatto che i movimenti che effettivamente producono le variazioni di volume sono delle rotazioni.

Disgraziatamente gli stessi effetti non si possono ottenere con delle traslazioni [1].

Se gli stessi effetti si potessero ottenere con delle traslazioni si avrebbero due vantaggi: 1° alla divisione in sfere si potrebbe sostituire una divisione in strati con piani paralleli, il che non contrasta con la nozione di continuità; 2° le operazioni di separazione degli aggregati A , B , C , e della ricomposizione del loro insieme si potrebbero eseguire con movimenti nello spazio ambiente e quindi senza ricorrere ad una quarta dimensione.

Ma se, come lasciano supporre molte considerazioni della scienza moderna, lo spazio fisico è una ipersfera di un S_4 lineare, l'obiezione si potrà evitare. Infatti i movimenti di una tale ipersfera si riducono a rotazioni intorno a piani passanti per il suo centro [2]. Probabilmente questi movisi prestano come le rotazioni dell'S_3 a conseguire variazioni di volume, e la variazione di volume si otterrà con soli movimenti quasi impercettibili della ipersfera e senza spezzamenti della materia che implichino per essa l'ipotesi di una sua rude discontinuità.

(1) S. Banach, *Sur le probleme de la mesure.* « Fundamenta Mathematicae », IV, 1923, pp. 7–33.

(2) G. Vitali, *Sulle sostituzioni lineari ortogonali*, « Bolletino della Unione Matematica Italiana », VII, n. 1, 1928, pp. 1–7.

Meccanica. — *Sui corpi aerodinamici a resistenza negativa.* Nota [1] del Corrisp. G. A. Crocco.

È nota sin dal 1913 una particolare forma di propulsore a reazione dovuta a René Lorin [2] secondo la quale l'aria esterna, raccolta durante il moto in una camera di compressione spontanea, viene successivamente lasciata espandere in direzione opposta sino alla pressione esterna dopo averla surriscaldata, guadagnando in tal modo una maggior velocità e generando una spinta reattiva.

G. S. Steckin, dell'Istituto Aerodinamico di Mosca, ne ha calcolato il rendimento in un interessante studio sui propulsori a reazione [3].

Qui ci proponiamo di presentare lo schema del calcolo sotto una forma che consenta una rapida visione della portata di questo seducente principio pel quale risulta abolito ogni meccanismo e la propulsione si ottiene mediante un semplice apporto di calore.

*
* *

Il fluido, spontaneamente compresso mediante la trasformazione in pressione della sua energia cinetica relativa, segue il ciclo termodinamico di Brayton consistente in una compressione adiabatica seguìta da somministrazione di calore a pressione costante e poi da una espansione adiabatica, completata *all'esterno* da un raffreddamento a pressione costante.

Considerando il moto relativo dell'aria contro il corpo contenente la camera di compressione, e chiamando con p_0, V_0, T_0 la pressione, la velocità e la temperatura assoluta all'esterno del corpo; con p_1, V_1, le rispettive quantità entro la camera di compressione, prima del riscaldamento; con τ l'aumento di temperatura dovuto alla compressione adiabatica spontanea; con T_1 la temperatura assoluta alla quale viene elevato il fluido, a pressione e velocità costanti, entro la camera di compressione; e finalmente con V_2, T_2 la velocità e la temperatura di egresso dovute alla espansione adiabatica, potremo scrivere:

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1931.

(2) Dal volume *Razzi* di J. H. Rynin, Leningrado, 1929, p. 62 e seg.

(3) B. S. Steckin, *Teoria del repulsore* nella « Tecnica della flotta aerea », Leningrado, 1929, pp. 96–103.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{V_0^2 - V_1^2}{2g} = E\, c_p \cdot \tau \\ \dfrac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = E\, c_p\, (T_1 - T_2) \\ \dfrac{Q}{G} = c_p\, \Delta t = c_p\, (T_1 - (T_0 + \tau)) \end{cases}$$

dove E, c_p sono l'equivalente dinamico della caloria e il calorico specifico dell'aria supposto per semplicità costante: G è il peso d'aria entrante nella camera di compressione, e Q la quantità di calore ad esso fornita.

Ricavasi dalle prime due relazioni:

$$\frac{V_2^2 - V_0^2}{2g} = E\, c_p\, (T_1 - T_2 - \tau)$$

e poichè per l'ipotesi adiabatica deve aversi

$$(2)\qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0}{T_0 + \tau} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

dove n è l'esponente della trasformazione, è agevole ricavare

$$(3)\qquad \frac{V_2^2 - V_0^2}{2g} = \frac{EQ}{G}\left(1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right);$$

espressione naturalmente teorica, cioè per fluido perfetto e senza perdite di calore; e nella quale il fattore tra parentisi è il *rendimento termico.*

La spinta reattiva risentita dal corpo sarà

$$(4)\qquad F = \frac{G}{g}(V_2 - V_0);$$

ed è agevole calcolarla dalle precedenti espressioni fissando i vari parametri del problema.

Ciò è stato fatto da Steckin e successivamente da altri, introducendo inoltre nel ciclo teorico i coefficienti di riduzione dovuti alla viscosità dell'aria, agli urti ed alle perdite di calore; e calcolando il rendimento *termo propulsivo* risultante, se V è la velocità di cammino del corpo,

$$(5)\qquad \eta = \frac{FV}{EQ}.$$

Questo rendimento risulta assai piccolo per le ordinarie velocità raggiunte in aviazione; ma sale a valori notevoli quando la velocità raggiunga e superi i 400 metri al secondo. Per tale valore della velocità e con particolari ipotesi nei riguardi dei vari parametri, Steckin ha trovato come ren-

dimento praticamente raggiungibile la cifra di 0.170 che è dell'ordine di grandezza di quella di un propulsore elicoidale mosso da motore a combustione interna.

Per valori più alti della velocità di traslazione il rendimento può superare quello del motore-elica.

* * *

Ritornando al campo teorico ed allo scopo di porre in evidenza nelle espressioni analitiche precedenti la resistenza aerodinamica del corpo che contiene il propulsore termico, ci converrà di trasformare la relazione fondamentale (3) sostituendo al rapporto delle pressioni p_0 e p_1 il rapporto delle temperature dovute alla compressione adiabatica.

Dalla (2) si ricava infatti per il *rendimento termico* l'espressione:

$$(2\,bis) \qquad \eta_t = 1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{T_0}{T_0 + \tau} = \frac{\tau}{T_0 + \tau};$$

onde avendosi per la terza delle (1)

$$\frac{EQ}{G} = E\, c_p\, \Delta t,$$

la (3) diviene:

$$(3\,bis) \qquad V_2^2 - V_0^2 = 2\,g\,E\,c_p\,\Delta t \cdot \frac{\tau}{T_0 + \tau}.$$

Introduciamovi ora la prima delle (1) dopo avervi posto $V_1 = h\,V_0$, in dipendenza dalle luci d'ingresso e di passaggio dell'aria, e cioè

$$(6) \qquad \tau = \frac{(1 - h^2)\,V_0^2}{2\,g\,E\,c_p} = (1 - h^2)\,\tau_0;$$

per cui si ottiene in definitiva

$$(3\,ter) \qquad V_2^2 - V_0^2 = \frac{(1 - h^2)\,\Delta t}{T_0 + \tau}\,V_0^2;$$

e in conseguenza

$$(4\,bis) \qquad V_2 - V_0 = \left(\sqrt{1 + \frac{(1 - h^2)\,\Delta t}{T_0 + \tau}} - 1\right) V_0.$$

Se pertanto scriviamo ora la espressione della spinta reattiva, denominando con ω la luce d'ingresso dell'aria; supponendo $V_0 = V$, e

$$\frac{G}{g} = \rho\,\omega\,V;$$

e ponendo per brevità di scrittura:

$$C_F = \sqrt{1 + \frac{(1 - h^2)\,\Delta t}{T_o + \tau}} - 1 ; \tag{7}$$

la (4) assume la forma suggestiva:

$$F = C_F \cdot \rho\, \omega\, V^2 ; \tag{8}$$

dove C_F è un coefficiente adimensionale; e che richiama l'analoga espressione della resistenza di un corpo aerodinamico di sezione maestra A

$$R = C_R \cdot \rho A\, V^2 . \tag{9}$$

Potremo ora associare la (8) e la (9) ponendo $\omega = \varepsilon A$.

Avremo allora come complessiva espressione della resistenza del corpo aerodinamico in questione:

$$R - F = (C_R - \varepsilon\, C_F)\, \rho\, A V^2 ; \tag{10}$$

e potremo dedurne che, se i vari fattori sono così disposti da ottenere $\varepsilon\, C_F = C_R$, un tal corpo aerodinamico avrà *resistenza nulla*. Per il che basterà raggiungere nella camera di compressione, *per una data velocità*, un *determinato* valore della sopraelevazione di temperatura, Δt, che figura nella espressione (7).

Se poi il valore di Δt sarà mantenuto più elevato, si avrà $\varepsilon\, C_F > C_R$; e il corpo aerodinamico avrà *resistenza negativa*; e risulterà *propulsivo*, a meno di un avviamento iniziale, come nei motori a combustione interna.

S'intende che C_F e C_R sono entrambi variabili con la velocità.

* * *

Eleganti proprietà si deducono pel *corpo aerotermodinamico perfetto* se nella (7) si trascura h^2 e si pone quindi $\tau = \tau_o$; il che consente di ottenere dalla (4 *bis*):

$$\frac{V_2}{V_o} = \sqrt{\frac{T_o + \tau_o + \Delta t}{T_o + \tau_o}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_o + \tau_o}} . \tag{11}$$

Si ricava quindi, per la continuità della portata tra la luce d'entrata, ω, e quella di uscita, ω_2, supposte identiche le pressioni iniziale e finale, e in virtù della (2):

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{V_2}{V_o}\frac{T_o}{T_2} = \frac{V_2}{V_o}\frac{T_o}{T_1}\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2}{V_o}\frac{T_o + \tau_o}{T_1} = \frac{V_o}{V_2} . \tag{12}$$

La (12) ci insegna che *in un corpo aerotermodinamico perfetto il rapporto tra le luci d'entrata e d'uscita eguaglia il rapporto delle corrispondenti velocità.*

Ne segue, dette ρ e ρ_2 le rispettive densità del fluido, la eguaglianza $\rho_0 V_0^2 = \rho_2 V_2^2$; cioè *la eguaglianza tra la forza viva dell'unità di volume all'entrata e all'uscita.* Inoltre si ricava per F la semplice espressione $F = \rho V_0^2(\omega_2 - \omega)$; che presuppone nell'interno le temperature imposte dalle (12).

* * *

Se poi nella espressione (10) consideriamo l'ingombro A del corpo aerodinamico coll'insieme delle altre resistenze di un sistema da propellere nell'aria, come si fa nel caso dei propulsori elicoidali per l'ingombro analogo del motore, la condizione di equilibrio al moto per una velocità V si tradurrà nella eguaglianza

$$C_F \omega - \Omega = 0 \tag{11}$$

dove con Ω indicheremo il *disco resistente* del sistema propulso, quale da noi altrove definito [1]. L'espressione (5) del rendimento termopropulsivo assumerà allora senza difficoltà le forme equivalenti

$$\eta = \frac{FV}{EQ} = \frac{2 C_F \tau_0}{\Delta t} = \frac{\tau_0}{T_0 + \tau_0} \cdot \frac{2 V_0}{V_2 + V_0} = \eta_t \cdot \frac{2\omega}{\omega + \Omega}\ ; \tag{14}$$

nelle quali η_t è il rendimento *termico* teorico calcolato con la (2 *bis*); ed il secondo fattore, che chiameremo con M. Roy [2] η_p, rappresenta, come ha indicato Steckin, il *rendimento propulsivo* teorico di un qualsiasi propulsore *ideale* che proietti senza perdite di energia con velocità V_2 il fluido captato a velocità V_0.

La nuova forma da noi data in funzione di ω e di Ω può altresì estendersi all'elica prendendo il cerchio battuto dalle pale eguale a $n_p \omega$; ma poichè tal cerchio è superiore a quello utilizzato nella propulsione basterà approssimatamente ritenere ω eguale al cerchio battuto dalle pale dell'elica.

Se ne deduce la notevole proposizione che, a parità di disco resistente, il rendimento propulsivo teorico del propulsore a reazione, quale qui considerato, *eguaglia quello teorico di un'elica il cui cerchio battuto sia dell'ordine di grandezza della luce d'ingresso del fluido.* E solo da osservare che la luce d'uscita nel nostro caso, come si deduce dalle (12), è maggiore della luce d'entrata.

(1) Crocco, *Elementi di Aviazione*, ed. 1931, §§ 190 e 151.
(2) M. Roy, *Propulsion par reaction*, « Technique Aéronautique », 15 genn. 1930.

*
* *

Quanto all'espressione del rendimento termico, η_t, essa è identica a quella teorica di un motore a combustione interna nel quale sia τ_0 la elevazione adiabatica di temperatura dovuta alla compressione. L'eguaglianza numerica dei due rendimenti si ottiene quindi per quel determinato valore della velocità di cammino cui corrisponde spontaneamente lo stesso grado di compressione del motore a combustione interna. Questo valore è intorno ai 600 metri al secondo.

Se contemporaneamente, avvalendosi della precedente considerazione, si ottiene lo stesso rendimento propulsivo, il risultante *rendimento termopropulsivo* η, che ne è il prodotto, risulta anch'esso numericamente eguale. Tale eguaglianza si tradurrà in un valor pratico più favorevole per il corpo aerotermodinamico a causa dell'assenza di meccanismi.

*
* *

Alla semplicità delle precedenti considerazioni è da contrapporre che la forma del condotto interno del corpo aerotermodinamico è imposta dalle leggi delle correnti fluide a densità variabile ed è quindi particolare per ciascuna velocità. Cosicchè il corpo aerotermodinamico perfetto non ha esistenza definita, sia pure ideale, che per una sola velocità. È difficile quindi prevederne il funzionamento a velocità inferiore, a meno di immaginarlo di forma variabile.

In tal caso, e a puro titolo di orientamento, si riconosce che basta mantenere costante la massima temperatura T_1 nella camera di combustione per ottenere che il prodotto $C_F \omega$ risulti maggiore di Ω per tutte le velocità inferiori a quella di equilibrio ed il corpo aerotermodinamico risulti *semovente* sino a quella velocità, a meno di un impulso iniziale. Ci riserviamo di sviluppare questo argomento in una Nota ulteriore.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una nuova classe di funzioni circolari.* Nota di L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. A. Crocco.

1. Sia, fig. 1, Γ un cerchio descritto con raggio $= 1$ ed AOB un suo diametro; si prenda su di esso un punto C e sia φ la lunghezza dell'arco AC percorso nel senso positivo. Si unisca C con A e B, si conduca il diametro MON perpendicolare alla corda AC e si uniscano gli estremi M, N di esso con A e C. Si chiamino rispettivamente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, gli angoli ACB, ABC, ANC, CMA, cosicchè sarà $\delta = \pi - \gamma$. Al valore di questi angoli si attribuisca il segno (+) se percorrendo il perimetro del triangolo ABC (del quadrangolo AMCN) in modo che nel movimento si passi direttamente da A a C (si giunga a C passando per il vertice M nel punto medio dell'arco φ) l'area contornata resta a sinistra dell'osservatore e il segno (—) se essa resta a destra. Si convenga inoltre di porre: $\alpha = 0$ per C coincidente con uno degli estremi A, B del diametro AOB; $\beta = 0$ per C coincidente con A ed inoltre $\gamma = 0$ e quindi $\delta = \pi$ anche per C coincidente con A.

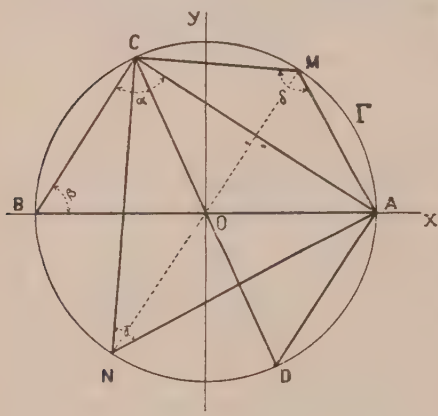


Fig. 1.

Ciò posto se come ascisse si portano le lunghezze degli archi φ e come ordinate i valori degli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ come rappresentazione grafica delle quattro funzioni $f_\pi(\varphi)$, $f_\varphi(\pi)$, $f_\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)$, $f_{2(\pi-\varphi)}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, esprimenti rispettivamente:

a) l'angolo α sotto il quale il diametro fisso AB, che sottende un arco π, è visto dal punto C estremo dell'arco φ,

b) l'angolo β sotto il quale la corda variabile AC che sottende un arco φ è vista dal punto B estremo fisso dell'arco π,

c), *d*) gli angoli γ, δ sotto i quali è vista la corda variabile AC dai due estremi N, M del diametro ad essa perpendicolare,

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

si ottengono il diagramma A della fig. 2 e i diagrammi A, B, C della fig. 3.

Si possono ottenere le stesse funzioni considerando la variazione di altri angoli; così ad esempio invece di considerare l'angolo ACB sotto il quale dal punto mobile C è visto il diametro fisso AB si può considerare

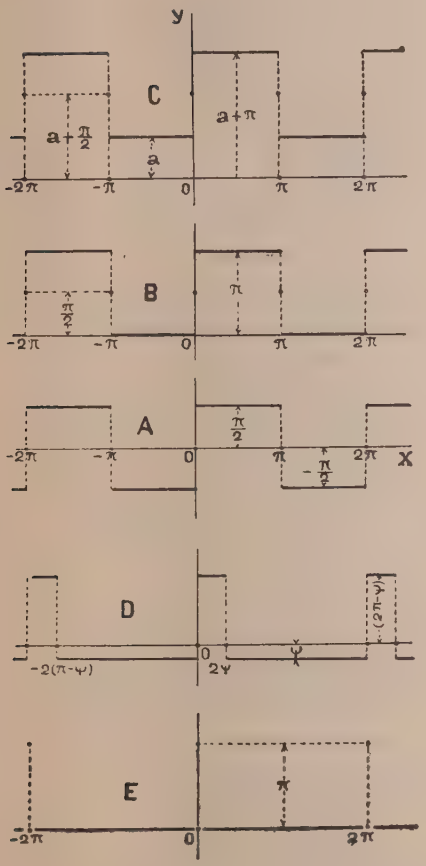


Fig. 2.

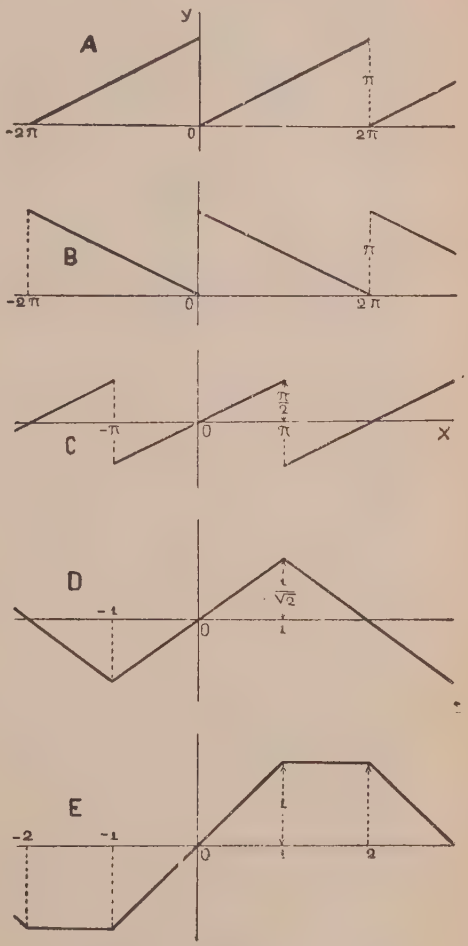


Fig. 3.

l'angolo DAC sotto il quale dal punto fisso A è visto il diametro mobile CD passante per il punto C, ed invece dell'angolo β sotto il quale dal punto fisso B è vista la corda mobile AC si può considerare l'angolo ADO, ad esso uguale, sotto il quale dal punto diametralmente opposto a quello mobile C è visto il raggio fisso OA passante per l'origine A.

2. Dal diagramma (A) si passa a quello (B), della fig. 2, con un semplice cambiamento di assi $\left(x' = x\,,\, y' = y + \frac{\pi}{2}\right)$ e con un secondo cambiamento $\left(x'' = x\,,\, y'' = y' + \frac{\pi}{2}\right)$ si passa dal diagramma (B) a quello (C), ma quelle che così si ottengono non sono realmente delle nuove funzioni, poichè in effetti si tratta sempre di una stessa funzione riferita ad assi in tre posizioni diverse.

Si modifica realmente la funzione se invece di un diametro si considera una corda che taglia la circonferenza in due archi 2ψ e $2(\pi - \psi)$. Conservando le stesse convenzioni per i segni e per il valore dell'angolo quando il punto mobile passa per uno degli estremi della corda, si scorge che la funzione $f_{2\varphi}(\varphi)$ come mostra il diagramma (D) della fig. 2 prende, alternativamente i valori $\pi - \psi$ e $-\psi$ annullandosi nel passaggio da un intervallo all'altro. In altre parole il valore della funzione, in ciascuno dei due intervalli nei quali è diviso il periodo è uguale alla metà della lunghezza dell'altro intervallo.

Spostandosi la corda parallelamente a sè stessa la dissimmetria cresce al diminuire dell'arco sotteso 2ψ fino a quando, la corda diventando tangente al cerchio, l'arco 2ψ trovasi ridotto a un punto e la funzione $f_0(\varphi)$ prende il valore π per i punti di ascissa $x = 2k\pi\,,\, k$ intiero, ed è zero per ogni altro valore di x come appunto mostra il diagramma (E) della fig. 2.

3. Come chiaramente si scorge dai diagrammi il procedimento seguito ha permesso di ottenere degli *elementi* di poligonali, i quali debbono poi esser combinati [1] fra di loro in due, tre, o più per avere delle poligonali complete continue, come mostrato ad esempio dai diagrammi D ed E della stessa fig. 2.

È notevole però che delle due poligonali D, E può essere data anche una generazione diretta come funzioni poligonali. Se infatti si considera un punto mobile che percorre il perimetro di un quadrato di lato uno e si portano come ascisse le lunghezze percorse sul perimetro dal punto mobile e come ordinate le ordinate di esso, si otterrà il diagramma D se il quadrato è disposto con le sue diagonali coincidenti con gli assi di riferimento, e il diagramma E se con gli assi coincidono invece le mediane.

4. Se in tutti i diagrammi della fig. 2 si riduce nel rapporto $1 : \pi$ il valore tanto delle ascisse quanto delle ordinate, nei diagrammi A e B della fig. 3 si riduce il valore delle ascisse nel rapporto $1 : 2\pi$ e quello delle ordinate nel rapporto $1 : \pi$, nel diagramma C della stessa figura il valore delle ascisse nel rapporto $1 : \pi$ e quello delle ordinate nel rapporto $2 : \pi$ ed infine nel diagramma D il valore delle ordinate nel rapporto $\sqrt{2} : 1$, si

(1) «R. C.», vol. XXXII, fasc. 8°, sed. 22 aprile 1923.

scorgerà che, dopo queste modificazioni, i diagrammi delle due figure corrispondono tutti esattamente a delle funzioni già note e cioè:

I diagrammi A, B, C della fig. 2 rappresentano rispettivamente il *fattore alternante* Fal x, il *fattore intermittente* Fint x ed il *fattore pulsante* che nel caso generale è della forma $\varphi_{0,1}\left(\frac{a+b}{2}, a, \frac{a+b}{2}, b\right)$ (1).

Queste funzioni hanno tutte il periodo $= 2$ con due semi onde nelle quali prendono successivamente; la prima di esse i valori $+1, -1$, la seconda $1, 0$ e la terza a, b. Agli estremi delle semionde presentano tutte una *discontinuità regolare* cioè si ha in tali punti:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

Il diagramma D rappresenta il *fattore alternante ad onda dissimmetrica* che ha per forma limite la *funzione puntiforme periodica* (2) cioè Punt $(\varphi_\pi x)$ rappresentata dal diagramma E.

I diagrammi A, B, C della fig. 3 rappresentano tre funzioni numeriche e cioè: il primo la funzione *frazione di* x che nei precedenti scritti ho sempre indicato con Fr x, ma per la quale vennero adoperati anche i simboli M x, *mantissa di* x e βx, dove β sta per l'iniziale della parola tedesca « Bruchteil (3); il secondo la funzione *complemento di* x che nei precedenti scritti ho sempre indicato con Cm x, ed il terzo la funzione di Riemann *eccesso di* x al simbolo originale (x) della quale (4) ho sostituito, seguendo l'esempio già dato da altri (5), il simbolo R x, dove tuttavia è da osservare che il diagramma corrisponde più precisamente a $2\,\mathrm{R}\left(\frac{x}{2}\right)$.

I diagrammi D ed E della stessa figura rappresentano rispettivamente: il primo la *poligonoide* che ho già indicato con Plg x (6) ed il secondo una funzione nota in elettrotecnica, ma che ha importanti applicazioni analitiche, e che potrebbe per brevità e comodità chiamarsi la *trapezoide* ed essere indicata con Trap x.

5. Delle funzioni ottenute coi modi innanzi indicate alcune, diagrammi A, B, C, D della fig. 2 e C della fig. 3, assumono dei valori isolati in

(1) Intorno al fattore alternante, dal quale le altre due funzioni derivano, ved. una una mia piccola Nota « Boll. dell'U. M. I. », giugno 1929.

(2) Per le funzioni puntiformi ved. una mia piccola Nota « Boll. dell'U. M. I. », dicembre 1929.

(3) G. Peano, *Formulario Matematico*, Ed. v. p. 103, Bocca, Torino 1908.

(4) Riemann, *Oeuvres* (trad. Langel) p. 243, Paris 1893.

(5) I. Thomae, *Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen*, G. B. Teubner, Leipzig 1908, p. 20, § 33.

(6) In un mio scritto nel « Politecnico », nov.-dic. 1923.

corrispondenza dei punti di discontinuità, altre, diagrammi A , B della fig. 3, presentano dei salti semplici senza punti isolati.

Per distinguere le funzioni con punti isolati da quelle senza, conserveremo le notazioni innanzi ricordate $\mathrm{Fal}\,x$, $\mathrm{Fint}\,x$; $\mathrm{Fr}\,x$, $\mathrm{Com}\,x$ per le funzioni rappresentate dai diagrammi ed adopereremo le notazioni

(1) $$\mathrm{Fr}_{\frac{1}{2}}\,x \quad , \quad \mathrm{Cm}_{\frac{1}{2}}\,x$$

(2) $$\mathrm{Fal}_1\,x \quad , \quad \mathrm{Fal}_{-1}\,x \quad , \quad \mathrm{Fal}_{|i}\,x \quad , \quad \mathrm{Fal}_{i|}\,x$$

(3) $$\mathrm{Fint}_1\,x \quad , \quad \mathrm{Fint}_0\,x \quad , \quad \mathrm{Fint}_{|i}\,x \quad , \quad \mathrm{Fint}_{i}\,x$$

per indicare le funzioni che nel punto di discontinuità prendono il valore apposto al simbolo a guisa di indice, osservando che gli indici $|i\,,i|$ indicano che i tratti continui costituenti il diagramma sono tutti chiusi a sinistra, o, rispettivamente, a destra.

I punti isolati si possono eliminare in vari modi: si ha così ad es.

(4) $$\mathrm{Fint}_1\,x = \psi_{0,1}(|1|\,,0) = \mathrm{segn}\,\mathrm{Fint}\,x$$

(5) $$\mathrm{Fint}_0\,x = \psi_{0,1}(1\,,|0|) = \mathrm{I}\,\mathrm{Fint}\;x$$

od anche, per $\mathrm{Fal}\,x$

(6) $$\mathrm{Fal}_{|i}\,x = \psi_{0,1}(|+1\,,|-1) = 1 - 4\,\mathrm{Fr}\frac{\mathrm{I}\,x}{2}$$

(7) $$\mathrm{Fal}_{i|}\,x = \psi_{0,1}(+1\,|\,,-1\,|) = (-1)^{\mathrm{I}\,x\,+\,\mathrm{Punt\,Fr}\,x}\,.$$

Il metodo generale per l'eliminazione (o l'introduzione) del punto isolato nelle discontinuità è quello dell'aggiunta alla funzione da modificare di una funzione puntiforme periodica semplice, $\mp\,\mathrm{Isen}^2\,\pi x$ od alternata $(-1)^{\mathrm{I}\,x}\,\mathrm{I}\,\mathrm{Cm}\,x$ cosicchè è ad esempio

(8) $$\mathrm{R}_{-1}\,x = \mathrm{R}\,x - \mathrm{I}\,\mathrm{Cm}\frac{x+1}{2}\,.$$

6. Le funzioni periodiche delle quali è stata data innanzi la generazione geometrica, hanno svariate applicazioni e qui ricorderò soltanto come esse forniscano un mezzo assai semplice per la periodificazione di funzioni qualsiasi con la sola condizione che siano analiticamente esprimibili nell'intervallo che si vuole assumere come periodo. Data infatti una funzione espressa da un polinomio, una serie, un prodotto infinito o un integrale definito

$$(9) \qquad y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$(10) \qquad y_s = \varphi(0) + \varphi(1)\, x + \varphi(2)\, x^2 + \cdots$$

$$(11) \qquad y_p = \{1 + \varphi_1(x)\}\{1 + \varphi_2(x)\}\{1 + \varphi_3(x)\} \cdots$$

$$(12) \qquad y_i = \int_0^{\alpha} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\, d\alpha$$

essa si rende periodica semplicemente sostituendo $\operatorname{Fr} x$, $\operatorname{R} x$ o $\operatorname{Plg} x$ a x e si ha

$$(13) \qquad y^* = \int_0^{n} a_0^{D_0}\, a_1^{D_1} \cdots a_n^{D_n} (\operatorname{Fr} x)^{1\nu}\, d\nu$$

$$(14) \qquad y_s^* = \int_0^{\infty} \varphi(1\nu)\, (\operatorname{Fr} x)^{1\nu}\, d\nu$$

$$(15) \qquad \log y_p^* = \int_1^{\infty} \log\{1 + \varphi_{1\nu}(\operatorname{R} x)\}\, d\nu$$

$$(16) \qquad y_i^* = \int_{2\pi \operatorname{I} \frac{\alpha}{2\pi}}^{\alpha} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)\, d\alpha$$

dove per brevità si è posta D_n per $\operatorname{Dir}(2n + 1 - 2\nu)$ e per uniformità di scrittura si sono poste tutte le funzioni sotto forma di integrali definiti, seguendo il metodo già esposto in una precedente mia Nota [1].

Qualora le funzioni da trasformare contengano uno o più parametri, periodificando anche uno o due di questi, si ottengono delle funzioni doppiamente, triplamente periodiche ecc. Così se nella (12) si rende periodico il parametro k si ha in

$$(17) \qquad y_i^{**} = \int_{2\pi \operatorname{I} \frac{\alpha}{2\pi}}^{\alpha} (1 - \operatorname{Plg}^2 k \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha)\, d\alpha$$

una funzione doppiamente periodica col periodo 2π secondo l'asse delle π ed il periodo 4 secondo l'asse delle k.

(1) «R. C.», vol. 1, fasc. 9, pp. 517-522.

Matematica. — *Ancora sulla derivata destra di una funzione continua verso destra e derivabile verso destra.* Nota di T. VIOLA, presentata [1] dal Corrisp. G. VITALI.

1. In una Nota precedente ho dimostrato il seguente lemma: se $F(x)$ è una funzione reale, definita in un intervallo $a-b$, continua verso destra e derivabile verso destra in tutto $a-b$; se C è un aggregato chiuso contenuto in $a-b$, sul quale e rispetto al quale $F(x)$ è continua; se $F(x)$ è continua nell'interno di ogni intervallo contiguo a C; allora la funzione $D_+F(x)$ è di prima classe in $a-b$, cioè limite di una successione di funzioni continue.

Nella dimostrazione ho fatto uso di un aggregato perfetto Q ottenuto completando l'aggregato C con una successione di aggregati perfetti e non densi I_i. Era precisamente $Q = C + \sum I_i$. Ma, nella presente Nota, dobbiamo fare uso di quel lemma in condizioni un po' più generali di quelle contenute nell'enunciato stesso. Mettiamo perciò in rilievo le condizioni essenziali a cui debbono soddisfare gli aggregati I_i:

1ª - Ciascuno di essi è interamente contenuto in un intervallo contiguo a C ed ha l'estremo sinistro coincidente con quello dell'intervallo contiguo a C che lo contiene.

2ª - Detta δ_i l'ampiezza dell'intervallo contiguo a C che contiene I_i, l'oscillazione di $F(x)$ su I_i dev'essere $< \delta_i$.

3ª - Su ogni I_i la $F(x)$ dev'essere continua rispetto ad I_i.

Senza l'ipotesi della continuità di $F(x)$ nell'interno di ogni intervallo contiguo a C, sarebbe ancora sempre possibile scegliere gli aggregati I_i in modo da soddisfare alle condizioni 1ª e 2ª: resterebbe invece dubbia la possibilità di soddisfare alla condizione 3ª. Ma per soddisfare alla condizione 3ª appare troppo ristretta l'ipotesi della continuità di $F(x)$ sull'intervallo contiguo a C in cui I_i è contenuto: noi applicheremo ora il lemma verificando direttamente la condizione 3ª in casi in cui non sapremo se $F(x)$ sia o no continua sull'intervallo contiguo a C in cui I_i è contenuto.

2. *Teor.* Se $F(x)$ è una funzione continua verso destra e derivabile verso destra in tutto un intervallo $m-n$, allora la derivata destra $D_+F(x)$ è una funzione di prima classe in $m-n$, cioè limite di una successione di funzioni continue.

Dim. Per un teor. che ho dimostrato in una Nota precedente, l'aggregato N_0 dei punti di discontinuità della $F(x)$ in $m-n$ è ovunque non

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

denso in $m-n$. Sia CN_0 l'aggregato che si ottiene per chiusura dell'aggregato N_0, cioè aggiungendo ad N_0 i punti limiti di N_0 che eventualmente non appartengono ad N_0. Determino una successione di aggregati

$$CN_0 , CN_1 , CN_2 , \cdots , CN_r , CN_{r+1} , \cdots$$

ciascuno chiuso e non denso nel precedente: N_{r+1} è l'aggregato dei punti di CN_r nei quali $F(x)$ è discontinua rispetto a CN_r. CN_{r+1} è l'aggregato che si ottiene per chiusura dell'aggregato N_{r+1}. Se non esiste nessun r tale che N_r è nullo, allora esiste un aggregato CN_ω, chiuso, contenuto in tutti i CN_r e ovunque non denso su ciascuno di essi [1]. Sia $N_{\omega+1}$ l'aggregato dei punti di CN_ω nei quali $F(x)$ è discontinua rispetto a CN_ω e sia $CN_{\omega+1}$ l'aggregato che si ottiene da $N_{\omega+1}$ per chiusura. $CN_{\omega+1}$ è contenuto in CN_ω ed ovunque non denso in CN_ω. Così continuo transfinitamente. Per una proposizione nota [2] il procedimento ha certo termine: esiste cioè un transfinito ben determinato μ tale che è $CN_\mu = 0$.

Indico ora con T_0 l'aggregato che si ottiene completando CN_0 allo stesso modo come l'aggregato Q del lemma si otteneva completando C: dico brevemente che T_0 è «un aggregato Q di CN_0». Costruisco una successione di aggregati

$$T_0 , T_1 , T_2 , \cdots , T_r , T_{r+1} , \cdots$$

nel modo seguente: per ogni intervallo $S_i^{(r)} = \lambda_i^{(r)} \dashv\vdash \mu_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots ; \mu_i^{(r)} - \lambda_i^{(r)} = \delta_i^{(r)})$ contiguo a CN_r scelgo un punto $\nu_i^{(r)}$ tale che

$$\lambda_i^{(r)} < \nu_i^{(r)} < \mu_i^{(r)}$$

e che l'oscillazione di $F(x)$ sull'intervallo chiuso $\lambda_i^{(r)} \dashv\vdash \nu_i^{(r)}$ sia $< \delta_i^{(r)}$. T_r è l'aggregato che si ottiene da CN_r aggiungendovi i punti di T_{r-1} che sono contenuti in ciascun $\lambda_i^{(r)} \dashv\vdash \nu_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$.

T_r è «un aggregato Q di CN_r». Infatti, sopposta dimostrata questa proposizione per T_{r-1}, se in un segmento contenente una parte $\overline{CN}_{r-1}$ di CN_{r-1} è $F(x)$ continua su $\overline{CN}_{r-1}$, in quel segmento è contenuta anche una parte $\overline{T}_{r-1}$ di T_{r-1} e su $\overline{T}_{r-1}$ è $F(x)$ continua rispetto a $\overline{T}_{r-1}$. Ne segue che i punti di T_{r-1} nei quali $F(x)$ è discontinua rispetto a T_{r-1} sono tutti e soli quelli di N_r. (Vedi n. 1).

(1) Vedi per es. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1918, p. 54.
(2) Vedi per es. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 1928, p. 324.

Per ogni intervallo

$$S_i^{(\omega)} \equiv \lambda_i^{(\omega)} \text{—} \mu_i^{(\omega)} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots; \mu_i^{(\omega)} - \lambda_i^{(\omega)} = \delta_i^{(\omega)})$$

contiguo a CN_ω scelgo un punto $\nu_i^{(\omega)}$ tale che $\lambda_i^{(\omega)} < \nu_i^{(\omega)} < \mu_i^{(\omega)}$ e che l'oscillazione di $F(x)$ in $\lambda_i^{(\omega)} \text{—} \nu_i^{(\omega)}$ sia $< \delta_i^{(\omega)}$. Sia $r\ (\omega, i)$ il più piccolo intero tale che $\nu_i^{(\omega)}$ è interno a un intervallo $\alpha_0 \text{—} \beta_0$ contiguo a CN_r. Sia α_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ il più grande punto di CN_{r+k} contenuto in $\lambda_i^{(\omega)} \text{—} \alpha_{k-1}$. Evidentemente è $\lim_{K \to \infty} \alpha_k = \lambda_i^{(\omega)}$. Si aggiungano a CN_ω i punti di T_r che sono contenuti in $\alpha_0 \text{—} \frac{\alpha_0 + \nu_i^{(\omega)}}{2}$ e, per ogni $k > 0$ e tale che $\alpha_k < \alpha_{k-1}$, i punti di T_k che sono contenuti in $\alpha_k \text{—} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}}{2}$ e si chiami T_ω l'aggregato che si ottiene come risultato di tutte queste somme, effettuate, si intende, per tutti i singoli intervalli contigui a CN_ω (cioè per $i = 1, 2, 3, \cdots$). Si vede subito che T_ω è « un aggregato Q di CN_ω ». Così si prosegua transfinitamente.

Tutte queste costruzioni permettono ora di dimostrare in maniera brevissima il teor. enunciato. Infatti il lemma ricordato dice subito che $D_+ F(x)$ è di 1ª classe in ogni intervallo contiguo a CN_1. Ammesso allora che $D_+ F(x)$ sia di 1ª classe in ogni intervallo contiguo a CN_{r-1}, il lemma stesso (nelle condizioni più estese cui si è accennato al n. 1) dice ancora che $D_+ F(x)$ è di 1ª classe in ogni intervallo contiguo a CN_r. Dunque $D_+ F(x)$ è di 1ª classe in ogni intervallo contiguo a CN_ω, e quindi anche in ogni intervallo contiguo a $CN_{\omega+1}$, e così via transfinitamente.

Infine $D_+ F(x)$ è di 1ª classe in tutto $m - n$.

c. d. d.

Evidentemente il teorema dimostrato contiene in sè il lemma della Nota precedente.

Matematica. — *Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires.* Nota di B. Hostinský, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

1. Dans un travail publié en 1887 [2] M. Volterra a donné la définition suivante d'intégrale d'une substitution linéaire. Supposons que les coëfficients a_{ik} d'une substitution linéaire et homogène A à r variables dépendent d'un paramètre t. Divisons l'intervalle $\alpha \leqq t \leqq \beta$ en n parties égales à h, $hn = \beta - \alpha$, et posons $t_\nu = \alpha + \nu h$, $\nu = 1, 2, \cdots n$. Soit R_ν la substitution infinitésimale dont les coëfficients sont égaux à $ha_{ik}(t_\nu)$ pour $i \neq k$ et à $ha_{ii}(t_\nu)$ dans la diagonale. La substitution composée $R_1 \cdot R_2 \cdots R_n$ (on opère d'abord R_n, ensuite $R_{n-1}, \cdots$) tend pour $\lim h = 0$ vers une substitution limite déterminée « intégrale de A par rapport à t de α à β »; nous la représentons par $\int_\alpha^\beta A dt$. On a, pour $\alpha < \beta < \gamma$, l'équation

$$\int_\alpha^\gamma A dt = \int_\alpha^\beta A dt \cdot \int_\beta^\gamma A dt ; \tag{1}$$

au second membre, on opère d'abord l'intégration de β à γ, ensuite celle de α à β.

2. Je trouve que ces résultats obtenus par M. Volterra peuvent être étendus à l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. Considérons d'abord la transformation du type

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy . \tag{2}$$

Elle fait correspondre à toute fonction $f(x)$ une autre fonction $g(x)$; K est son noyau. Faisons suivre la transformation (2) par une autre transformation du même type à noyau $L(x, y)$. La transformation composée ainsi obtenue fera correspondre à $f(x)$ une fonction $h(x)$; on a

$$h(x) = \int_a^b M(x, y) f(y) dy \quad , \quad M(x, y) = \int_a^b L(x, s) K(s, y) ds . \tag{3}$$

(1) Nella seduta del 21 giugno 1931.

(2) V. Volterra, *Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle Scienze*, 3, VI, 1887. Voir aussi ses *Leçons sur les fonctions des lignes*, Paris 1913, p. 38.

Supposons maintenant que le noyau A d'une transformation du type (2) dépend d'un paramètre t de sorte que

$$(4) \qquad g(x) = \int_a^b A(x, y, t) f(y)\, dy .$$

Divisons l'intervalle $\alpha \leqq t \leqq \beta$ comme plus haut et introduisons les transformations fonctionnelles $R_\nu (\nu = 1, 2, \cdots n)$ définies par les noyaux suivants

$$(5) \qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi h c}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4hc}} + h A(x, y, t_\nu),$$

c étant une constante positive arbitraire. R_ν est, pour $\lim h = 0$, une transformation infinitésimale; elle diffère infiniment peu de la transformation identique, car on a pour toute fonction $f(x)$

$$\lim_{h=0} \int_a^b \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi h c}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4hc}} + h A(x, y, t_\nu) \right] f(y)\, dy = f(x),$$

si x est compris entre les limites a et b.

Considérons alors la transformation composée $R_1, R_2 \cdots R_n$. Elle tend pour $\lim h = 0$ vers une limite déterminée qui sera « l'intégrale de (4) par rapport à t de α à β ». Nous la représentons par $\int_\alpha^\beta A\, dt$; l'équation (1) s'applique aussi aux intégrales des transformations fonctionnelles du type considéré.

Étant donnée la loi de composition (3), le noyau $\Phi(x, y, \alpha, \beta)$ de $\int_\alpha^\beta A\, dt$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante

$$(6) \qquad \Phi(x, y, \alpha, \gamma) = \int_a^b \Phi(x, s, \alpha, \beta)\, \Phi(s, y, \beta, \gamma)\, ds$$

où $\alpha < \beta < \gamma$. L'équation (6) n'est qu'une autre forme de (1). Le résultat peut être exprimé ainsi :

Pour obtenir une solution $\Phi(x, y, \alpha, \beta)$ *de l'équation fonctionnelle* (6), *on prend une fonction* $A(x, y, t)$ *quelconque comme noyau d'une transformation fonctionnelle linéaire et on intégre cette transformation par rapport à* t *de* α *à* β; *le noyau* $\Phi(x, y, \alpha, \beta)$ *de la transformation ainsi obtenue donne une solution de* (6).

L'équation (6) se présente dans la théorie de la diffusion et elle joue un rôle important dans les applications du calcul des probabilités aux problèmes physiques (1).

3. Dans le cas particulier où $A(x, y, t)$ ne dépend pas de t, les transformations infinitésimales R_v définies par (5) sont identiques entre elles; en d'autres mots, l'intégrale de A est une transformation engendrée par la transformation infinitésimale (5). Il est visible que la transformation $\int_{\alpha}^{\beta} A\, dt$ ne dépend dans ce cas que la différence $\beta - \alpha$; et le noyau d'une telle transformation aura la forme $\Phi(x, y, \beta - \alpha)$. L'équation (6) prend alors la forme simplifiée

$$\Phi(x, y, t + t') = \int_a^b \Phi(x, s, t)\, \Phi(s, y, t)\, ds \tag{7}$$

où $t = \beta - \alpha$, $t' = \gamma - \beta$.

Voilà l'équation employée par Smoluchowski dans ses recherches sur le mouvement Brownien (2). Le méthode qu'il a exposée (voir notamment pp. 424–425) pour former des solutions au moyen des transformations infinitésimales repétées n'est autre chose que l'intégration d'une transformation fonctionnelle.

D'autre part M. F. Perrin dans sa *Thèse sur le mouvement Brownien de rotation* (3) a considéré l'équation

$$f(\widehat{xy}, t + t') = \iint f(\widehat{xz}, t)\, f(\widehat{zy}, t')\, d6_z \tag{8}$$

où la fonction f dépend de la distance sphèrique $\widehat{xy}$ de deux points x, y pris sur la sphère et du temps t. La méthode employée à la fin du chap. VII, consiste aussi à engendrer une transformation fouctionnelle au moyen d'une transformation infinitésimale.

Matematica. — *Parallelismo generalizzato in una* V_3. Nota di G. Barba, pres. dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Voir S. Chapman, « Proceeding of the Royal Society », A. 119, p. 39, 1928; B. Hostinský, « Comptes-Rendus », *192*, p. 546, 1931; A. Kolmogoroff, « Mathematische Annalen », *104*, p. 415, 1931.

(2) « Bulletin internat. de l'Académie des Sciences de Cracovie », A. 1913, p. 418.

(3) « Annales de l'Ecole Normale Supérieure », Paris 1928.

Meccanica. — *Trasformazioni adiabatiche nei sistemi vibranti nell'intorno di configurazioni stabili di equilibrio.* Nota di G. KRALL, presentata[1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Con riferimento ai richiami e complementi alla teoria degli invarianti adiabatici fatti in una precedente Nota in questi « Rendiconti », ci proponiamo di considerare qui brevemente alcune semplici applicazioni della teoria suddetta allo studio delle vibrazioni d'un sistema olonomo, a quanti si vogliono gradi di libertà, nell'intorno d'una configurazione C_0 di equilibrio stabile, quella naturale per esempio.

Sia al solito, per *atti di moto* nell'intorno della C_0, il potenziale U espresso da una forma quadratica a coefficienti costanti definita negativa nelle coordinate lagrangiane q_i,

$$(1) \qquad U = -\frac{1}{2}\sum_{ik}^{n} a_{ik}\, q_i\, q_k ,$$

l'energia cinetica T, una forma quadratica definita positiva nelle velocità $\dot{q}_i$,

$$(2) \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{ik}^{n} b_{ik}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k .$$

Procedendo allora, soltanto per mantenere completa aderenza agli sviluppi fatti, secondo il metodo di Jacobi-Hamilton, troviamo immediatamente, per l'equazione classica alle derivate parziali nell'incognita funzione Hamiltoniana H, indipendente dal tempo t, spettante al problema specifico che stiamo trattando, l'espressione

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\sum_{ki}^{n} b^{(ik)}\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial q_k} + \frac{1}{2}\sum_{ik}^{n} a_{ik}\, q_i\, q_k = E$$

nella quale:

i coefficienti $b^{(ik)}$ designano, con notazione consueta, i reciproci dei coefficienti b_{ik} considerati elementi della matrice d'ordine n, $D = \| b_{ik} \|$;

la costante E rappresenta l'energia totale del sistema, $E = T - U$.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

Trasformando le q_i in coordinate normali φ_ϱ attribuenti alle (1) e (2) la forma cosidetta canonica, caratteristicamente priva di termini rettangoli, la (3) diviene

$$\frac{1}{2}\sum_1^n{}_\varrho \left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_\varrho}\right)^2 + \lambda_\varrho^2 \varphi_\varrho^2\right\} = E \tag{3a}$$

dove i parametri λ_ϱ designano, com'è ben noto, a meno del fattore $1/2\pi$, le frequenze fondamentali o frequenze proprie del sistema.

Convenendo di indicare con E_ϱ delle costanti legate alla condizione

$$\sum_1^n{}_\varrho E_\varrho = E\,,$$

ponendo, col solito criterio di separazione delle variabili,

$$S = \sum_1^n{}_\varrho S_\varrho(\varphi_\varrho)$$

con S_ϱ funzione della sola φ di egual indice, si deduce

$$\left(\frac{dS_\varrho}{d\varphi_\varrho}\right)^2 + \lambda_\varrho^2 \varphi_\varrho^2 = 2E_\varrho\,, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, n).$$

Si hanno quindi immediatamente gli integrali ciclici I_ϱ, invarianti adiabatici assoluti,

$$I_\varrho = \int\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_\varrho}\right)d\varphi_\varrho = \int\left(\frac{dS_\varrho}{d\varphi_\varrho}\right)d\varphi_\varrho = \frac{2\pi E_\varrho}{\lambda_\varrho}\,, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, n). \tag{4}$$

Designando con A_ϱ la massima elongazione della φ_ϱ, poichè la costante E_ϱ caratterizza l'energia totale spettante alla suddetta coordinata normale ρ^{ima}, $\varphi = \varphi_\varrho$, si avrà anche

$$I_\varrho = \frac{2\pi E_\varrho}{\lambda_\varrho} = \pi A_\varrho^2 \lambda_\varrho\,, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, n). \tag{4a}$$

Raccogliendo codesti integrali ciclici I_ϱ in uno solo, così come nella Nota richiamata, potremo anche scrivere in luogo delle (4) e (4a), designando con C una curva chiusa nello spazio delle fasi,

$$\int_C \sum_1^n{}_\varrho \dot{\varphi}_\varrho\, d\varphi_\varrho = \sum_1^n{}_\varrho I_\varrho = \text{Invariante}.$$

Rileviamo che agli invarianti I_ϱ si può dare un'altra forma abbastanza espressiva che, in taluna circostanza, potrebbe esser anche utile.

Poichè evidentemente, ove con τ_ϱ si indichi il periodo della vibrazione fondamentale ρ^{ima}

$$\tau_\varrho = \frac{2\pi}{\lambda_\varrho},$$

si ha

$$I_\varrho = \int \dot{\varphi}_\varrho \, d\varphi_\varrho = \int_0^{\tau_\varrho} \dot{\varphi}_\varrho^2 \, dt;$$

sarà in ogni caso

$$\sum_1^n{}_\varrho \, I_\varrho = \sum_1^n{}_\varrho \int_0^{\tau_\varrho} \dot{\varphi}_\varrho^2 \, dt .$$

Ora, se i singoli τ_ϱ si moltiplicano per dei numeri interi k_ϱ sussisterà ovviamente la relazione

$$\sum_1^n{}_\varrho \int_0^{k_\varrho \tau_\varrho} \dot{\varphi}_\varrho^2 \, dt = \sum_1^n{}_\varrho \, k_\varrho \, I_\varrho = \text{Invariante}.$$

Quindi, scegliendo i numeri k_ϱ sufficentemente grandi, perchè sia

$$k_1 \tau_1 \sim k_2 \tau_2 \sim \cdots, \sim k_n \tau_n ,$$

detto $\overset{*}{\tau}$ un tale prodotto generico, poichè, come si sa

$$\sum_1^n{}_\varrho \, \dot{\varphi}_\varrho^2 = 2\,T ,$$

avremo

$$\int_0^{\overset{*}{\tau}} T \, dt = \text{Invariante}.$$

Vediamo ora di trar partito da queste conclusioni, dalla (4) in particolar modo. Inferiamo in primo luogo che, se il sistema vibra, poniamo secondo una sola nota fondamentale, ad esempio la τ^{ima}, una trasformazione adiabatica, pur variandone l'intensità ed il tono, in base alla relazione

$$A_\tau^2 \lambda_\tau = \text{invariante}$$

$\neq$ da zero *per la sola* φ_ϱ di indice $\rho = \tau$, non desterà, dovendo gli altri prodotti $A_\varrho^2 \lambda_\varrho = I_\varrho$ per $\rho \neq \tau$ rimanere invariabilmente nulli, altre frequenze e lascerà alla nota immutato l'ordine che le spettava nella scala o spettro del sistema.

Nel caso di problemi di oscillazioni di sistemi continui, di cui il moto è compendiato da equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo ben noto, ad esempio, con le solite notazioni, quella della corda vibrante

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

il teorema dianzi indicato, convenientemente esteso con ben noti passaggi al limite si esprime dicendo che, se una corda vibra secondo la nota τ^{ima}, cioè con $\tau - 1$ nodi intermedi, una variazione adiabatica ne lascia inalterato il numero.

Ancora, si consideri l'interessante problemetto concernente la valutazione del lavoro fatto per aumentare adiabaticamente la tensione d'una corda vibrante.

Sia H_0 la tensione iniziale, H quella finale, μ la massa per unità di lunghezza, L la lunghezza.

Avendosi notoriamente, per $\mu = \text{cost.}$, $H = \text{cost.}$ in tutto il campo $0 \leq x \leq L$,

$$\lambda_\varrho = \varrho \sqrt{\frac{H}{\mu L}}, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots,)$$

sarà,

$$\lambda'_\varrho = \lambda_\varrho \sqrt{\frac{H}{H_0}}$$

la frequenza variata.

Gli invarianti I_ϱ saranno quindi effettivamente tali soltanto a patto che ogni ampiezza A_ϱ vari sino a valori A'_ϱ percui sia

$$A_\varrho^2 \lambda_\varrho = A_\varrho'^2 \lambda'_\varrho,$$

dunque eguali a

$$A'_\varrho = A_\varrho \sqrt[4]{\frac{H_0}{H}}.$$

Ne scende in conformità il variare dell'energia totale E

$$E = \frac{1}{2} \sum_1^\infty{}_\varrho A_\varrho^2 \lambda_\varrho^2.$$

Si avrà precisamente, indicandone con E' il nuovo valore

$$E' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{H_0}} \sum_1^\infty{}_\varrho A_\varrho^2 \lambda_\varrho^2 = \sqrt{\frac{H}{H_0}} E$$

da cui si desume, per il lavoro fatto, l'espressione cercata

$$L = E' - E = \left(\sqrt{\frac{H}{H_0}} - 1\right) E.$$

Concludendo rileveremo che sono innumerevoli quistioni analoghe che si possono risolvere sfruttando questa estensione della teoria degli invarianti adiabatici ai sistemi continui.

Così, ad esempio, si determina con tutta facilità il lavoro necessario per raccorciare una corda vibrante (p. es. infilandola in un tubetto rigido), per deformare il contorno d'una membrana o d'una piastra vibrante, per valutare gli effetti di adiabatiche variazioni delle costanti di elasticità e così via.

Ma, dove in modo ben più saliente si presenta applicabile la nozione di invariante adiabatico, a parte la fisica teorica che, in sostanza, almeno attualmente, ne ha superato l'uso, è l'astronomia.

Ciò ebbe a rilevare [1] il prof. T. Levi-Civita, completando con semplicità di mezzi sorprendente, di notevoli estensioni, ricerche ormai classiche ch'eran state proseguite col sussidio di mezzi analitici i più elevati.

Alludiamo, ricordandone solo alcune, quelle del Gyldèn, Strömgren, Plummer ed Armellini sul problema dei due corpi di masse variabili del Darwin sull'effetto asintotico delle maree.

Cercheremo in una Nota successiva di continuare quell'indirizzo suggestivo traendo qualche risultato nuovo, nel campo della Cosmogonia particolarmente, non del tutto privo di qualche interesse.

(1) T. Levi-Civita, *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*, Estratto dagli « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici », Bologna, 3-10 settembre 1928, vol. V, pp. 17-28.

Fisica. — *Nuove bande Raman dell'acqua* [1]. Nota di E. Segrè presentata [2] dal Socio O. M. Corbino.

Lo spettro Raman dell'acqua liquida è stato oggetto di numerose ricerche [3] e finora era stata trovata una banda con un $\Delta\nu_R$ di circa 3500 cm. Di tale banda è stata anche tentata una decomposizione in due o tre elementi, ma i risultati non sono concordi. Operando come gli sperimentatori citati con luce primaria di frequenza visibile, per ragioni più volte esposte [4] è noto che non si riescono ad osservare frequenze Raman piccole.

La pratica di eccitare lo spettro Raman dell'acqua con la riga 2537 Å del mercurio riassorbendo la radiazione di frequenza non modificata con vapore di mercurio permette anche qui di raggiungere con l'osservazione le immediate vicinanze della riga primaria senza esser disturbati da aloni.

È così che mi è stato possibile osservare una nuova banda col massimo a circa 140 cm^{-1} dalla riga primaria. Tale banda è abbastanza intensa dalla parte delle basse frequenze; la banda antistokes invece è appena percettibile.

Riguardo alla sua interpretazione si può osservare quanto segue: essa non può avere origine da vibrazioni interne alla molecola H_2O perchè le frequenze di oscillazione dei composti idrogenati sono dell'ordine di grandezza delle migliaia di cm^{-1} e nemmeno sembra possa trattarsi di effetto rotazionale non risoluto. Credo piuttosto che essa sia da attribuirsi ad oscillazioni nei polimeri di H_2O. La notevole massa delle parti oscillanti e la tenuità del legame mi sembra possano giustificare la bassa frequenza di oscillazione.

Per controllare questa ipotesi ho eseguito fotografie a temperature variabili da 4° a 97°. È noto che l'aumento di temperatura favorisce la depolimerizzazione dell'acqua, pertanto le lastre eseguite con acqua calda dovrebbero mostrare le bande in questione meno intense.

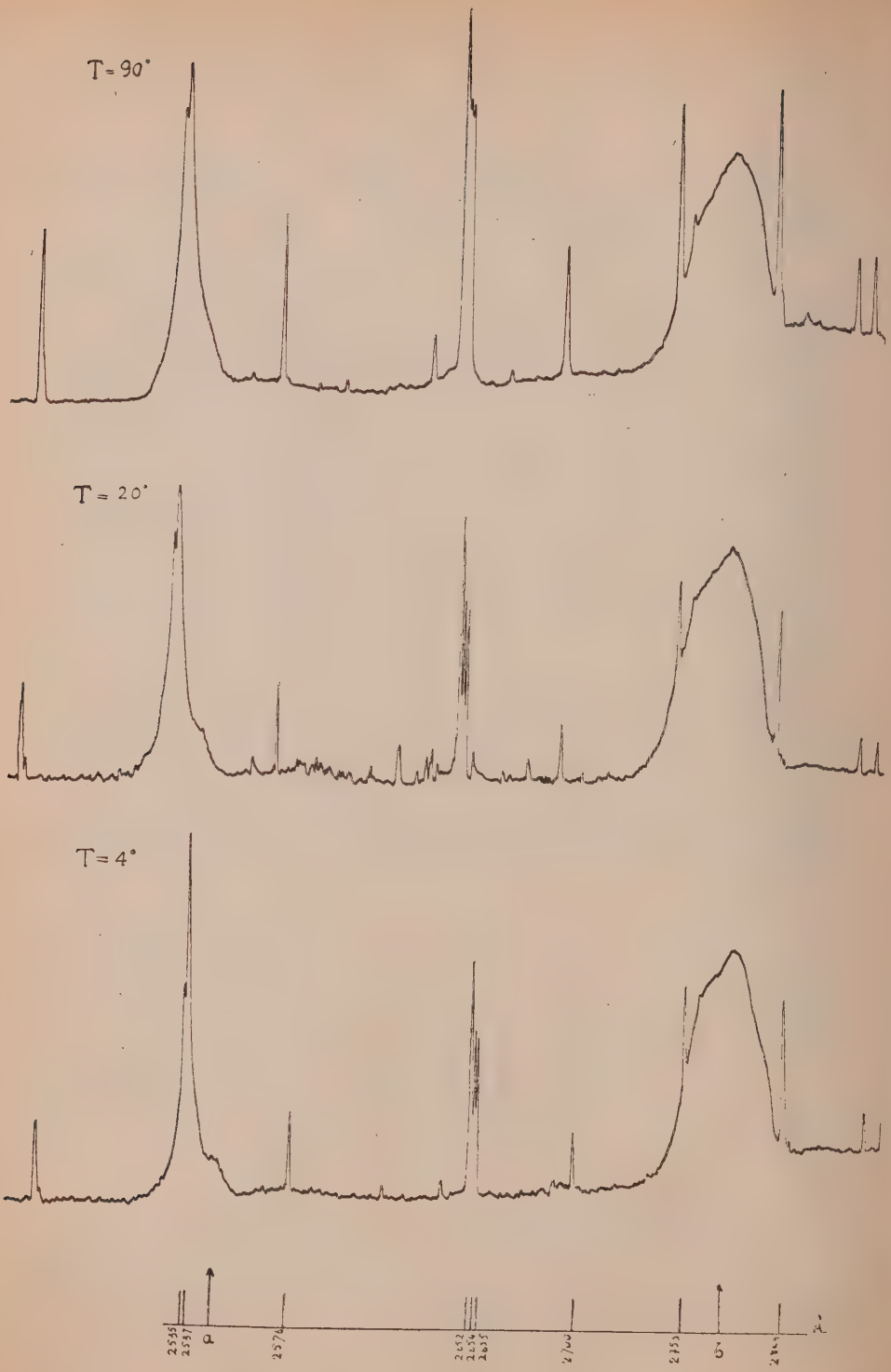
Nelle fotometrie figg. 1, 2, 3 corrispondenti ad acqua rispettivamente a 4°, 20°, 90° si può notare una netta variazione della banda che sembra avvalorare la nostra ipotesi. In essa le frecce contrassegnate con *a* e *b* indicano rispettivamente le bande di 140 e 3500 cm^{-1}.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 giugno 1931.

(3) R. Brunetti, «Rend. Lincei», 1930, 522; O. Specchia, ibid. 1930, 659; I. R. Rao, «Proc. Roy. Soc.», 130, 489, 1931 dove si trova anche un riassunto dei precedenti lavori sull'argomento.

(4) E. Segrè, «Rend. Lincei», 1930, 226.


T = 90°
T = 20°
T = 4°
2555
2537
ρ
2576
2692
2654
2635
2700
2755
σ
2804
λ

Si noti che nello spettro Raman del ghiaccio non si osserva una banda di frequenza corrispondente.

Nelle fotografie si scorgono anche tracce di una banda assai debole e diffusa, pure sensibile alla temperatura con un $\Delta\nu_R$ di circa 600 cm^{-1}.

La banda $\Delta\nu_R$ 3500 cm^{-1}, la più intensa dell'acqua, mostra il caratteristico cambiamento di forma al variare della temperatura. Tale fenomeno è già stato ampiamente discusso nei lavori citati.

Adempio ad un gradito dovere esprimendo i più vivi ringraziamenti al Dott. G. Todesco dell'Istituto di fisica « A. Righi » di Bologna, che ha eseguito le fotometrie.

Biologia. — *Studio sull'almirobiocenosi della laguna di Orbetello* [1]. Nota di N. Apolloni, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

In una Nota precedente [3] fu dato il resoconto delle ricerche operate per lo studio biologico del fondo della laguna di Orbetello, affidatomi dal prof. Brunelli, direttore di questo R. Laboratorio. A tale studio si è atteso dal luglio 1929 all'ottobre 1930.

Si è ritenuto opportuno, per una più profonda conoscenza della ecologia lagunare, di curare lo studio della fauna di fondo che conferisce, assai più del plancton, all'ambiente salmastro caratteristiche proprie.

La laguna di Orbetello, nella costa toscana, è costituita da due bacini divisi tra loro da un tombolo che si prolunga con una diga artificiale fino all'Argentario, i bacini di ponente e di levante sono separati dal mare rispettivamente per mezzo dei tomboli della Giannella e della Feniglia e comunicano con esso a mezzo dei canali di Nassa e di Fibbia il primo, e d'Ansedonia il secondo.

L'apertura del canale navigabile, parallelo a quello di Nassa, ha conferito in maniera assai più accentuata di prima, il carattere di laguna alla raccolta d'acqua costiera di Orbetello; l'associazione animale del fondo è del resto tipica comunità lagunare e sembrerebbe più giusto per i due bacini di Orbetello, usare il termine di laguna anzichè quello di stagno più comunemente adottato.

Le quattro stazioni per la raccolta del materiale furono scelte nel bacino di ponente della laguna perchè, essendo le condizioni chimico-fisiche dei

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia di Roma.

(2) Nella seduta del 21 giugno 1931.

(3) G. Brunelli e N. Apolloni, *Su alcune caratteristiche delle associazioni lagunari mediterranee*, « Rend. d. R. Acc. Naz. d. Lincei », vol. XI, 1° sem., fasc. VI, Roma, 1930.

due bacini quasi simili [1], comunicando essi ampiamente, si presuppone che la fauna del fango del bacino di levante non debba mostrare differenze sostanziali.

Il bacino riceve le acque dolci dell'Albegna mescolate alle tirreniche attraverso il canale di Fibbia, e quelle marine, per mezzo del canale di Nassa e di quello navigabile: il fango argilloso calcareo, giallo ocraceo presso lo sbocco del fiume, è assai scuro nel resto della laguna; contiene forte quantità di sostanza organica vegetale e animale e svolge odore di idrogeno solforato. La diversa natura del fondo e il differente grado di putrefazione dei detriti organici (*gyttja*) stabiliscono una distribuzione diversa dei vari individui nelle quattro stazioni. I campioni di fondo sono stati raccolti con un cavafanghi Eckman–Birge [2] e si è operata in Laboratorio la separazione dei differenti animali a mezzo di una serie di quattro stacci con maglie di diversa grandezza dirigendo sui stacci medesimi un getto d'acqua.

Il carattere di tale fauna, adattata ad una scarsa aereazione dell'ambiente e a forti sbalzi di temperatura e di salinità, si può stabilire segnalando gli invertebrati che vivono sopra o affondati nel fango e la loro frequenza, individuando cioè le *almirobiocenosi*.

Vengono qui appresso enumerate le specie rinvenute in laguna:

Celenterati.

* *Paractinia striata* Andres; * *Palythoa arenacea* Andres; * *Epizoanthus arenaceus* D. Ch.

Vermi.

* *Lumbriconereis latreilli* Aud. e Edw.; * *Platynereis dumerili* Aud. e Edw.; * *Nereis* (*Neanthes*) *caudata* D. Ch.; * *Phyllodoce* sp.; * *Eulalia* (*viridis*?) O. F. Müller; *Capitella capitata* Fabr.; *Spio fuliginosus* Clpde; * *Scolelepis fuliginosa* Clpde.

Crostacei.

Corophium acherusicum A. Costa; * *Gammarus locusta* L.; *Sphaeroma serratum* Leach.; * *Cymodoce spinosa* Risso; * *Idothea* sp.; *Cyathura carinata* Kroyer; * *Tanais cavolini* M. Edw.

(1) C. Maldura, *Le variazioni stagionali dei caratteri chimici e fisici delle acque della laguna di Orbetello*, « Boll. di Pesca, Piscic. e Idrobiologia », anno V, fasc. VI, Roma, 1919.

(2) E. Naumann, *Einführung in die Bodenkunde der Seen*, « Die Binnengewässer », Bd. IX, Stuttgart 1930.

Insetti.

Larve di *Chironomus* sp.

Briozoi.

* *Membranipora pilosa* L. var. *dentata* Hck.; * *Membranipora membranacea* L.; * *Membranipora lineata* L.; * *Membranipora lineata* L. var. *inarmata* n.; * *Microporella* (*Fenestralina*) *Malusii* Aud.; * *Chorizopora Brongniartii* Aud.; * *Tubulipora flabellaris* Fabr.; * *Hippoporina Pallasiana* Moll.

Molluschi.

Cylichna truncata F. e H.; *Bulla* (*Haminea*) *hydatis* L.; *Phasianella tenuis* Mich.; *Gibbula* (*Trochus*) *Adansoni* Payr.; *Trochus striatus* L.; *Truncatella subcilindrida* L. var.; *loevigata* Risso; *Hydrobia ulvae* Pen.; *Rissoa dolium* Nyst; *Rissoa Montagui* Payr.; *Rissoa cimex* L.; *Rissoa ventricosa* Desm.; *Cerythium vulgatum* Brug.; *Cerythium rupestre* Risso; *Bittium reticulatum* B. D. D.; *Triforis perversa* Chenu; *Murex trunculus* L.; *Nassa corniculum* Olivi; *Cyclonassa neritea* L.; *Marginella clandestina* Brocchi; *Mytilus edulis* L.; *Cardium edule* L.; *Cardium edule* var. *Lamarckii* Reeve; *Tapes rhomboides* Pen.; *Loripes lactea* L.; *Gastrana fragilis L.*; *Syndesmia ovata* Ph.

Nota. — Per le specie contrassegnate con l'asterisco ringrazio vivamente gli specialisti: prof. Calabresi, prof. Allen, dott. Di Caporiaco, prof. Torelli, prof. Neviani che ebbero la cortesia di classificare rispettivamente: Celenterati, Vermi, Anfipodi, Isopodi, Briozoi. Tutte le altre specie furono classificate dall'autore.

Nel centro del bacino diffusissima è l'*Hydrobia ulvae* Pen., trovata in masse assai imponenti anche nel fondo del mare di Watten [1], ove le condizioni ambientali sono particolarmente adatte a tale gasteropodo eminentemente eurialino e euritermo. Altri molluschi numerosi nel centro sono *Syndesmia ovata* Ph., *Cardium edule* L., *Loripes lactea* L., *Cerythium vulgatum* Brug. Tra i vermi, la *Capitella capitata* Fabr. – individuo *iliofilo*, secondo Dahl [2] – è assai numerosa nel centro del bacino ove il fenomeno putrefattivo della materia organica è molto intenso.

(1) W. E. Ankel, *Hydrobienschill und Hydrobienkalk*; e A. Schwarz, *Die Ausbreitungsmöglichkeiten der Hydrobien* (*Die Bildung eines einheitlichen Hydrobien-Sediments*), « Natur und Museum », Ber. 59, Heft 1–12, Frankfurt a. Main 1929.

(2) F. Dahl, *Oekologische Tiergeographie*, Erster Teil, Jena, 1921.

La *Capitella capitata* Fabr. nell'ambiante lagunare mostra, di fronte allo *Spio fuliginosus* Clpde., trovato in grande quantità dal Wilhelmi [1] nella sabbia melmosa ricca di detriti organici nel fondo del porto commerciale di Napoli e nello sbocco del canale nel porto di Mergellina, un adattamento e una resistenza assai maggiori. Molto meno numerosi sono fra i Policheti tutte le varie specie di *Nereis* e il genere *Phyllodoce*.

A Fibbia le acque dell'Albegna operano sugli organismi una sorta di selezione permettendo la vita agli individui che presentano una maggiore eurialinità, il numero di essi è assai ridotto rispetto a quello del centro della laguna; a Nassa compaiono forme litorali marine come le varie specie di *Rissoa* (*Rissoa ventricosa* Desm.; *R. cimex* L., *R. dolium* Nyst., *R. Montagni* Payr.), *Phasianella tenuis* Mich., *Marginella clandestina* Brocchi, *Trochus striatus* L. e individui di habitat semisalsi come *Bittium reticulatum* Da Costa, abbastanza diffuso e *Truncatella subcilindrica* L. var. *loevigata* Risso.

Un'*epifauna* abbondante vive sulle piante viventi in laguna e sui pali, costituita di individui sedentari come piccole Attinie, Balani, Mitili, colonie di Briozoi e individui pascolanti come *Hydrobia*, *Rissoa*, *Cerithium* ecc. gli Isopodi *Idothea* Sp., *Cymodoce spinosa* Risso, *Sphaeroma serratum* Leach. e *Tanais cavolini* M. Edw. e gli Anfipodi *Gammarus locusta* L. e *Corophium acherusicum* A. Costa.

Le piante raccolte nella laguna di Orbetello sono:

Alghe.

Feoficee: *Cladostephus verticillatus* Ag.; *Ectocarpus* sp.; *Padinia pavonia* Gaillon.

Rodoficee: *Ceramium tenuissimum* J. Ag.; *Polysiphonia* sp.

Cloroficee: *Chaetomorpha aerea* Kutz.; *Cladophora* sp.

Fanerogame.

Cymodea major Grande; *Ruppia maritima* L. var.; *cirrosa* Grande.

Nota. — Rivolgo al prof. Carano vivi ringraziamenti per la determinazione delle piante fatta da personale dell'Istituto Botanico da lui diretto.

*
* *

Nella laguna di Orbetello le indagini fatte riguardano lo studio qualitativo della fauna di fondo perchè la forte mortalità (*tanatocenosi*) cagionata

(1) J. Wilhelmi, *Die makroskopische Fauna des Golfes von Neapel, vom Standpunkt der biologischen Analyse des Wassers betrachtet. Entwurf einer biologischen Analyse des Meerwassers*, « Mitt. a. d. Kgl. Prüf. f. Wasserversorgung u. Abwasserbes. zu Berlin », Heft 16, 1922.

dalle ampie oscillazioni di temperatura e salsedine – nel centro del bacino i valori di tali proprietà oscillano da 0° a 28° e da 23,62 °/₀₀ a 48,42 °/₀₀ – rendeva difficile la ricerca quantitativa operata nel mare del Nord [1] negli Haffe baltici [2] a Puget Sound nello Stato di Washington [3].

I molluschi viventi a Orbetello, confrontati con le specie citate dal Pantanelli [4], raccolte in laguna quando le comunicazioni col mare erano assai limitate, mostrano qualche variazione, con aumento nel numero di individui di alcune specie (*Gibbula* (*Trochus*) *Adansoni* Payr. e *Syndesmia ovata* Ph., numerose ora assai più di prima); la scomparsa di altre (*Ervilia castanea* Montagu, *Kellia suborbicularis* Montagu, *Setia fusca* Ph., *Peringia obeliscus* Pal.) e l'immigrazione delle specie litorali viventi a Nassa; variazione che si può spiegare col maggiore afflusso di acque marine, in seguito all'allargamento dei canali di immissione, e con l'apertura del canale navigabile operata nel 1907 dalla Società Montecatini.

Per ogni individuo, in relazione ai diversi fattori ecologici, esistono in un determinato ambiente speciali condizioni di vita; con la variazione di tali fattori, nello stesso habitat si verifica una diversa distribuzione delle specie. Nella laguna di Orbetello, temperatura, salinità, natura del fondo, presenza maggiore o minore di sostanza organica, di ossigeno e di idrogeno solforato, mostrano come la fauna di fondo nelle quattro stazioni – ove tali fattori variano - subisca sensibili modificazioni; quella del centro del bacino, ove le condizioni di ambiente sono tipicamente lagunari, caratterizza la facies della laguna di Orbetello. Il raffronto tra questa fauna, quella delle

(1) H. Blegvad, *Food and Conditions of Nourishment among the communities of invertebrate animals found on or in the Sea-Bottom in Danish waters*, « Rep. of the Danish Biol. Stat. », XXII, Copenhagen, 1914; *On the food of Fish in the Danish waters within The Skaw.*, « Idem », XXIV, 1916; *Continued studies on the Quantity of Fish food in the Sea Bottom*, « Idem », XXXI, 1925; *Methoden der Untersuchung der Bodenfauna des Meerwasser*, « Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Abt. IX, teil 5, heft 2, 1928; P. Boysen Jensen, *Valuation of the Limfjord. I. Studies on the Fish-food in the Limfjord 1909-1917*, « Rep. of the Danish Biol. Station », XXVI, 1919; C. G. J. Petersen and P. Boysen Jensen, *Valuation of the Sea. I. Animal Life of the Sea-Bottom, its food and quantity*, « Idem. », XX, 1911; C. G. J. Petersen, *Valuation of the Sea. II. The animal communities of the Sea-Bottom and their importance for marine zoogeography.* « Idem », XXI, 1913; *On the animal Communities of the Sea-Bottom in the Skagerak, the Christiania Fjord and the Danish waters.* « Idem », XXIII, 1915; *A preliminary Result of the Investigations on the valuation of the Sea,* « Idem »; *The Sea-Bottom and its production of Fisch-Food.* « Idem », XXV, 1918.

(2) A. Willer, *Studien über das Frische Haff*, « Zeitschrift für Fischerei u. deren Hilfswissensch. », Bd. XXIII, Neudamm u. Berlin, 1925.

(3) F. M. Kirsop, *Preliminary study of the methods of examining the life of the sea-Bottom*, « Pub. Puget Sound Biol. Stat. », vol. 3, Washington, 1921-1925.

(4) D. Pantanelli, *Molluschi dello Stagno di Orbetello*, « Boll. d. Soc. Malac. Ital. », vol. XII, Pisa, 1887.

valli salse mesolane [1], degli stagni salmastri francesi [2] e delle lagune nordiche, con limitate oscillazioni di temperatura e di salinità [3], ci può fare ammettere con il prof. Brunelli [4] che la facies salmastra ha una propria fisionomia. Infatti nello Zuider Zee [5] vive l'*Hydrobia ulvae* Pen., e la *Capitella capitata* Fabr. con numerose altre specie rinvenute ad Orbetello, negli Haffe baltici i generi *Hydrobia, Mytilus, Idothea*, viventi anche nelle lagune mediterranee.

Come specie tipiche dell'*almirobiocenosi* della laguna di Orbetello prenderei, tra le viventi al centro del bacino ove i caratteri lagunari sono più spiccati, *Hydrobia ulvae* Pen. e *Capitella capitata* Fabr., perchè trovate anche in acque salmastre di latitudini differenti dalle nostre.

La conferma che la facies lagunare ha caratteristiche proprie si trova nell'identità tra la fauna fossile di formazioni salmastre (*Cardium edule* L., *Mytilus edulis* L., *Cerythium vulgatum* Brug., *Peringia* sp.) [6] e quella delle comunità lagunari viventi; quindi per confronto delle almirobiocenosi attuali con le specie fossili si può risalire al carattere più o meno salmastro di un terreno.

(1) D. Brighenti, *Ricerche biologiche sulle valli salse della Mesola*, « Boll. di Pesca, Piscic. e Idrob. », anno V, fasc. III, Roma, 1929.

(2) P. Gourret, *Les étangs saumâtres du midi de la France et leurs pêcheries*, « Ann. Mus. Hist. Nat. de Marseille », tome V, Mem. I, Marseille, 1897; *Topographie zoologique des étangs de Caronte, de Lobillon, de Berre et de Bolmon* etc., « Idem », tome IX, Marseille, 1907.

(3) Op. citata.

(4) G. Brunelli, *Le caratteristiche fisico-biologiche dell'ambiente lagunare con alcune deduzioni sulla tecnica della vallicoltura*, « Riv. di Biologia », vol. V, 1923; *Limnologia e ricerche lagunari*, « Atti del IV Congresso Inter. di Limnologia », Roma, 1929.

(5) H. C. Redeke, *Flora en Fauna der Zuiderzee*, Den Helder, 1922.

(6) E. Clerici, *La formazione salmastra nei dintorni di Roma*, « Rend. d. R. Acc. Naz. d. Lincei, vol. II, 1° sem., fasc. VI, Roma, 1893.

Biologia (Biologia vegetale). — *Sulla resistenza dello stolofillo di « Tulipa silvestris L. » alla penetrazione dei miceli* [1]. Nota di C. Cappelletti, presentata [2] dal Socio G. Gola.

Nel corso di ricerche su alcune infezioni fungine nei semi di *Tulipa* e di altre *Liliaceae*, ebbi occasione di estendere le osservazioni microbiologiche a vari organi della pianta, con lo scopo di chiarire le modalità di resistenza ed il meccanismo di penetrazione dei miceli in profondità dei tessuti.

È noto da una serie assai numerosa di ricerche, la relativa facilità offerta dalle radici delle *Liliaceae* a lasciarsi invadere da micorize endotrofiche in tutti i periodi della loro vita; specialmente dai miceli del tipo ficomicetoide descritti da Peyronel. Gli altri organi della pianta, specialmente quelli epigei, offrono una notevole resistenza all'attacco di miceli (parassiti o saprofiti) in genere; aumentando la recettività solo quando i tessuti, con l'avvicinarsi della fine del periodo vegetativo, perdono la loro turgescenza e si esauriscono. La resistenza alle infezioni è collegata strettamente con la vitalità dei tessuti, i quali nei periodi di più intensa attività funzionale sono forniti di zuccheri riduttori in proporzioni elevate e di elevata pressione osmotica. Il passaggio in periodo di riposo, sia con la produzione di bulbi, sia con la maturazione dei semi, è caratterizzato da un brusco abbassamento della percentuale di zuccheri negli organi epigei e da un collasso generale dei tessuti in via di mortificazione. Sullo studio dell'infezione in organi epigei, riferirò in altro lavoro.

Mi interessa ora di riferire sulle modalità di resistenza all'infezione di un organo sotterraneo, assai curioso e caratteristico di parecchie *Liliaceae*, che venne da Chiarugi [3] chiamato stolofillo, per il fatto che morfologicamente è costituito in parte dalla porzione fillare in parte dall'asse della pianta. È detto stolofillo un organo avente la duplice funzione di diffondere la pianta a guisa di un normale stolone, ed inoltre, grazie alla sua spiccata sensibilità geo–e fototropica, è in grado di portare il nuovo bulbo da esso originatosi, ad un livello optimum per la vita della pianta. Apparentemente lo stolofillo ha l'aspetto di una grossa radice a superficie biancastra, di forma quasi cilindrica. Esso può spostarsi verticalmente in

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1931.

(3) Chiarugi A. (1923), *Osservazioni anatomiche sopra i cosidetti stoloni (stolofilli) di Tulipa silvestris L.* « N. Giorn. Bot. Ital. », n. ser., vol. XXX, pp. 172–199. Rimando a questo lavoro per la trattazione morfologica dell'organo in questione.

basso od obliquamente in alto a seconda della profondità del bulbo nel terreno, e serve alla propagazione vegetativa della pianta.

Poichè lo stolofillo si sviluppa nella rizosfera a livello delle altre radici, quindi in un ambiente normalmente infetto da miceli micorizogeni, era interessante stabilire se anche quest'organo cadesse preda di detti miceli; potendosi in tal modo avere la propagazione dell'infezione micorizica anche nei bulbi di nuova formazione, ed eventualmente nelle tuniche stesse del bulbo, fin dai primi momenti di vita della pianta.

Per dette ricerche utilizzai sia colture di *Tulipa silvestris* L. in terreno comune, sia piante da molti anni naturalizzate nell'Orto Botanico di Padova [1]. Dall'esame di un buon numero di sezioni di stolofillo, praticate a diversi livelli sull'organo, non mi riuscì mai di osservare sviluppo di miceli nei tessuti parenchimatici dello stolofillo. Solo in un caso di uno stolofillo mal conformato, rinvenni poche ife. Evidentemente trattavasi di uno stolofillo in cattive condizioni vegetative, leso durante il suo accrescimento. Contemporaneamente esaminai le radici delle stesse piante, che trovai costantemente e largamente invase da miceli micorizogeni nello strato del parenchima corticale.

La mancata infezione dello stolofillo può venir spiegata con la rapidità con la quale quest'organo si allunga, spinto dalle attive segmentazioni del meristema intercalare, e per ciò il poco tempo di permanenza dell'organo nel terreno. Dirò subito a proposito che le mie osservazioni furono fatte subito dopo la produzione dello stolofillo, e più numerose a stolofillo adulto (cioè dopo la formazione del nuovo bulbetto), ed in ambedui i casi non li trovai infetti.

La causa della grande resistenza alle infezioni, dev'essere ricercata nella struttura anatomica dell'epidermide dello stolofillo. Esso infatti è protetto nello strato epidermico da una cuticola continua, sottile ma assai evidente, la quale è tutta increspata e quasi corrugata (fig. 1). Sotto allo strato cuticolare si osserva un ispessimento della membrana cellulosica in modo da formare un rivestimento continuo assai resistente attorno allo stolofillo. Allo strato epidermico segue uno strato cellulosico di notevole spessore, che sotto alcuni aspetti potrebbe interpretarsi di natura collenchimatica, quantunque l'ispessimento in corrispondenza degli angoli non sia molto evidente, e si diffonda a tutta la membrana. Sono piuttosto le porzioni contigue del primo e secondo strato cellulare che si ispessiscono, per aumentare la resistenza meccanica dell'organo. Una struttura del tutto simile si osserva anche nella cavità fistolosa dello stolofillo, la quale anche se si-

(1) Dette piante sono costantemente sterili a causa dell'alterato ciclo biologico nel nostro clima, che favorisce l'esaltazione della micorizia. Vedi a proposito: Cappelletti C. *La fioritura di Tulipa silvestris L. in rapporto alla nutrizione azotata.* « N. Giorn. Bot. Ital. » (in corso di stampa).

tuata in profondità, è pure tappezzata di cuticola (fig. 2); sotto di essa si riscontra una membrana notevolmente ispessita. Internamente alla cavità, si sviluppano dei tricomi per estroflessione delle cellule epidermiche, ed anche i peli sono sempre coperti dallo strato cuticolare.

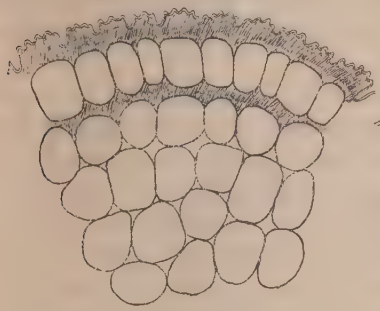


Fig. 1.

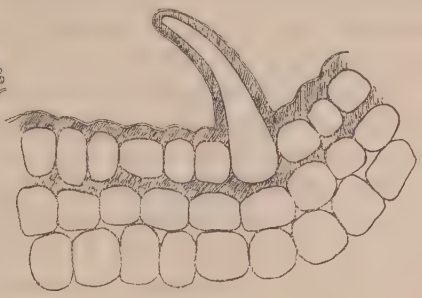


Fig. 2.

Fig. 1. — Struttura dell'epidermide dello stolofillo di *Tulipa silvestris*.
Fig. 2. — Struttura dei tessuti delimitanti la cavità fistolosa dello stolofillo.

Questi caratteri da soli, anche se i reperti anatomici sulla derivazione dell'apparato vascolare non lo confermassero, sarebbero sufficienti per far ritenere quest'organo di natura fillare e nettamente separato dalle radici.

La struttura meccanica dello strato epidermico è tale da essere di grave ostacolo alla penetrazione dei miceli micorizogeni. Per di più potei osservare la grande rapidità con la quale si possono rimarginare le eventuali ferite verificatesi sull'epidermide dello stolofillo, con la produzione di uno strato sugheroso profondo. È dunque un organo meccanicamente difeso e rapidamente cicatrizzabile; condizioni queste assai propizie per la sua immunità.

Alle osservazioni sui materiali cresciuti in natura, volli aggiungere alcune prove sperimentali partendo da bulbetti di *Tulipa silvestris* L.

Operai in soluzione nutritizia di Knop (diluita a metà), con bulbetti sterilizzati, privati della prima tunica papiracea. Lo sviluppo in coltura avviene con relativa facilità, avendo cura di mantenere l'apparato radicale al buio e le foglie esposte alla luce. Dopo lo sviluppo della prima foglia, infettai le prove rispettivamente con spore di *Penicillium* sp. e con miceli di *Mycogone Tulipae* Capp., *Rhizoctonia* isolata da *Nothoscordon fragrans* Kunth, e con un micelio isolato da radici di *Medicago sativa*, affette da mal vinato.

Miceli dunque a diversa virulenza, alcuni nettamente parassiti e con localizzazione radicale. Lo stolofillo si sviluppò in tutte le prove, e fu frequente anche la comparsa del doppio stolofillo. Il rapido sviluppo di tutti i germi inoculati fu assai dannoso alle radici che rapidamente manifestarono segni di necrosi con imbrunimento dello strato epidermico, mentre gli sto-

lofilli rimasero a lungo a contatto dei miceli invadenti la coltura senza manifestare segni di alterazione. In coltura acquosa lo stolofillo si accresce in un primo momento quasi verticalmente, poi si allunga rapidamente a guisa di spirale attorno al tubo di coltura risalendo anche verso l'alto in modo assai irregolare. Sono condizioni che ledono la sua sensibilità geo–e fototropica, non riuscendo a collocarsi nella posizione optimum necessaria all' ingrossamento del bulbetto.

L'esame microscopico di pezzi di radice e di stolofillo così trattati, ha messo in evidenza ancora una volta l'altissima resistenza di quest'organo alla penetrazione dei germi. In molti casi potei osservare l'epidermide dello stolofillo coperta di miceli, senza che però questi riuscissero a penetrarlo. Per contro le radici si infettarono rapidamente: con danni non molto rilevanti con il *Penicillium* che ha tendenza a crescere in superficie anche sulle radici ed a sporificare; più violenti gli attacchi con altri miceli, che occuparono parecchi strati del parenchima corticale provocando alterazioni in tutte le cellule anche più profondamente situate.

Sulla penetrazione dei funghi parassiti delle radici, si è recentemente occupato Fahmy [1], dimostrando come l'infezione si manifesti prima con la formazione attorno alle radici di un manicotto di ife a guisa di una micoriza ectotrofica, e solo più tardi avvenga la perforazione delle cellule da parte delle ife. Sullo stolofillo si può avere il manicotto di ife all'esterno, ma queste non riescono a perforare la cuticola e lo strato cellulosico sottostante, mentre all'incontro le radici, sprovviste di cuticola e con membrane sottili, sono facile preda di molti miceti.

Dall'osservazione degli individui crescenti in natura e dalla riprova sperimentale, usando miceli a diversa virulenza, ho potuto dimostrare come la mancata penetrazione dei miceli negli stolofilli sia da attribuirsi alla particolare struttura epidermica di quest'organo, che esclude ogni infezione, sia di germi micorizogeni, sia di altri miceli più o meno saprofiti costituenti la microflora del terreno. Grazie a queste protezioni la pianta assicura alla gemma uno stato di assoluta sterilità, cosicchè la vita simbiotica radicicola, va in questo caso considerata come un fenomeno successivo allo sviluppo di nuove radici e non è legata ad eventuali infezioni contratte dalla pianta madre, o nel tragitto della gemma nella sua vita stolofillare.

(1) Fahmy T., *Étude de la pénétration du champignon « Fusarium vasinfectum » Atk. var. « aegyptiacum » T. Famy, dans les racines du cotonnier.* « Bull. Soc. Bot. Genève », vol. XXII, pp. 62-125, 1931.

INDICE DEL VOLUME XIII, SERIE VI. — RENDICONTI

1931

INDICE PER AUTORI

A

Abetti G. — « Altezza della Cromosfera nel 1930 ». 639.

Airoldi M. — « Di alcune corallinacee fossili delle Canarie ». 439, 532.

Amadori M. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e p–toluidina ». 72.

Id. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e o-fenetidina, o-anisidina, o–toluidina. - I Composti glucosidici ». 195.

Id. — « Derivati mercurici di bromofenoli bivalenti ». 371.

Andruetto G. — « Relazione tra i simboli di Riemann relativi a due varietà, una immersa nell'altra ». 338.

Id. — « Sulle equazioni intrinseche dell'equilibrio elastico ». 427, 489.

Antoniani C. — « Sul comportamento in campo elettrico dei complessi colloidali umico minerali ». 524.

Apolloni N. — « Studio sull'almirobiocenosi della laguna di Orbetello ». 931.

Armellini G. — « Commemorazione del Socio Straniero *Giovanni Hagen* ». 239, 242, 301.

Armellini G. e Armellini-Conti G. — « Osservazioni meridiane di stelle di Eros ». 3.

Id. — « Sopra la teoria delle variabili della famiglia di Mira Ceti ». 313.

Id. — « Il diametro orizzontale del Sole nel 1929 e nel 1930 ». 635.

B

Barba G. — « Parallelismo generalizzato in una V_3 ». 923.

Barbieri G. A. — « Nuove ricerche sui molibden–otto-cianuri ». 375.

Id. — « Contributo alla conoscenza dei composti del rodio ». 382, 433.

Id. — « Sui composti dell'argento bivalente e dell'argento trivalente ». 882.

Belluigi A. — « Sulla depressione gravimetrica di Carpaneto ». 692, 745.

Bernardini G. — « Sulla tecnica degli spettrografi magnetici per elettroni lenti ». 194, 361.

Betti M. e Pratesi P. — « Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche ». 646.

Blanch G. A. — « Su alcune proprietà della silice residuale dell'attacco della leucite con acidi ». 172, 327.

Boggio T. — « Relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi in rappresentazione conforme ». 333.

Id. — « Sull'operatore di Laplace e nelle equazioni dell' elasticità negli spazi curvi ». 412.

Bolaffi A. — « Su alcune frazioni lipoidali dell'adenocarcinoma del topo ». 298.

Bompiani A. — « Sulle superficie integrali di due o più equazioni a derivate parziali del 3° ordine ». 814.

Bonino G. B. e Brüll L. — « Spettro Ra-

man e costituzione chimica in alcuni cloroetileni ». 208, 275.

Bonino G. B. e Brüll L. — « Sullo spettro Raman del dicloro-bromometano ». 705, 789.

Id. e Cella P. — « Spettro Raman di derivati idrogenati della naftalina ». 705, 784.

Bonvicini D. — « Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici ». 594.

Bordoni U. — A nome dell'Ass. Elettrotecnica italiana presenta il volume del 35° Congresso di Trieste e ne parla. 552.

Bortolotti E. — « Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata ». 19.

Id. — « Una generalizzazione del calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata ». 32, 104.

Broggi U. — « Sulla risoluzione delle equazioni algebriche ». 347.

Id. — « Sull'integrazione delle equazioni lineari alle differenze con coefficienti costanti ». 354, 420.

Id. — « Su di un problema d'interpolazione ». 818.

Brüll L. — Vedi Bonino G. B.

Brunetti R. e Ollano Z. — « Sulla costituzione dell'acido nitrico in soluzione acquosa ». 52.

C

Cabras A. — « Sull'espressione del lavoro negli spazi generalizzati ». 32, 428.

Caccioppoli R. — « Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche ». 185, 263.

Id. — « Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti ». 498.

Id. — « Sopra un metodo di sommazione nel calcolo delle matrici infinite ». 507, 569.

Cagnasso A. — Vedi Cambi L.

Calapso R. — « Sui sistemi nulli osculatori alle asintotiche di una data superficie ». 183.

Id. — « Un teorema sullo spigolo di Green ». 185, 266.

Calapso R. — « Studi sintetici di geometria proiettiva differenziale ». 350.

Id. — « Intorno alla prima direttrice di Wilczynski ed a problemi che a questa si connettono ». 417.

Id. — « Sulle superficie gobbe di terzo grado (del tipo di Cayley) legate al punto di una data superficie ». 495.

Caldonazzo B. — « Vortice in un campo limitato da un cardioide ». 869.

Cambi L. e Cagnasso A. — « Nuova serie di nitrososolfosali di ferro: nitroso-ditiocarbammati ». 254.

Id. e Id. — « Nitroso-ditiocarbammati del cobalto ». 330, 404.

Id. e Id. — « Ditiocarbammati e nitroso-ditiocarbammati di ferro ». 718, 809.

Id. e Szegö L. — « Xantogenati e nitroxantogenati ». 93.

Id. e Id. — « Suscettibilità magnetica, spettri d'assorbimento e costituzione dei nitrosolfuri del ferro ». 99, 168.

Cannicci G. — « Sulla flora batterica di alcuni pesci ». 536.

Cappelletti C. — « Sulla resistenza dello stolofillo di *Tulipa silvestris L.* alla penetrazione dei miceli ». 899, 937.

Cecchini G. — « Sulla grandezza assoluta delle Cefeidi ». 874.

Cella P. — Vedi Bonino G. B.

Cibrario M. — « Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali ». 26, 113.

Cioranescu N. — « Sur la sommation des séries trigonométriques ». 507, 577.

Cisotti U. — « Correnti circolatorie locali intorno a regioni di acqua morta ». 85.

Id. — « Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert al teorema di Kutta-Joukowski e delle azioni dinamiche sopra profili cuspidati ». 92, 161.

Id. — « Circolazione intorno a regioni di acqua morta limitate da una parete poligonale e da un pelo libero ». 168, 247.

Id. — « Determinazione della funzione di variabile complessa regolare in una

corona circolare nota: la parte reale sulla circonferenza esterna e la parte immaginaria sull' interna ». 395.

COLLA C. — Vedi FERRARI A.

COLLA S. — « Sui gas contenuti in "Valonia Utricularis (Roth) Ag." ». 149.

ID. — « Sui gas contenuti in alcune alghe brune ». 160, 232.

COLONNETTI G. — « Sulla teoria degli archi ad una o due cerniere ». 512, 684.

CONFORTO F. — « Parallelismo negli spazi funzionali continui ». 32, 173.

ID. — « Formalismo matematico in uno spazio funzionale continuo retto da un elemento lineare di seconda specie ». 507, 562.

CONSIGLIO A. — « Potenza di una corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo di Joukowski ». 866.

CORBELLINI A. — « Sulla stereoisomeria dei derivati dell' 1 1'-dinaftile ». 702.

CORBELLINI A. — Vedi RAVAZZONI C.

CORBELLINI G. — « Deli'associabilità di *m* congruenze di curve nello spazio di *n* dimensioni ». 593, 655.

CRENNA M. — « Il postulato di Ritz-La Rosa e le Cefeidi ». 44, 124.

CROCCO G. A. — « Sui corpi aerodinamici a resistenza negativa ». 641, 906.

ID. — I corpi aerodinamici a resistenza negativa (Corpi portanti). 809.

D

D'ANCONA U. e VOLTERRA-D'ANCONA L. — « Osservazioni preliminari sulle modificazioni idrobiologiche avvenute nel Lago di Nemi durante e in seguito ai lavori di abbassamento eseguiti per il ricupero delle navi Romane ». 217.

DANTONI G. — « Sulla definizione di integrale ». 258.

DEBENEDETTI A. — « La determinazione dell'angolo degli assi ottici di minerali biassici col piatto di Fedorow ». 194, 287.

DEL CHIARO A. — « Sulle funzioni omogenee ». 475.

DE MARCHI L. — « Commemorazione del Socio Straniero *Fridtjof Nansen* ». 323, 391.

DE MIRA FERNANDES A. — « Proprietà di alcune connessioni lineari ». 118, 179.

ID. — « Direzioni concorrenti ». 508, 587.

ID. — « Centri di gravità delle sezioni piane di un corpo omogeneo ». 593, 667.

DESIO A. — « Sulla presenza dell'Oligocene in Sirtica (Libia) ». 208.

DI FILIPPO D. — « Le formule di Biot–Mollweide e di Pinto in confronto coi valori degli elementi magnetici della Somalia ». 186.

E

EINAUDI R. — « Sopra le relazioni che intercedono fra le equazioni variazionali di Eulero e le equazioni canoniche della Meccanica ». 762.

F

FEDERICI M. — « Su di un nuovo tipo di cavo elettrico disuniforme ». 128.

FENCHEL W. — « Sulle onde di canale di tipo permanente ». 740.

FERRARI A. e COLLA C. — « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. – VIII Analisi termica e rongtenografica del sistema Li_2Br_2 — $MgBr_2$ anidri ». 78.

FINZI B. — « Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione unica – Funzionali ». 8.

ID. — « La relatività generale nei fenomeni di irradiamento atomico ». 119.

FINZI G. — « Sostanze anatossigene e caratteri speciali delle anaesotubercoline ». 235.

FRERI M. — Vedi QUILICO A.

G

GALAMINI A. — « Decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti maschi castrati ». 382.

ID. — « Decorso del digiuno e della rialimentazione in femmine di ratti castrate ». 382.

Galamini A. e Lamanna G. — « Modificazione dei tassi alcoolico e idremico in seguito a somministrazione di alcool e acqua ». 143.

Id. e Serianni E. — « Modificazioni nei tassi glicemico ed idremico in seguito a somministrazione di glicosio ed acqua ». 234.

Galanti G. — « Algoritmi di calcolo motoriale ». 512, 861.

Garbasso A. (Presidente). — Presenta tre plichi suggellati inviati dai sigg. *Remo de Fazi* e *Pietro Pisa*. 81.

Id. — Annuncia la morte del Socio Nazionale *Filippo Angelitti* e dei Soci Stranieri *Paul Appel* ed *Eugenio Gley*. 241.

Id. — Annuncia la morte del Socio Straniero *Alberto Brachet*. 391.

Id. — Presenta un plico suggellato depositato presso la Segreteria dell'Accademia dall'avv. *Manferoce*. 391.

Id. — Ringrazia il Socio L. De Marchi per la commemorazione del Socio Straniero *Fridtjof Nansen*. 391.

Id. — Annunzia la scomparsa del Socio *R. Nasini*. 551.

Id. — Presenta un plico suggellato pervenuto all'Accademia da parte del signor *R. Bendandi*. 552.

Id. — Comunica che è giunta una Nota del dott. *Gerundo* di Topeka Kansas, senza la consueta presentazione di alcun Socio. Si dà incarico ai soci E. Marchiafava e S. Baglioni di esaminarla. 552.

Gatti D. — Vedi Mascarelli L.

Giorgi G. — « Nuove idee sulla teoria della relatività ». 469.

Guareschi C. — « L'otocisti degli Anfibi Urodeli è un sistema a mosaico. (Dimostrazione sperimentale) ». 630.

Gugino E. — « Sul comportamento delle forze di reazione nel moto di un qualsivoglia sistema materiale sollecitato da forze posizionali ». 185, 269.

H

Hatzidakis N. — « Quelques observations sur le travail de M. Sakellariou: "Sur une classe des mouvements centraux" ». 692, 744.

Hostinský B. — « Sur l'integration des transformations fonctionnelles lineaires ». 921.

K

Krall G. — « Qualche complemento alla teoria degli invarianti adiabatici secondo T. Levi-Civita ». 852.

Id. — « Trasformazioni adiabatiche nei sistemi vibranti nell'intorno di configurazioni stabili di equilibrio ». 924.

L

Laboccetta L. — « Le forme fondamentali delle costanti discontinue come funzioni circolari ». 822.

Id. — « Una nuova classe di funzioni circolari ». 852, 912.

Id. — « Generazione geometrica delle funzioni numeriche Frx, Cmx, Rx ad essa associate ». 852.

Lamanna G. — Vedi Galamini A.

Lampariello G. — « Sull' integrale olomorfo e nullo per $x = 0$ dell'equazione $x\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ». 13.

Id. — « Sull' impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi ». 688.

Id. — « Propagazione di onde nei mezzi elastici isotropi anche non omogenei ». 856.

La Rosa M. — « Nuova prova dell'influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce. – Spiegazione balistica della legge di Miss Leavitt ». 399, 469.

Levi-Civita T. — Commemora il Socio Straniero *Paul Appel*. 201.

Id. — « A proposito delle Note dei sigg. Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali ». 640, 715.

Id. — Per incarico dei colleghi Maggi G. A. e Cisotti U., presenta in omaggio il vol. IV. dei « Rendiconti » del Seminario Matematico Fisico di Milano. 711.

Lombardini M. — « Considerazioni geometriche per l'analisi periodale ». 683, 748.

Lo Surdo A. — « Lampade termoioniche con caduta di potenziale sulla griglia ». 459.

M

Maggi G. A. — « Dimostrazione di una proprietà attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie ». 324.

Maggini M. — « Un metodo diretto per determinare la λ eff. interferometrica ». 358.

Majorana E. — « Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno ». 58.

Majorana Q. — « Di alcune nuove ricerche fotoelettriche ». 318.

Id. — « Di alcuni nuovi fatti constatabili con le comuni cellule fotoelettriche ». 463.

Id. — « Sul nuovo effetto fotoelettrico nelle cellule a metalli alcalini ». 641.

Malossi L. — « I solfati doppî del bismuto coi metalli alcalini. – II. Solfati doppî del bismuto e litio ». 775.

Mammana G. — « Sul prodotto di serie sommabili secondo Cesaro ». 507, 662, 848.

Manarini M. — « Sulla teoria degli strati magnetici ». 190.

Marchiafava E. — Presenta in omaggio la 2ª edizione del trattato « Infezione malarica » e ne parla. 551.

Id. — Trae occasione della presentazione del trattato « Infezione malarica » per ricordare come nella prima edizione ebbe a collaborare col Socio A. Bignami che commemora brevemente. 551.

Marino A. — « Teorema sulle reti elettriche passive ». 66.

Id. — « Condizioni di equilibrio in un ponte di Wheatstone nelle misure ad audio e radio frequenza ». 526, 606.

Mascarelli L. e Gatti D. — « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. – VIII: Nuovi derivati 2-2′-bisostituiti del difenile ». 887.

Mentré P. — « Sur les formes différentielles d'un complexe de droites ». 507, 583.

Miranda C. — « Estensione delle equazioni integrali lineari singolari dei teoremi di Hilbert-Schmidt e di Picard ». 683, 719.

Mitolo M. — « Sul consumo di glicosio da parte del sistema nervoso centrale isolato e sopravvivente di "Bufo v." ». 229.

Moisil Gr. C. — « Sur la généralisation des fonctions conjuguées ». 118.

Monaldi V. — « L'azione dell'alcool sul metabolismo basale e sul quoziente respiratorio nell'uomo normale ». 382.

N

Nalli P. — « Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann ». 593, 669.

Id. — « Trasporti rigidi di vettori sulle superficie ». 593, 734.

Id. — « Trasporti rigidi e relatività ». 837.

Nicolesco M. — « Sur une équation aux dérivée partielles caracterisant les moyennes de M. Picone ». 683, 831.

Nováková B. — « Misure microfotometriche della riga Hα al centro ed al lembo del sole ». 513.

O

Occhialini G. — « La misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali » 45.

Id. — « Uno spettrografo magnetico per raggi β emessi da sostanze debolmente radioattive ». 881.

Ollano Z. — Vedi Brunetti R.

Ongaro D. — « Sulla presenza di alluminio nelle foglie e nei succhi intracellulari del gelso ». 202.

P

Palozzi G. — « Una proprietà caratteristica delle tangenti di Darboux ». 485.

Parravano N. (Accademico Segretario). — Presenta i libri giunti in dono segnalandone alcuni ». 81, 243, 291, 552, 711.

Pastori M. — « Sui tensori emisotropi ». 109.

Pensa A. — « Osservazioni e considerazioni sulla struttura della corteccia cerebellare dei mammiferi ». 332.

Perotti R. — « Per la lotta contro la " stretta " dei cereali ». 547.

Id. — « La mico-batteriosi ». 550, 627.

Petri L. — « Sopra un metodo per riconoscere la presenza eccezionale di mercurio nei tessuti vegetali ». 331.

Pincherle S. — « Sopra uno speciale operatore funzionale ». 555.

Pirrone F. — « Azione delle alghe marine sulla velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni zuccherine ». 137.

Id. — Vedi Sanzo L.

Pratesi P. — « Sulle reazioni di addizione ai composti organici non saturi ». 705, 779.

Id. — Vedi Betti M.

Id. — Vedi Scagliarini G.

Principi P. — « Florula quaternaria di Magliano de' Marsi sull'orlo della conca fucense ». 211.

Pugno G. M. — « Contributo alla trattazione dei sistemi elastici doppiamente iperstatici ». 508.

Q

Quilico A. e Freri M. — « Sopra i neri di azopirrolo ». 282, 377.

R

Racah G. — « Caratteristiche delle equazioni di Dirac e principio di indeterminazione ». 424.

Ravazzoni C. e Corbellini A. — « Sull'1-metil 2-nitro 3- ossibenzolo ». 132.

Restaino S. — Vedi Zambonini F.

Rimini C. — « Sulla flessione delle superficie ». 725.

Rivera V. — « Fattori eccitativi dell'accrescimento di neoplasmi vegetali da « B. tumefaciens ». 550, 621.

Roberti G. — « L'Idrogenazione dei composti azotati contenuti nel catrame primario ». 527.

Rodolico F. — « Vesuviana di Monte Spinosa nel Campigliese ». 213.

Id. — « Diopside e tremolite del Monte Spinosa nel Campigliese ». 705.

Rossi B. — « Ricerche sull'azione del Campo magnetico terrestre sopra i corpuscoli della radiazione penetrante ». 47.

Id. — « Assorbimento e diffusione della radiazione corpuscolare penetrante nel piombo e nel ferro ». 527, 600.

S

Sacco F. — « Offre in omaggio la Nota del suo aiuto *R. Peretti*: " Osservazioni glaciologiche in Val di Vizze " ». 243.

Sansone G. — « Sulla convergenza parziale degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. Estensione del teorema di Kolmogoroff sugli sviluppi in serie di Fourier ». 842.

Sanzo L. e Pirrone F. — « Azione dell'acqua marina sulla fermentazione alcoolica ». 140.

Id. e Id. — « Acqua di mare irradiata con raggi U. V., e sua azione sulla velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio ». 613.

Scagliarini G. e Pratesi P. — « Sulla reazione fra nitroprussiato sodico e solfuri ». 199.

Segre B. — « Intorno al problema di Poincarè della rappresentazione pseudoconforme ». 676.

Segrè E. — « Nuove bande Raman dell'acqua ». 929.

Serianni E. — Vedi Galamini A.

Serini R. — « Teoria della esperienza di Melde ». 62.

Id. — « Propagazione delle vibrazioni trasversali in una corda finita con resistenza del mezzo ». 354.

Id. — « Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione ». 503.

Severi F. — « Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche ». 795.

Somigliana C. — « Sulla variabilità della massa ». 804.

Sorrentino S. — « Il monte La Queglia in Abruzzo ». 617.

Specchia O. — « Spettro Raman dello jone SO_4 ». 701, 754.

Straneo P. — « Intorno alla " teoria unitaria " della gravitazione e dell'elettricità. – I. Base fisico-geometrica per una conseguente deduzione delle equazioni di campo ». 194, 364.

Id. — « Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità – II. Posizione e prima discussione delle equazioni di campo ». 695.

Id. — « Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità. III. Ancora qualche conseguenza delle equazioni unitarie ». 770.

Szegö L. — Vedi Cambi L.

T

Tallarico G. — « Trattattamento dei semi di grano nella pianta madre. Predeterminazione funzionale ». 154.

Id. — « Il sovescio intercalare tempestivo in granicoltura ». 160, 224.

Id. — « Il valore biologico dei prodotti del suolo letamato o concimato » 223, 294.

Id. — « La conservazione e la produttività dei semi del grano. Predeterminazione funzionale ». 893.

Id. — « Il volume delle cariossidi di grano in relazione col loro valore nutritivo ». 899.

Tenani M. — « Contributo alla conoscenza delle maree dell'Oceano artico ». 879.

Teodoriu L. — « Sur les zéros de la dérivée d'une fonction holomorphe ». 508, 591.

Théodoresco N. — « Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac ». 185, 342.

Tricomi F. « Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo ». 407.

Id. — « Ancora sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo ». 478.

Tonelli L. — « Un teorema sulla derivazione delle serie ». 163.

Tonon A. — « Sulla struttura delle gemme del gelso e del loro sviluppo ». 442, 541.

V

Valle G. — « Ricerche sperimentali sulla scarica a bagliore ». 595.

Villa M. — « Sulle singolarità della Jacobiana di $r + 1$ ipersuperficie dello spazio ad r dimensioni ». 574.

Vinassa de Regny P. — « I depositi di Ghelelli, del Galikoma e del Lago Afrera nella depressione dàncala ». 99.

Id. — « Valenza e simmetria ». 642.

Viola T. — « Proprietà notevoli di funzioni continue da una parte ». 731.

Id. — « Sulla derivata destra di una funzione continua verso destra e derivabile verso destra ». 828, 918.

Vitali G. — « Sul calcolo di una lente ». 701, 767.

Id. — « Un risultato di F. Hausdorff e la compressibilità della materia ». 903.

Volterra E. — « Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio ». 32.

Volterra V. — Presenta in omaggio il suo volume: « Leçons sur le Theorie mathématique de la lutte pour le vie ». 263.

Volterra-D'Ancona L. — Vedi D'Ancona U.

Vranceanu G. — « Sopra i sistemi anolonomi a legami indipendenti dal tempo ». 38.

Z

Zambonini F. e Restaino S. — « Solfati di praseodimio e di tallio talloso ». 650.

Zoja R. — « Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di altezza variabile ». 520, 692.

Id. — « Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare con dimensioni comunque variabili ». 760.

INDICE PER MATERIE

A

Astronomia. — « Altezza della Cromosfera nel 1930 ». Abetti G. 639.
— « Sopra la teoria di variabili della famiglia di Mira Ceti ». Armellini G. 313.
— « Il diametro orizzontale del Sole nel 1929 e nel 1930 ». Id. 635.
— « Osservazioni meridiane di stelle di Eros ». Armellini G. e Armellini-Conti G. 3.
— « Sulla grandezza assoluta delle Cefeidi ». Cecchini G. 874.
— « Il postulato di Ritz-La Rosa e le Cefeidi ». Crenna M. 44, 124.
— « Un metodo diretto per determinare la λ eff. interferometrica ». Maggini M. 358.
— « Misure microfotometriche della riga Hα al centro ed al lembo del sole ». Nováková B. 513.

B

Biologia. — « Studio sull'almirobiocenosi della laguna di Orbetello ». Apolloni N. 931.
— « Sulla flora batterica di alcuni pesci ». Cannicci G. 536.
— « Sui gas contenuti in "Valonia Utricularis (Roth) Ag." ». Colla S. 149.
— « Sui gas contenuti in alcune alghe brune ». Id. 160, 232.
— « Osservazioni preliminari sulle modificazioni idrobiologiche avvenute nel Lago di Nemi durante e in seguito ai lavori di abassamento eseguiti per il ricupero delle navi Romane ». D'Ancona U. e Volterra-D'Ancona L. 217.
— « Sostanze anatossigene e caratteri speciali delle anaesotubercoline ». Finzi G. 235.
Biologia. — « L'otocisti degli Anfibi Urodeli è un sistema a mosaico. (Dimostrazione sperimentale) ». Guareschi C. 630.
— « Osservazioni e considerazioni sulla struttura della corteccia cerebellare dei mammiferi ». Pensa A. 332.
— « Trattamento dei semi di grano nella pianta madre. Predeterminazione funzionale ». Tallarico G. 154.
— « Il sovescio intercalare tempestivo in granicoltura ». Id. 160, 224.
— « Il valore biologico dei prodotti del suolo letamato o concimato ». Id. 223, 294.
— « La conservazione e la produttività dei semi del grano. Predeterminazione funzionale ». Id. 893.
— « Il volume delle cariossidi di Grano in relazione col loro valore nutritivo ». Id. 899.
Botanica. — « Sulla resistenza dello stolofillo di *Tulipa silvestris L.* alla penetrazione dei miceli ». Cappelletti C. 899, 937.
— « Per la lotta contro la « stretta » dei cereali ». Perotti R. 547.
— « Le mico-batteriosi ». Id. 550, 627.
— « Fattori eccitativi dell'accrescimento di neoplasmi vegetali da "B. tumefaciens" ». Rivera V. 550, 621.
— « Sulla struttura delle gemme del gelso e del loro sviluppo ». Tonon A. 442, 541.

C

Chimica. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-toluidina ». Amadori M. 72.
— « Prodotti di condensazione tra glucosio e o-fenetidina, o-anisidina, o-toluidina. - I. Composti glucosidici ». Id. 195

Chimica. — « Derivati mercurici di bromofenoli bivalenti ». Id. 371.
— « Parallelismo generalizzato in una V_3 ». Barba G. 923.
— « Nuove ricerche sui molibden-otto-cianuri ». Barbieri G. A. 375.
— « Contributo alla conoscenza dei composti del rodio ». Id. 382, 433.
— « Sui composti dell'argento bivalente e dell'argento trivalente ». Id. 882.
— « Sullo sdoppiamento ottico delle aldeidi racemiche ». Betti M. e Pratesi P. 646.
— « Su alcune proprietà della silice residuale dell' attacco della leucite con acidi ». Blanch G. A. 172, 327.
— « Spettro Raman e costituzione chimica in alcuni cloroetileni ». Bonino G. B. e Brüll L. 208, 275.
— « Sullo spettro Raman del dicloro-bromometano ». Id. 705, 789.
— « Spettro Raman di derivati idrogenati della naftalina ». Bonino G. B. e Cella P. 705, 784.
— « Sulla costituzione dell'acido nitrico in soluzione acquosa ». Brunetti R. e Ollano Z. 52.
— « Nuova serie di nitrososolfosali di ferro: nitroso-ditiocarbammati ». Cambi L. e Cagnasso A. 254.
— « Nitroso-ditiocarbammati del cobalto ». Id. 330, 404.
— « Ditiocarbammati e nitroso–ditiocarbammati di ferro ». Id. 718, 809.
— « Xantogenati e nitroxantogenati ». Cambi L. e Szegö L. 93.

Commemorazioni. — « Commemorazione del Socio Straniero *Giovanni Hagen* ». Armellini G. 239, 242, 301.
— « Commemorazione del Socio Straniero *Fridtjof Nansen* ». De Marchi L. 323, 391.
— « Commemorazione del Socio Straniero *Paul Appel* ». Levi-Civita T. 201.

F

Fisica. — « Sul comportamento in campo elettrico dei complessi colloidali umico minerali ». Antoniani C. 524.

Fisica. — « Sulla tecnica degli spettrografi magnetici per elettroni lenti ». Bernardini G. 194, 361.
— « Sopra le relazioni che intercedono fra le equazioni variazionali di Eulero e le equazioni canoniche della Meccanica ». Einaudi R. 762.
— « Su di un nuovo tipo di cavo elettrico disuniforme ». Federici M. 128.
— « Nuova prova dell' influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce. Spiegazione balistica della legge di Miss Leavitt ». La Rosa M. 399, 469.
— « Lampade termoioniche con caduta di potenziale sulla griglia ». Lo Surdo A. 459.
— « Dimostrazione di una proprietà attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie ». Maggi G. A. 324.
— « Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno ». Maiorana E. 58.
— « Di alcune nuove ricerche fotoelettriche ». Maiorana Q. 318.
— « Di alcuni nuovi fatti constatabili con le comuni cellule fotoelettriche ». Id. 463.
— « Sul nuovo effetto fotoelettrico nelle cellule a metalli alcalini ». Id. 641.
— « Sulla teoria degli strati magnetici ». Manarini M. 190.
— « Teorema sulle reti elettriche passive ». Marino A. 66.
— « Condizioni di equilibrio in un ponte di Wheatstone nelle misure ad audio e radio frequenza ». Id. 526, 606.
— « La misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali ». Occhialini G. 45.
— « Uno spettrografo magnetico per raggi β emessi da sostanze debolmente radioattive ». Id. 881.
— « Ricerche sull'azione del Campo magnetico terrestre sopra i corpuscoli della radiazione penetrante ». Rossi B. 47.
— « Assorbimento e diffusione della radiazione corpuscolare penetrante nel piombo e nel ferro ». Id. 527, 600.
— « Nuove bande Raman dell' acqua ». Segrè E. 929.
— « Spettro Raman dello jone SO_4 ». Specchia O. 701, 754.
— « Intorno alla "teoria unitaria" della

gravitazione e dell'elettricità. – I. Base fisico-geometrica per una conseguente deduzione delle equazioni di campo». Straneo P. 194, 364.

Fisica. — «Intorno alla "teoria unitaria" della gravitazione e dell'elettricità. – II. Posizione e prima discussione delle equazioni di campo». Id. 695.

— «Intorno alla "teoria unitaria" della gravitazione e dell'elettricità. – III. Ancora qualche conseguenza delle equazioni unitarie». Id. 770.

— «Ricerche sperimentali sulla scarica a bagliore». Valle G. 595.

— «Valenza e simmetria». Vinassa P. 642.

— «Sul calcolo di una lente». Vitali G. 701, 767.

— «Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di altezza variabile». Zoja R. 520, 692.

— «Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare con dimensioni comunque variabili». Id. 760.

Fisiologia. — «Decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti maschi castrati». Galamini A. 382.

— «Decorso del digiuno e della rialimentazione in femmine di ratti castrate». Id. 382.

— «Modificazione dei tassi alcoolico e idremico in seguito a somministrazione di alcool e acqua». Id. e Lamanna G. 143. «Modificazioni nei tassi glicemico ed idremico in seguito a somministrazione di glicosio ed acqua». Id. e Serianni E. 234.

— «Sul consumo di glicosio da parte del sistema nervoso centrale isolato e sopravvivente di "Bufo v."». Mitolo M. 229.

— «L'azione dell'alcool sul metabolismo basale e sul quoziente respiratorio nell'uomo normale». Monaldi V. 382.

— «Sopra un metodo per riconoscere la presenza eccezionale di mercurio nei tessuti vegetali». Petri L. 331.

G

Geofisica. — «Sulla depressione gravimetrica di Carpaneto». Belluigi A. 692, 745.

— «Le formule di Biot-Mollweide e di Pinto in confronto coi valori degli elementi magnetici della Somalia». Di Filippo D. 186.

— «Contributo alla conoscenza delle maree dell'Oceano artico». Tenani M. 879.

Ceologia. — «Sulla presenza dell'Oligocene in Sirtica (Libia)». Desio A. 208.

— «Il monte La Queglia in Abruzzo». Sorrentino S. 617.

— «I depositi di Ghelelli, del Galikoma e del Lago Afrera nella depressione dàncala». Vinassa de Regny P. 99.

M

Matematica. — «Relazione tra i simboli di Riemann relativi a due varietà, una immersa nell'altra». Andruetto G. 338.

— «Sulle equazioni intrinseche dell'equilibrio elastico». Id. 427, 489.

— «Relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi in rappresentazione conforme». Boggio T. 333.

— «Sull'operatore di Laplace e nelle equazioni dell'Elasticità negli spazi curvi». Id, 412.

— «Sulle superficie integrali di due o più equazioni a derivate parziali del 3° ordine». Bompiani A. 814.

— «Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata». Bortolotti E. 19.

— «Una generalizzazione del calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata». Id. 32, 104.

— «Sulla risoluzione delle equazioni algebriche». Brocgi U. 347.

— «Sull'integrazione delle equazioni lineari alle differenze con coefficienti costanti». Id. 354, 420.

— «Su di un problema d'interpolazione». Id. 818.

Matematica. — « Sull'espressione del lavoro negli spazi generalizzati ». CABRAS A. 32, 428.
— « Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche ». CACCIOPPOLI R. 185, 263.
— « Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problema di valori ai limiti ». ID. 498.
— « Sopra un metodo di sommazione nel calcolo delle matrici infinite ». ID. 507, 569.
— « Sui sistemi nulli osculatori alle asintotiche di una data superficie ». CALAPSO R. 183.
— « Un teorema sullo spigolo di Green ». ID. 185, 266.
— « Studi sintetici di geometria proiettiva differenziale ». ID. 350.
— « Intorno alla prima direttrice di Wilczynski ed a problemi che a questa si connettono ». ID. 417.
— « Sulle superficie gobbe di terzo grado (del tipo di Cayley) legate al punto di una data supeficie ». ID. 495.
— « Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali ». CIBRARIO M. 26, 115.
— « Sur la sommation des séries trigonométriques ». CIORANESCU N. 507, 577.
— « Determinazione della funzione di variabile complessa regolare in una corona circolare note: la parte reale sulla circonferenza esterna e la parte immaginaria sull'interna ». CISOTTI U. 395.
— « Parallelismo negli spazi funzionali continui ». CONFORTO F. 32, 173.
— « Formalismo matematico in uno spazio funzionale continuo retto da un elemento lineare di seconda specie ». ID. 507, 562.
— « Dell'associabilità di m congruenze di curve nello spazio di n dimensioni ». CORBELLINI G. 593, 655.
— « Sulla definizione di integrale ». DANTONI G. 258.
— « Sulle funzioni omogenee ». DEL CHIARO A. 475.

Matematica. — « Proprietà di alcune connessioni lineari ». DE MIRA FERNANDES A. 118, 179.
— « Direzioni concorrenti ». ID. 508, 587.
— « Centri di gravità delle sezioni piane di un corpo omogeneo ». ID. 593, 667.
— « Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione unica – Funzionali ». FINZI B. 8.
— « Sur l'intégration des transformations fonctionelles lineaires ». HORTINSKY B. 921.
— « Le forme fondamentali delle costanti discontinue come funzioni circolari ». LABOCCETTA L. 822.
— « Una nuova classe di funzioni circolari ». ID. 852, 912.
— « Generazione geometrica delle funzioni numeriche Frx, Cmx, Rx ad essa associate ». ID. 852.
— « Sull'integrale olomorfo e nullo per $x = 0$ dell'equazione $x \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ». LAMPARIELLO G. 13.
— « Considerazioni geometriche per l'analisi periodale ». LOMBARDINI M. 683, 748.
— « Sul prodotto di serie sommabili secondo Cesaro ». MAMMANA G. 507, 662, 848.
— « Sur les formes différentielles d'un complexe de droites ». MENTRÉ P. 597, 583.
— « Estensione delle equazioni integrali lineari singolari dei teoremi di Hilbert-Schmidt e di Picard ». MIRANDA C. 683, 719.
— « Sur la généralisation des fonctions conjuguées ». MOISIL GR. C. 118.
— Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann ». NALLI P. 593, 669.
— Trasporti rigidi di vettori sulle superficie ». ID. 593, 794.
— « Trasporti rigidi e relatività ». ID. 837.
— « Sur une équation aux dérivée partielles caracterisant les moyennes de P. Picone ». NICOLESCO M. 680, 832.
— « Una proprietà caratteristica delle tangenti di Darboux ». PALOZZI G. 485.
— « Sui tensori emisotropi ». PASTORI M. 109.
— « Sopra uno speciale operatore funzionale ». PINCHERLE S. 553.

Matematica. — « Caratteristiche delle equazioni di Dirac e principio di indeterminazione ». Racah G. 424.

— « Sulla flessione delle superficie ». Rimini C. 725.

— « Sulla convergenza parziale degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. Estensione del teorema di Kolmogoroff sugli sviluppi in serie di Fourier ». Sansone G. 842.

— « Intorno al problema di Poincarè della rappresentazione pseudoconforme ». Segre B. 676.

— « Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche ». Severi F. 795.

— « Sur les zéros de la dérivée d'une fonction holomorphe ». Teodoriu L. 508, 591.

— « Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac ». Théodoresco N. 185, 342.

— « Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo ». Tricomi F. 407.

— « Ancora sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo ». Id. 478.

— « Un teorema sulla derivazione delle serie ». Tonelli L. 163.

— « Sulle singolarità della Jacobiana di $r+1$ ipersuperficie dello spazio ad r dimensioni ». Villa M. 574.

— « Proprietà notevoli di funzioni continue da una parte ». Viola T. 731.

— « Sulla derivata destra di una funzione continua verso destra e derivabile verso destra ». Id. 828, 918.

— « Un risultato di F. Hausdorff e la compressibilità della materia ». Vitali G. 903.

Meccanica. — « Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici ». 594.

— « Vortice in un campo limitato da un cardioide ». Caldonazzo B. 869.

— « Correnti circolatorie locali intorno a regioni di acqua morta ». Cisotti U. 85.

— « Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert al teorema di Kutta-Joukowski e delle azioni dinamiche sopra profili cuspidati ». Id. 92, 161.

Meccanica. — « Circolazione intorno a regioni di acqua morta limitate da una parete poligonale e da un pelo libero ». Id. 168, 247.

— « Sulla teoria degli archi ad una o due cerniere ». Colonnetti G. 512, 584.

— « Potenza di una corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo di Joukowski ». Consiglio A. 866.

— « Sui corpi aerodinamici a resistenza negativa ». Crocco G. A. 641, 906.

— « I corpi aerodinamici a resistenza negativa (Corpi portanti) ». Id. 809.

— « Sulle onde di canale di tipo permanente ». Fenchel W. 740.

— « La relatività generale nei fenomeni di irradiamento atomico ». Finzi B. 119.

— « Algoritmi di calcolo motoriale ». Galanti G. 512, 861.

— « Nuove idee sulla teoria della relatività ». Giorgi G. 469.

— « Sul comportamento delle forze di reazione nel moto di un qualsivoglia sistema materiale sollecitato da forze posizionali ». Gugino E. 185, 269.

— « Quelques observations sur le travail de M. Sakellariou: "Sur une classe des mouvements centraux" ». Hatzidakis N. 692, 744.

— « Qualche complemento alla teoria degli invarianti adiabatici secondo T. Levi-Civita ». Krall G. 852.

— « Trasformazioni adiabatiche nei sistemi vibranti nell'intorno di configurazioni stabili di equilibrio ». Id. 924.

— « Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi ». Lampariello G. 688.

— « Suscettibilità magnetica, spettri d'assorbimento e costituzione dei nitrosolfuri del ferro ». Id., Id. 99, 168.

— « Sulla stereoisomeria dei derivati dell'1 1'-dinaftile ». Corbellini A. 702.

— « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. – VIII. Analisi termica e rongte-

nografica del sistema Li_2Br_2 — $MgBr_2$ anidri ». Ferrari A. e Colla C. 78.

Meccanica. — « Propagazione di onde nei mezzi elastici isotropi anche non omogeni ». Lampariello G. 156.

— « A proposito delle Note dei Sig. Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali ». Levi-Civita T. 640, 715.

— « I solfati doppî del bismuto coi metalli alcalini. – II. Solfati doppî del bismuto e litio ». Malossi L. 775.

— « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. – VIII. Nuovi derivati 2-2'-bisostituiti del difenile ». Mascarelli L. e Gatti D. 887.

— « Sulla presenza di alluminio nelle foglie e nei succhi intracellulari del gelso ». Ongaro D. 202.

— « Azione delle alghe marine sulla velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni zuccherine ». Pirrone F. 137.

— « Sulle reazioni di addizione ai composti organici non saturi ». Pratesi P. 705, 779.

— « Contributo alla trattazione dei sistemi elastici doppiamente iperstatici ». Pugno G. M. 508.

— « Sopra i neri di azopirrolo ». Quilico A. e Freri M. 282, 377.

— « Sull'1-metil 2-nitro 3-ossibenzolo ». Ravazzoni C. e Corbellini A. 132.

— « L'Idrogenazione dei composti azotati contenuti nel catrame primario ». Roberti G. 527.

— « Azione dell'acqua marina sulla fermentazione alcoolica ». Sanzo L. e Pirrone F. 140.

— « Acqua di mare irradiata con raggi U. V., e sua azione sulla velocità della fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio ». Id., Id. 613.

Meccanica. — « Sulla reazione fra nitroprussiato sodico e solfuri ». Scagliarini G. e Pratesi P. 199.

— « Teoria della esperienza di Melde ». Serini R. 62.

— « Propagazione delle vibrazioni trasversali in una corda finita con resistenza del mezzo ». Id. 354.

— « Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione ». Id. 503.

— « Sulla variabilità della massa ». Somigliana C. 804.

— « Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio ». Volterra E. 32.

— « Sopra i sistemi anolonomi a legami indipendenti dal tempo ». Vranceanu G. 38.

— « Solfati di praseodimio e di tallio talloso ». Zambonini F. e Restaino S. 650.

Mineralogia. — « Di alcune corallinacee fossili delle Canarie ». Airoldi M. 439, 432.

— « La determinazione dell'angolo degli assi ottici di minerali biassici col piatto di Fedorow ». Debenedetti A. 194. 287.

— « Vesuviana del Monte Spinosa nel Campigliese ». Rodolico F. 213.

— « Diopside e tremolite del Monte Spinosa nel Campigliese ». Id. 705.

P

Paleontologia. — « Florula quaternaria di Magliano de' Marsi sull'orlo della conca fucense ». Principi P. 211.

Patologia. — « Su alcune frazioni lipoidali dell'adenocarcinoma del topo ». Bolaffi A. 298.

N. P.

ERRATA-CORRIGE

Nella Nota: *Remarques sur les équations intégro–fonctionnelles* di C. Popovici, del vol. XI, serie 6ª, 1° sem., 1930, fasc. 12°, a pag. 1081 linea 16 in luogo di

$$\sum_{i=}^{\infty} k(x_i, s)$$ leggere: $k(x_i, s)$ pour s compris entre x_i et x_{i+1}

a pag. 1084 linea 19, aggiungere:

On suppose $k(x_1, s) = k(x, s)$

a pag. 1085, nota (1) in basso, aggiungere:

L'équation la plus générale (1), après l'avoir dérivée se résout comme (14).

Nella Nota: *Suscettibilitá magnetica, spettri d'assorbimento e costituzione dei nitrososolfuri del ferro* del Corrisp. L. Cambi e di L. Szegö, a pag. 168 del vol XIII, serie 6ª, 1° sem., fasc. 3°, in luogo di

$$\chi^m \cdot 10 \qquad \chi^m_{Fe} \cdot 10$$

si deve leggere:

$$\chi^m \cdot 10^6 \qquad \chi^m_{Fe} \cdot 10^6 .$$

Nella Nota: *Dimostrazione di una proprietá attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie* del Socio Gian Antonio Maggi, a pag. 324 del vol. XIII, serie 6ª, 1° sem., fasc. 5°, la formula (4) si deve leggere:

$$\lim_{n \gtrless 0} \frac{\partial V}{\partial x} = X_\sigma \mp 2\pi k \cos \widehat{nx} .$$

Nella Nota: *Il monte La Queglia in Abruzzo* di S. Sorrentino, a pag. 619 del vol. XIII, serie 6ª, 1° sem., fasc. 8°, si legga sotto la figura la leggenda:

Scala 1 : 50.000

1 = conglomerato – 2 = marne con gesso – 3 = miocene medio (marne calcaree) – 4 = eocene – f = faglia.

3 8198 304 934 712
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO